CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS

TEORÍA Y PRÁCTICA

CARLOS A. SMITH
ARMANDO B. CORRIPIO



CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS

TEORÍA Y PRÁCTICA

Carlos A. Smith
University of South Florida

Armando B. Corripio
Louisiana State University

Versión española:

SERGIO D. MANZANARES BASURTO
Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica
de la Escuela Superior de Ingeniería
Mecánica y Electrónica del Instituto
Politécnico Nacional de México

Revisión:

CARLOS A. SMITH
ARMANDO B. CORRIPIO

Francisco Sahagún Chávez.

192091



EDITORIAL LIMUSA

MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Versión autorizada en
español de la obra
publicada en inglés por
John Wiley & Sons, Inc.
con el título:
PRINCIPLES AND PRACTICE OF
AUTOMATIC PROCESS CONTROL
© John Wiley & Sons, Inc.
ISBN 0-47 1-88346-8

Elaboración: SISTEMAS EDITORIALES TÉCNICOS, S.A. de C. V.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial Mexicana. Registro número 12 1

Primera edición: 1991
Impreso en México
(5942)

ISBN 968-18-3791-6

Con todo cariño a

los Smith:

Cristina, Cristina M.,
Carlos A., Jr. y
Sr. René Smith y Sra.

los Corripio:

Connie, Bernie, Mary, Michael y
Consuelo

y a nuestra querida tierra natal, Cuba

Prólogo

El propósito principal de este libro es mostrar la práctica del control automático de proceso, junto con los principios fundamentales de la teoría del control. Con este fin se incluye en la exposición una buena cantidad de análisis de casos, problemas y ejemplos tomados directamente de la experiencia de los autores como practicantes y como consultores en el área. En opinión de los autores, a pesar de que existen muchos libros buenos en los que se tratan los principios y la teoría del control automático de proceso, en la mayoría de ellos no se proporciona al lector la práctica de dichos principios.

Los apuntes a partir de los cuales se elaboró este libro se han utilizado durante varios años en los cursos finales de ingeniería química y mecánica en la University of South Florida y en la Louisiana State University. Asimismo los autores han utilizado muchas partes del libro para impartir cursos cortos a ingenieros en ejercicio activo en los Estados Unidos y en otros países.

El interés se centra en el proceso industrial y lo pueden utilizar los estudiantes del nivel superior de ingeniería, principalmente en las ramas de química, mecánica, metalurgia, petróleo e ingeniería ambiental; asimismo, lo puede utilizar el personal técnico de procesos industriales. Los autores están convencidos de que, para controlar un proceso, el ingeniero debe entenderlo primero; a ello se debe que todo el libro se apoye en los principios del balance de materia y energía, el flujo de líquidos, la transferencia de calor, los procesos de separación y la cinética de la reacción para explicar la respuesta dinámica del proceso. La mayoría de los estudiantes de los grados superiores de ingeniería tienen las bases necesarias para entender los conceptos al nivel que se presentan. El nivel de las matemáticas que se requieren se cubre en los primeros semestres de ingeniería, principalmente el calculo operacional y las ecuaciones diferenciales.

En los capítulos 1 y 2 se definen los términos y los conceptos matemáticos que se utilizan en el estudio de los sistemas de control de proceso. En los capítulos 3 y 4 se explican los principios de la respuesta dinámica del proceso. En estos capítulos se utilizan nu-

merosos ejemplos para demostrar el desarrollo de modelos de proceso simples y para ilustrar el significado físico de los parámetros con que se describe el comportamiento dinámico del proceso.

En el capítulo 5 se estudian algunos componentes importantes del sistema de control; a saber: sensores, transmisores, válvulas de control y controladores por retroalimentación. Los principios de operación práctica de algunos sensores, transmisores y válvulas de control comunes se presentan en el apéndice C, cuyo estudio se recomienda a los estudiantes que se interesen en conocer el funcionamiento de los instrumentos de proceso.

En los capítulos 6 y 7 se estudian el diseño y análisis de los sistemas de control por retroalimentación. El resto de las técnicas importantes del control industrial se tratan en el capítulo 8; éstas son: control de razón, control en cascada, control por acción precalculada, control por sobreposición, control selectivo y control multivariable. Se usan numerosos ejemplos para ilustrar la aplicación industrial de dichas técnicas.

Los principios de los modelos matemáticos y la simulación por computadora de los procesos y sus sistemas de control se presentan en el capítulo 9. En este capítulo se presenta una estructura modular de programa muy útil, la cual se puede utilizar para ilustrar los principios de respuesta dinámica, estabilidad y ajuste de los sistemas de control.

De acuerdo con la experiencia de los autores, en un curso de un semestre se deben incluir los primeros seis capítulos del libro, hasta la sección 6-3, así como la sección acerca de control por acción precalculada del capítulo 8; posteriormente, según la disponibilidad de tiempo y las preferencias del instructor, se, pueden incluir las secciones sobre relés de cómputo, control de razón, control en cascada, lugar de raíz y respuesta en frecuencia, las cuales son independientes entre sí. Si en el curso se incluye un laboratorio, el material del capítulo 5 y del apéndice C es un excelente apoyo para los experimentos de laboratorio. Los ejemplos del capítulo 9 se pueden usar como guía para “experimentos” de simulación por computadora que complementarán a los experimentos reales de laboratorio.

Si se dispone de dos semestres o cuatro trimestres para el curso es posible cubrir todo el texto en detalle. En el curso se debe incluir un proyecto final en el cual se pueden utilizar los problemas de control de proceso del apéndice B, que son problemas industriales reales y’proporcionan al estudiante la oportúnidad de diseñar desde el principio, el sistema de control para un proceso. Los autores estamos convencidos de que dichos problemas son una contribución importante de este libro.

En la presente obra se prefirió el uso exclusivo del método de función de transferencia en lugar del de variable de estado, por tres razones: primera, consideramos que es más factible hacer comprender los conceptos del control de proceso mediante las funciones de transferencia; segunda, no tenemos conocimiento de algún plan de control cuyo diseño se basa en el método de variable de estado y que actualmente se utilice en la industria; finalmente, el método de variable de estado requiere una base matemática más sólida que las funciones de transferencia.

En una obra de este tipo son muchas las personas que contribuyen, apoyan y ayudan a los autores de diferentes maneras; nuestro caso no fue la excepción y nos sentimos bendecidos por haber tenido a estas personas a nuestro alrededor. En el campó industrial ambos autores deseamos agradecer a Charles E. Jones de la Dow Chemical USA, Louisiana Division, por fomentar nuestro interés en la práctica industrial del control de proceso y

por alentarnos a buscar una preparación académica superior. En el campo académico, encontramos en nuestras universidades la atmósfera necesaria para completar este proyecto; deseamos agradecer al profesorado y al alumnado de nuestros departamentos por despertar en nosotros un profundo interés en la instrucción académica, así como por las satisfacciones que hemos recibido de ella. Ser el instrumento para la preparación y desarrollo de las mentes jóvenes en verdad es una labor muy gratificante.

El apoyo de nuestros alumnos de posgrado y de licenciatura (las mentes jóvenes) ha sido invaluable, especialmente de Tom M. Brookins, Vanessa Austin, Sterling L. Jordan, Dave Foster, Hank Brittain, Ralph Stagner, Karen Klingman, Jake Martin, Dick Balhoff, Terrell Touchstone, John Usher, Shao-yu Lin y A. (Jefe) Rovira. En la University of South Florida, Carlos A. Smith desea agradecer al doctor L. A. Scott su amistad y su consejo, que han sido de gran ayuda durante estos últimos diez años. También agradece al doctor J. C. Busot su pregunta constante: "¿Cuándo van a terminar ese libro?", la cual realmente fue de ayuda, ya que proporcionó el ímpetu necesario para continuar. En la Louisiana State University, Armando B. Corripio desea agradecer a los doctores Paul W. Murrill y Cecil L. Smith su intervención cuando él se inició en el control automático de proceso; no sólo le enseñaron la teoría, sino también inculcaron en él su amor por la materia y la enseñanza de la misma.

Para terminar, los autores deseamos agradecer al grupo de secretarias de ambas universidades por el esmero, la eficiencia y la paciencia que tuvieron al mecanografiar el manuscrito. Nuestro agradecimiento para Phyllis Johnson y Lynn Federspeil de la USF, así como para Janet Easley, Janice Howell y Jimmie Keebler de la LSU.

Carlos A. Smith
Tampa, Florida

Armando B. Corripio
Baton Rouge, Louisiana

Contenido

CAPÍTULO

1

Introducción

El propósito principal de este capítulo es demostrar al lector la necesidad del control automático de procesos y despertar su interés para que lo estudie. El objetivo del control automático de procesos es mantener en determinado valor de operación las variables del proceso tales como: temperaturas, presiones, flujos y compuestos. Como se verá en las páginas siguientes, los procesos son de naturaleza dinámica, en ellos siempre ocurren cambios y si no se emprenden las acciones pertinentes, las variables importantes del proceso, es decir, aquellas que se relacionan con la seguridad, la calidad del producto y los índices de producción, no cumplirán con las condiciones de diseño.

En este capítulo se presentan asimismo, dos sistemas de control, se examinan algunos de sus componentes, se definen algunos de los términos que se usan en el campo del control de procesos y finalmente, se exponen las bases necesarias para su estudio.

I-I. EL SISTEMA DE CONTROL DE PROCESOS

Para aclarar más las ideas expuestas aquí, considérese un intercambiador de calor en el cual la corriente en proceso se calienta mediante vapor de condensación, como se ilustra en la figura l-l.

El propósito de la unidad es calentar el fluido que se procesa, de una temperatura dada de entrada $T_i(t)$, a cierta temperatura de salida, T(t), que se desea. Como se dijo, el medio de calentamiento es vapor de condensación y la energía que gana el fluido en proceso es igual al calor que libera el vapor, siempre y cuando no haya pérdidas de calor en el entorno, esto es, el intercambiador de calor y la tubería tienen un aislamiento perfecto; en este caso, el calor que se libera es el calor latente en la condensación del vapor.

En este proceso existen muchas variables que pueden cambiar, lo cual ocasiona que la temperatura de salida se desvíe del valor deseado, si esto llega a suceder, se deben

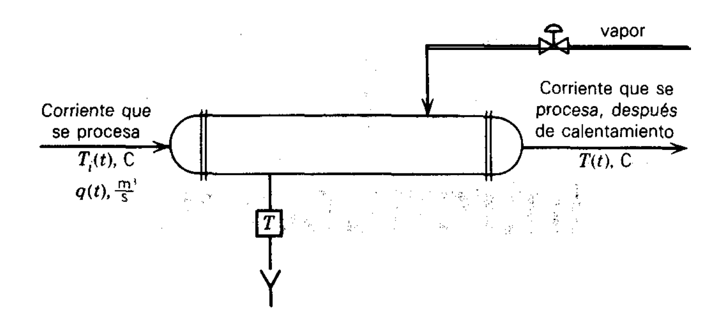


Figura 1-1. Intercambiador de calor.

emprender algunas acciones para corregir la desviación; esto es, el objetivo es controlar la temperatura de salida del proceso para mantenerla en el valor que se desea.

Una manera de lograr este objetivo es primero, medir la temperatura $T(t)$, después comparar ésta con el valor que se desea y, con base en la comparación, decidir qué se debe hacer para corregir cualquier desviación. Se puede usar el flujo del vapor para corregir la desviación, es decir, si la temperatura está por arriba del valor deseado, entonces se puede cerrar la válvula de vapor para cortar el flujo del mismo (energía) hacia el intercambiador de calor. Si la temperatura está por abajo del valor que se desea, entonces se puede abrir un poco más la válvula de vapor para aumentar el flujo de vapor (energia) hacia el intercambiador.. Todo esto lo puede hacer manualmente el operador y puesto que el proceso es bastante sencillo no debe representar ningún problema. Sin embargo, en la mayoría de las plantas de proceso existen cientos de variables que se deben mantener en algún valor determinado y con este procedimiento de corrección se requeriría una cantidad tremenda de operarios, por ello, sería preferible realizar el control de manera automática, es decir, contar con instrumentos que controlen las variables sin necesidad de que intervenga el operador. Esto es lo que significa el *control automático de proceso.*

Para lograr este objetivo se debe diseñar e implementar un *sistema de control.* En la figura 1-2 se muestra un sistema' de control y sus componentes básicos. (En el apéndice A se presentan los símbolos e identificación de los diferentes instrumentos utilizados en el sistema de control automático.} El primer paso es medir la temperatura de salida de la corriente del proceso, esto se hace mediante un sensor (termopar, dispositivo de resistencia térmica, termómetros de sistema lleno, termistores, etc.). El sensor se conecta físicamente al *transmisor,* el cual capta la salida del sensor y la convierte en una señal lo suficientemente intensa como para transmitirla *al controlador,* El controlador recibe la señal, que está en relación con la temperatura, la compara con el valor que se desea y, según el resultado de la comparación, decide qué hacer para mantener la temperatura en el valor deseado. Con base en la decisión, el controlador envía otra señal al *elemento final de control,* el cual, a su vez, maneja el flujo de vapor.

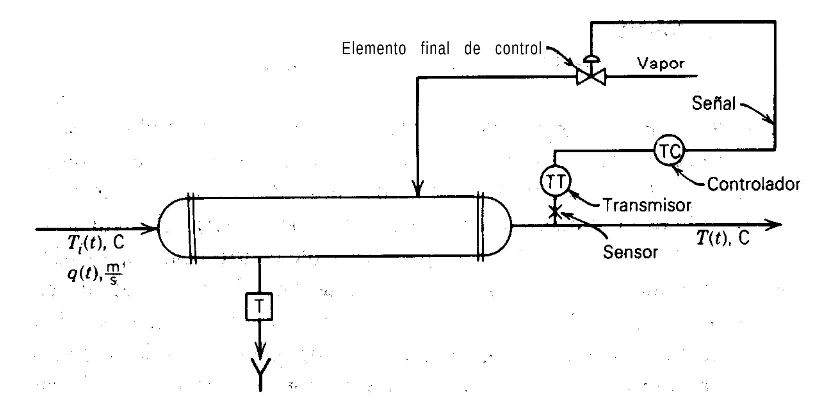


Figura 1-2. Sistema de control del **intercambiador** de calor.

En el **párrafo** anterior se presentan los cuatro componentes básicos de todo sistema de control, éstos son:

1. Sensor, que **también** se conoce como elemento primario.
2. ***Transmisor,*** el cual se **conoce como** elemento secundario.
3. ***Controlador,*** que es el "cerebro!' del sistema de control.
4. ***Elemento final de control,*** frecuentemente se trata de una válvula de control aunque no siempre. Otros elementos finales de control comúnmente utilizados son las bombas de velocidad variable, los transportadores y los motores eléctricos.

La importancia de estos componentes estriba en que ***realizan las tres operaciones bdsicas*** que deben estar presentes en ***todo sistema de control;*** **estas** operaciones son:

1. ***Medición (M):*** la medición de la variable que se controla se hace generalmente mediante **la combinación** de sensor y transmisor.
2. ***Decisión (D):*** con base en la medición, el controlador decide **qué** hacer para mantener la variable en el valor que se desea.
3. ***Acción (A):*** como resultado de la decisión del controlador se debe efectuar una **acción** en el sistema, **generalmente ésta** es **realizada** por el elemento final de control.

Como se dijo, estas tres operaciones, M, D y A son obligatorias para rodo sistema de control. **En algunos** sistemas, la toma de decisión es sencilla, mientras que en otros es más compleja: en este libro se estudian muchos de **tales** sistemas. El ingeniero que diseña el sistema de control debe asegurarse que las acciones que se emprendan tengan su efecto en' la variable controlada, 'es decir, que la acción emprendida repercuta en el valor que se mide; de lo contrario el sistema no'controla y puede ocasionar más perjuicio que beneficio.

1-2. TÉRMINOS IMPORTANTES Y OBJETIVO DEL CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESO

Ahora es necesario definir algunos de los términos que se usan en el campo del control automático de proceso. El primer término es *variable* controlada, ésta es la variable que se debe mantener o controlar dentro de algún valor deseado. En el ejemplo precedente la variable controlada es la temperatura de salida del proceso T(t). El segundo término es *punto de* control, el valor que se desea tenga la variable controlada. La *variable manipulada* es la variable que se utiliza para mantener a la variable controlada en el punto de control (punto de fijación o de régimen); en el ejemplo la variable manipulada es el flujo de vapor. Finalmente, cualquier variable que ocasiona que la variable de control se desvíe del punto de control se define como *perturbación* o trastorno; en la mayoría de los procesos existe una cantidad de perturbaciones diferentes, por ejemplo, en el intercambiador de calor que se muestra en la figura 1-2, las posibles perturbaciones son la temperatura de entrada en el proceso, $T_i(t)$, el flujo del proceso, $q(t)$, la calidad de la energía del vapor, las condiciones ambientales, la composición del fluido que se procesa, la contaminación, etc. Aquí lo importante es comprender que en la industria de procesos, estas perturbaciones son la causa mas común de que se requiera el control automático de proceso; si no hubiera alteraciones, prevalecerían las condiciones de operación del diseño y no se necesitarfa supervisar continuamente el proceso.

Los siguientes términos también son importantes. *Circuito abierto o lazo abierto, se* refiere a la situación en la cual se desconecta el controlador del sistema, es decir, el controlador no realiza ninguna función relativa a cómo mantener la variable controlada en el punto de control; otro ejemplo en el que existe control de circuito abierto es cuando la acción (A) efectuada por el controlador no afecta a la medición (M). De hecho, ésta es una deficiencia fundamental del diseño del sistema de control. *Control de* circuito *cerrado* se refiere a la situación en la cual- se conecta el controlador al proceso; el controlador compara el punto de control (la referencia) con la variable controlada y determina la acción correctiva.

Con la definición de estos términos, el objetivo del control automático de proceso se puede establecer como sigue:

> El objetivo del sistema de control automático de proceso es utilizar la variable manipulada para mantener a la variable controlada en el punto de control a pesar de las perturbaciones.

1-3. CONTROL REGULADOR Y SERVOCONTROL

En algunos procesos la variable controlada se desvía, del punto, de control a causa de las perturbaciones. El término *control regulador* se utiliza para referirse a los sistemas diseñados para compensar las perturbaciones. A veces la perturbación más importante ‘es el punto de control mismo, esto es, el punto de control puede cambiar en función del tiempo (lo cual es típico de los procesos por lote), y en consecuencia, la variable controlada debe

ajustarse al punto de control; el término *servocontrol* se refiere a los sistemas de control que han sido diseñados con tal propósito.

En la industria de procesos, el control regulador es bastante más común que el servocontrol, sin embargo, el método básico para el diseño de cualquiera de los dos es esencialmente el mismo y por tanto, los principios que se exponen en este libro se aplican a ambos casos.

1-4. SEÑALES DE TRANSMISIÓN

Enseguida se hace una breve mención de las señales que se usan para la comunicación entré los instrumentos de un sistema de control. Actualmente se usan tres tipos principales de señales en la industria de procesos. La primera es la *señal neumática* o presión de aire, que normalmente abarca entre 3 y 15 psig , con menor frecuencia se usan señales de 6 a 30 psig 6 de 3 a 27 psig; su representación; usual en los diagramas de instrumentos y tubería (DI&T) (P&ID, por su nombre en inglés) es —//——//— . *La señal eléctrica o electrónica*, normalmente toma valores entre 4 y 20 mA; el uso de 10 a 50 mA, de 1 a 5 V o de 0 a 10 V es menos frecuente; la representación usual de esta señal en los DI&T es --------. El tercer tipo de señal,. el cual. se está convirtiendo en el más común, es la *señal digital* o *discreta'* (unos y ceros); el uso de los sistemas de control de proceso con computadoras grandes, minicomputadoras o-microprocesadores está forzando el uso cada vez mayor de este tipo de señal.

Frecuentemente es necesario cambiar un tipo de señal por otro, esto se hace mediante un transductor, por ejemplo, cuando se necesita cambiar de una señal eléctrica, mA, a una neumática, psig, se utiliza un-transductor (I/P) que transforma la señal de corriente (1) en neumática (P), como se ilustra gráficamente en la'ñgura 1-3; la señal de entrada puede ser de 4 a 20 mA y la de salida de 3 a 15 psig. Existen muchos otros tipos de transductores: neumático a corriente (P/I), voltaje a neumático (E/P), neumático a voltaje (P/E), etcétera.

1-5. ESTRATEGIAS DE CONTROL

Control por retroalimentación

El esquema de control que se muestra en la figura 1-2 se conoce como control por retroalimentación, también se le llama circuito de control por retroalimentación. Esta técnica la aplicó por primera vez James Watt hace casi 200' años, para controlar un proceso

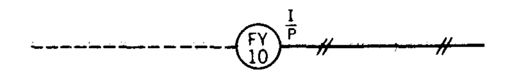


Figura 1-3. Transductor I/P.

industrial; consistía en mantener constante la velocidad de una máquina de vapor con carga variable; se trataba de una aplicación del control regulador. En ese procedimiento se toma la variable controlada y se retroalimenta al controlador para que éste pueda tomar una decisión. Es necesario comprender el principio de operación del control por retroalimentación para conocer sus ventajas y desventajas; para ayudar a dicha comprensión se presenta el circuito de control del intercambiador de calor en la figura 1-2.

Si la temperatura de entrada al proceso aumenta y en consecuencia crea una perturbación, su efecto se debe propagar a todo el intercambiador de calor antes de que cambie la temperatura de salida. Una vez que cambia la temperatura de salida, también cambia la señal del transmisor al controlador, en ese momento el controlador detecta que debe compensar la perturbación mediante un cambio en el flujo de vapor, el controlador señala entonces a la válvula cerrar su apertura y de este modo decrece el flujo de vapor. En la figura 1-4 se ilustra gráficamente el efecto de la perturbación y la acción del controlador.

Es interesante hacer notar que la temperatura de salida primero aumenta a causa del incremento en la temperatura de entrada, pero luego desciende incluso por debajo del punto de control y oscila alrededor de este hasta que finalmente se estabiliza. Esta respuesta oscilatoria demuestra que la operación del sistema de control por retroalimentación es esencialmente una operación de ensayo y error, es decir,, cuando el controlador detecta que la temperatura de salida aumentó por arriba del punto de control, indica a la válvula que cierre, pero ésta cumple con la orden más allá de lo necesario, en Consecuencia la temperatura de salida desciende por abajo del punto de control; al notar esto, el con-

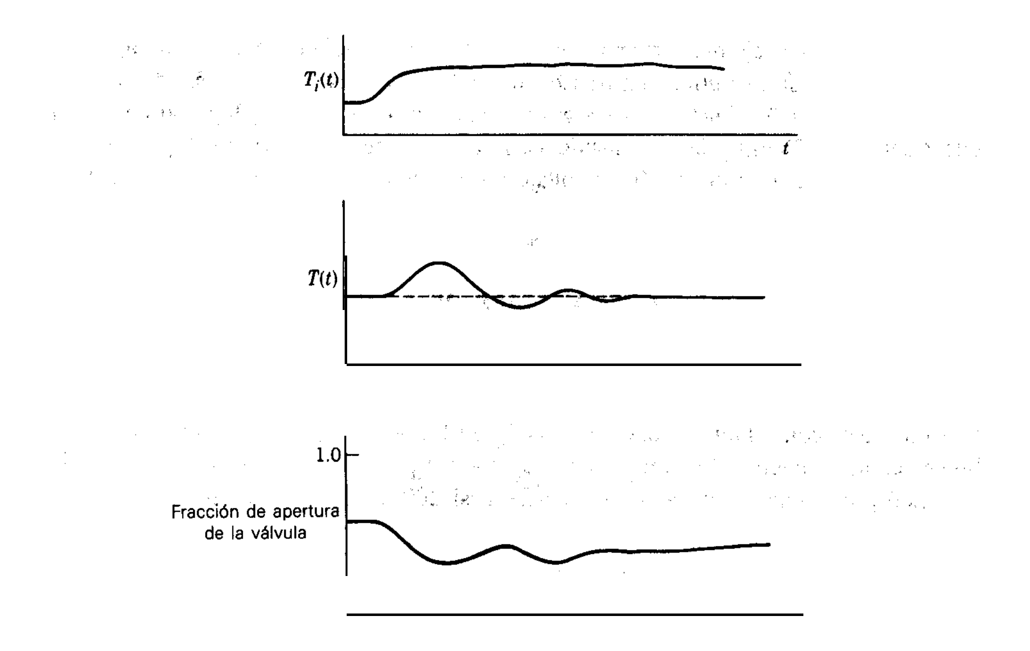


Figura 1-4. Respuesta del 'sistema de control del intercambiador de calor.

trolador señala a la válvula que abra nuevamente un tanto para elevar la temperatura. El ensayo y error continua hasta que la temperatura alcanza el punto de control donde permanece posteriormente.

La ***ventaja del control por retroalimentación*** consiste en que es una técnica muy simple, como se muestra en la figura 1-2, que ***compensa todas las perturbaciones.*** Cualquier perturbación puede afectar a la variable controlada, cuando ésta se desvía del punto de control, el controlador cambia su salida para que la variable regrese al punto de control. El circuito de control no detecta qué tipo de perturbación entra al proceso, únicamente trata de mantener la variable controlada en el punto de control y de esta manera compensar cualquier perturbación. La ***desventaja del control por retroalimentación*** estriba en que únicamente puede compensar la perturbación hasta que la variable controlada se ha desviado del punto de control, esto es, la perturbación se debe propagar por todo el proceso antes de que la pueda compensar el control por retroalimentación.

El trabajo del ingeniero es diseñar un sistema de control que pueda mantener la variable controlada en el punto de control. Cuando ya ha logrado esto, debe ajustar el controlador de manera que se reduzca al mínimo la operación de ensayo y error que se requiere para mantener el control. Para hacer un buen trabajo, el ingeniero debe conocer las características o "personalidad" del proceso que se va a controlar, una vez que se conoce la "personalidad del proceso" ' el ingeniero puede diseñar el sistema de control y obtener la "personalidad del controlador" que mejor combine con la del proceso. El significado de "personalidad" se explica en los próximos capítulos, sin embargo, para aclarar lo expuesto aquí se puede imaginar que el lector trata de convencer a alguien de que se comporte de cierta. manera,. es decir, controlar el comportamiento de alguien; el lector es el controlador y ese alguien es el proceso. Lo más prudente es que el lector conozca la personalidad de ese alguien para poder adaptarse a su personalidad. si pretende efectuar un buen trabajo de persuasión o de control. Esto es lo que significa el "ajuste del controlador", es decir, el controlador se adapta o ajusta al proceso. En la mayoría de los controladores se utilizan hasta tres parámetros para su ajuste, como se verá en los capitulos 5 y 6.

Control por acción precalculada

El control por retroalimentación es la estrategia de control más común en las industrias de proceso, ha logrado tal aceptación por su simplicidad; sin embargo, en algunos procesos el control por retroalimentación no proporciona la función de control que se requiere, para esos procesos se deben diseñar otros 'tipos de control. En el capitulo 8 se presentan estrategias de control que han demostrado ser útiles; una de tales estrategias es el control por acción precalculada. El objetivo del control por acción precalculada es medir las perturbaciones y compensarlas antes de que la variable controlada se desvie del punto de control; si se aplica de manera correcta, la variable controlada no se desvía del punto de control.

Un ejemplo concreto de control por acción precalculada es el intercambiador de calor que aparece en la figura l-l. Supóngase que las perturbaciones "más serias" son la temperatura de entrada, $T_i(t)$, y el flujo del proceso, $q(t)$; para establecer el control por ac-

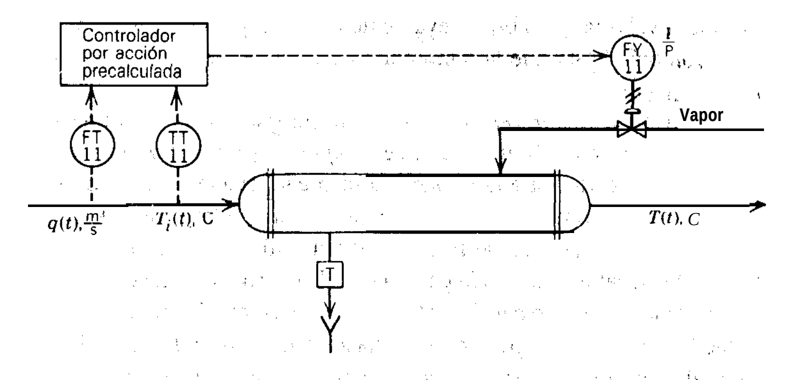


Figura 1-5. Intercambiador de calor con sistema de control por acción precalculada.

ción precalculada primero se **deben** medir estas dos perturbaciones y luego **se** toma una decisión sobre la **manera** de manejar el flujo de vapor para **compensar los problemas.** En la' figura 1-5 se ilustrxesta **estrategia** de coritrol; el **controlador por acción precalculada** decide cómo manejar el flujo de **vapor** para mantener **la** variable controlada **en** el **punto** de **control,** en función de la temperatura de entrada y'èl flujo del **proceso.**

En la sección **1-2** Se **mencionó** que existen varios **tipos** de perturbaciones; el sistema de control por acción precalculada que 'se **muestra** eh la **figura** 1-5, **sólo** compensa a dos de ellas, si cualquier otra perturbación **entra** al **proceso no** se **compensará** con esta estrategia y puede originarse una desviación **permanente de** la variable **respecto al** punto de control. **Para** evitar esta **desviación** se debe 'añadir alguna **retroalimentación** de **compensación al** control por acción **precalculada,** esto se muestra en la figura 1-6. **Ahora** el control **por acción precalculada** compensa **las** perturbaciones más serias, $T_i(t)$ y $q(t)$, mientras que **el** control por retroalimentación **compensa** todas **las** 'demás.

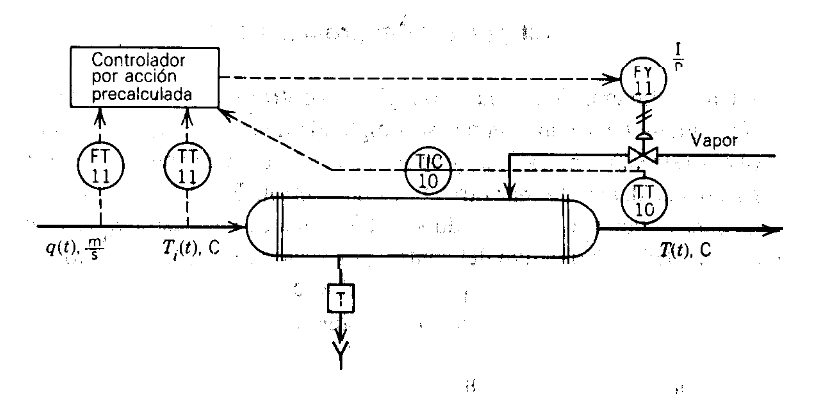


Figura 1-6. Control por acción precahlada del **intercambiador** de calor **con compensación** por retroalimentación.

En el capítulo 8 se presenta el desarrollo del controlador por acción precalculada y los instrumentos que se requieren, para su establecimiento. En el estudio de esta importante estrategia se utilizan casos reales de la industria.

Es importante hacer notar que en esta estrátkgia de control más “avanzada” aún estan presentes las tres operaciones básicas, M, D y A. Los sensores y los transmisores realizan la medición; la decisión la toman el controlador por acción Precalculada y el controlador por retroalimentación, TIC-10; la acción la realiza la válvula de vapor.

En general, las estrategias de control que se presentan en el capítulo 8 son más costosas, requieren una mayor. inversión en el equipo y en la mano de obra necesarios para su diseño, implementación y mantenimiento que el control por retroalimentación. Por ello debe justificarse la inversión de capital antes de implementar algún sistema. El mejor procedimiento es diseñar e implementar’primero ‘una estrategia de control sencilla, teniendo en mente que si no resulta satisfactoria. entonces se justifica una estrategia más ‘‘avanzada”, sin embargo, es importante estar consciente de que en estas estrategias avanzadas aún se requiere alguna retroalimentación de compensación.

1-6. RAZONES PRINCIPALES ‘PARA EL CONTROL DE PROCESO

En este capítulo’se definió el control automático de proceso como “una manera de mantener la’ variable controladaen el punto de control, a ‘pesar de las perturbaciones”. Ahora es conveniente enumerar algunas de las “razones” por las cuales esto es importante, estas razones son producto de la experiencia industrial, tal vez no sean las únicas, pero sí las más importantes.

1. Evitar lesiones al personal de la planta’ o daño al equipo. La *seguridad* siempre ‘debe estar en la mente de todos, ésta es la consideración más importante.
2. ‘Mantener la calidad del producto (composición, pureza, color’, etc:) en un nivel continuo y con’ un’ costo mínimo.
3. Mantener la tasa de’ producción dé la planta al costo mínimo .

Por tanto, se puede decir que las razones de la automatización -de las plantas de proceso son proporcionar un entorno seguro y a la’ vez mantener la calidad deseada del producto y alta eficiencia de la planta con reducción de la demanda de trabajo humano.

1-7. BASES NECESARIAS PARA EL CONTROL DE PROCESO

Para tener éxito en la práctica del control automático de proceso, el ingeniero debe comprender primero los principios de la ingeniería de proceso. Por lo tanto, en este libro se supone que el lector conoce los principios’ básicos de termodinámica, flujo de fluidos;, transferencia de calor, proceso de separación, procesos de reacción, etc.

Para estudiar el control de proceso también es importante entender el comportamiento dinámico de los procesos: por consiguiente., es necesario desarrollar elsistema de ecua-

ciones que describe diferentes procesos, esto *se* conoce como ***modelación***; para desarrollar modelos es preciso conocer los principios que se mencionan en el párrafo precedente y tener conocimientos matemáticos, incluyendo, ecuaciones diferenciales. En 'el control de proceso se usan bastante las transformadas de Laplace, con ellas se simplifica en gran medida la solución de las ecuaciones diferenciales y el análisis de los procesos y sus sistemas de control. En el capítulo 2 de este libro el interés se centra en el desarrollo y utilización de las transformadas de Laplace y se hace un repaso del álgebra de números complejos.

Otro recurso importante para el estudio y práctica del control de proceso es la simulación por computadora. Muchas de las ecuaciones que se desarrollan para describir los procesos son de naturaleza no lineal y , en consecuencia, la manera más exacta de resolverlas es mediante métodos numéricos, es decir; solución por computadora. La solución por computadora de los modelos de proceso se llama ***simulación***. En los capítulos 3 y 4 se hace la introducción al modelo de algunos procesos simples y en el capítulo 9 se desarrollan modelos para procesos más complejos, asimismo, se presenta la introducción a la simulación.

1-8. RESUMEN

En este capítulo se trató la necesidad del control automático de proceso. Los procesos industriales no son estáticos, por el contrario, son muy dinámicos, cambian continuamente debido a los, muchos tipos de perturbaciones y precisamente por' eso se necesita que los sistemas de control vigilen continua y automáticamente las variaciones que se deben controlar.

Los principios de funcionamiento del sistema de control se pueden resumir con tres letras M, D, A. M se refiere a la medición de las variables del proceso: D se refiere a la decisión que se toma con base en las mediciones de las variables del proceso. Finalmente, A se refiere a la acción que se debe realizar de acuerdo con, la decisión tomada.

También se explicó lo relativo a los componentes básicos del sistema de control: sensor, transmisor, controlador y elemento final de control. Los tipos más comunes de señales: neumática, electrónica o eléctrica y digital, se introdujeron junto con la exposición del propósito de los transductores.

Se expusieron dos estrategias de control: control por retroalimentación y por acción precalculada. Se expusieron brevemente las ventajas y desventajas de ambas estrategias. El tema de los capftulos 6 y 7 es el diseño y análisis de los circuitos de control por retroalimentación. El control por acción precalculada se presenta con más detalle en el capitulo 8, junto con otras estrategias de control.

AI escribir este libro siempre se tuvo conciencia de que, para tener éxito, el ingeniero debe aplicar los principios que aprende. En el libro se cubren los principios, necesarios para la práctica exitosa del control automático de proceso. En él abundan los ejemplos de casos reales producto de la experiencia de los autores como ingenieros activos en el control de procesos o como consultores. Se espera que este libro despierte un mayor interés en el estudio del control automático de proceso, ya que es un área muy dinámica, desafiante y llena de satisfacciones de la ingeniería de proceso.

CAPÍTULO 2

Matemáticas necesarias para el análisis de los sistemas de control

Se ha comprobado que las técnicas de transformada de Laplace y linealización son particularmente útiles para el análisis de la dinámica de los procesos y diseño de sistemas de control, debido a que proporcionan una visión general del comportamiento de gran variedad de procesos e instrumentos. Por el contrario; la técnica de simulación por computadora 'permite realizar un análisis preciso y detallado del comportamiento dinámico de sistemas especificos, pero rara vez es posible generalizar para otros procesos los resultados obtenidos.

En este capítulo se revisará el método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante este método se puede convertir una ecuación diferencial lineal en una algebraica, que, a su vez, permite el desarrollo del útil concepto de funciones de transferencia, el cual se introduce en este capítulo y se utiliza ampliamente en los subsecuentes. Puesto que las ecuaciones diferenciales que representan la mayoría de los procesos son no lineales, aquí se introduce el método de linealización para aproximarlas a las ecuaciones diferenciales lineales, de manera que se les pueda aplicar la técnica de transformadas de Laplace. Para trabajar con las transformadas de Laplace se requiere cierta familiaridad con los números complejos, por ello se incluye como una sección separada, una breve explicación del álgebra de los números complejos, El conocimiento de la transformada de Laplace es esencial para entender los fundamentos de la dinámica del proceso y del diseño de los sistemas de control.

2-1. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición

La transformada de Laplace de una función del tiempo, $f(t)$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (2\text{-}1)$$

donde:

$f(t)$ es una función del tiempo
$F(s)$ es la transformada de Laplace correspondiente
s es la variable de la transformada de Laplace
t es el tiempo

En la aplicación de la transformada de Laplace al diseño de sistemas de control, las funciones del tiempo son las variables del sistema, inclusive la variable manipulada y la controlada, las señales del transmisor, las perturbaciones, las posiciones de la válvula de control, el flujo a través de las válvulas de control y cualquier otra variable o señal intermedia. Por lo tanto, es muy importante darse cuenta que la transformada de Laplace se aplica a las variables y señales, y no a los procesos o instrumentos.

Para lograr la familiarización con la definición de la transformada de Laplace, se buscará la transformada de varias señales de entrada comunes.

Ejemplo 2-1: En el análisis de los sistemas de control se aplican señales a la entrada, del sistema (por ejemplo, perturbaciones, cambios en el punto de control, etc.) para estudiar su respuesta. A pesar de que en la práctica, generalmente, es difícil o incluso imposible lograr algunos tipos de señales, éstas proporcionan herramientas útiles para comparar las respuestas. En este ejemplo se obtendrá la transformada de Laplace de ,

a) Una función de escalón unitario.
b) Un pulso.
c) Una función de impulso unitario.
d) Una onda senoidal.

Solución

***a*) Función de escalón unitario**

Este es un cambio súbito de magnitud unitaria en un tiempo igual a cero; dicha función se ilustra gráficamente en la figura 2-la, y se representa algebraicamente mediante la expresión:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}(0 \quad 1)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

b) Pulso de magnitud H y duración ***T***

El pulso se muestra gráficamente en lá figura 2-lb y su representación algebraica es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$

Su transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^T He^{-st}\,dt$$

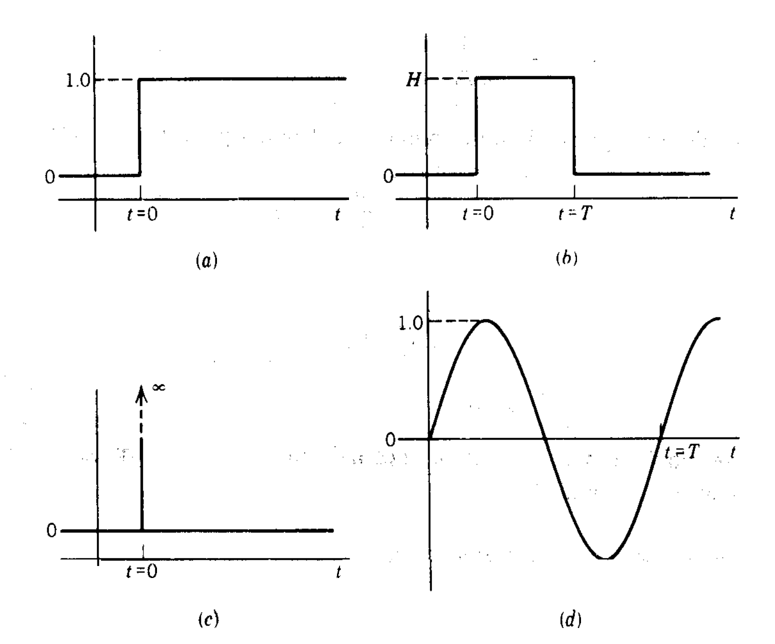


Figura 2-1. Señales de entrada comunes en el estudio de la respuesta del sistema de control. *a*) Función escalón unitario, u(t). *b)* Pulso. c) Función impulso, $\delta(t)$. *d*) Onda senoidal, sen ωt ($\omega = 2\pi/T$).

$$= -\frac{H}{s} e^{-st} \Big|_0^T = -\frac{H}{s} (e^{-sT} - 1)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{H}{s} (1 - e^{-sT})$$

c) Función de impulso unitario

Ésta es un pulso ideal de amplitud infinita y duración cero, cuya área es la unidad, en otras palabras, un pulso de área unitaria con toda ella concentrada es un tiempo igual a cero. Esta función se esboza en la figura 2-1c. Generalmente se usa el símbolo $S(t)$ para representarla, y se le conoce como función "delta Dirac". Su expresión algebraica se puede obtener mediante el uso de los limites de la función pulso de la parte (b):

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} f(t)$$

con:

$$HT = 1 \text{ (el área) o } H = 1/T$$

La transformada de Laplace se puede obtener tomando el límite del resultado de la parte b):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{T \to 0} \frac{1}{Ts} (1 - e^{-sT}) = \frac{1}{0} (1 - 1) = \frac{0}{0}$$

Ahora se requiere la aplicación de la regla de L'Hopital para límites indefinidos:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{T \to 0} \frac{\frac{d}{dT}(1 - e^{-sT})}{\frac{d}{dT}(Ts)}$$

$$= \lim_{T \to 0} \frac{s\, e^{-sT}}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Éste es un resultado muy significativo, pues indica que la transformada de Laplace del impulso unitario es la unidad.

d) Onda senoidal de amplitud y frecuencia ω

La onda senoidal se muestra en la figura 2-ld, y su representación en forma exponencial es

$$\text{senwr} = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios.

Su transformada de Laplace está dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\text{sen}\,\omega t] &= \int_0^\infty \text{sen}\,\omega t\, e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\left[\int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t}\,dt - \int_0^\infty e^{-(s+i\omega)t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[-\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2i}\left[-\frac{0-1}{s-i\omega} + \frac{0-1}{s+i\omega}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Con el ejemplo precedente se ilustra en parte el manejo algebraico que implica la obtención de la transformada de Laplace de una señal. En la mayoría de los manuales de matemáticas e ingeniería aparecen tablas de las transformadas de Laplace; la tabla 2-1 es una breve lista de la transformada de algunas de las funciones más comunes.

Propiedades de la transformada de Laplace

En esta sección se explican algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace, las cuales son útiles porque permiten obtener la transformada de algunas funciones a partir de las más simples, como las que aparecen en la tabla 2-1; establecer la relación de la transformada de una función con sus derivadas e Integrales; así como la determinación de los valores inicial y final de una función a partir de su transformada.

Linealidad. Esta propiedad, la más importante, establece que la transformada de Laplace es lineal; es decir, si k es una constante

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] = kF(s) \tag{2-2}$$

Puesto que es lineal, la propiedad distributiva también es válida para la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \\
&= F(s) + G(s)
\end{aligned} \tag{2-3}$$

Tabla 2-1 Transformada de Laplace de funciones más usuales.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Ambas propiedades se pueden demostrar fácilmente mediante la aplicación de la definición de transformada de Laplace, ecuación (2-1).

Teorema de la diferenciación real. Este teorema establece la relación de la transformada de Laplace de una función con la de su derivada. Su expresión matemática es

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \tag{2-4}$$

Demostración. De la definición de transformada de Laplace, ecuación (2-1)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}\, dt$$

Integrando por partes:

$$u = e^{-st} \qquad dv = \frac{df(t)}{dt}\, dt$$

$$du = -se^{-st}\, dt \qquad v = f(t)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,(-se^{-st}\,dt)$$

$$= [0 - f(0)] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}[f(t)]$$

$$= sF(s) - f(0) \qquad \text{q.e.d.}$$

La extensión a derivadas de orden superior es directa:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right]$$

$$= s\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] - \frac{df}{dt}(0)$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - \frac{df}{dt}(0)$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

En general

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) - \cdots \tag{2-5}$$

$$\cdots - s\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$$

Para el caso, el más importante, en que la función y sus derivadas tienen condiciones iniciales cero, la expresión se simplifica a

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \tag{2-6}$$

Como se puede ver, para el caso de condiciones iniciales cero, la obtención de la transformada de Laplace de la derivada de una función se hace simplemente mediante la substitución del operador "*d/dt*" por la variable s, y la de $f(t)$ por $F(s)$.

Teorema de *la integración real.* Este teorema establece la relación entre la transformada de una función y la de su integral. Su expresión es

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{2-7}$$

Demostración. De la definición de transformada de Laplace, ecuación (2-1)

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\,dt\right] e^{-st}\,dt$$

Integrando por partes:

$$u = \int_0^t f(t)\,dt \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = f(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = -\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(t)\,dt\,\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,dt\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\left[0 - \int_0^0 f(t)\,dt\right] + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\,\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s) \qquad \text{q.e.d}$$

Nótese que en esta derivación se supone que el valor inicial de la integral es cero; en tales condiciones, la integral n de una función es la transformada de la función entre s^n.

Teorema de la diferenciación compleja. Con este teorema se facilita la evaluación de las transformadas que implican la variable de tiempo t, y se expresa mediante

$$\mathscr{L}[t\,f(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) \tag{2-8}$$

Demostración. A partir de la definición de transformada de Laplace, ecuación (2-1), se tiene que

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Tomando la derivada de esta ecuación respecto a s:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty f(t)\,(-te^{-st})\,dt$$

$$= -\int_0^\infty t\,f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= -\mathscr{L}[t\,f(t)] \qquad \text{q.e.d.}$$

Al reacomodar este resultado se obtiene la expresión del teorema mencionado.

Teorema de la traslación real. En este **teorema se** trabaja con **la traslación de una** función en el eje del tiempo, como se ilustra **en la figura** 2-2. **La función trasladada es** la función original con retardo en tiempo. Como se verá en el capitulo 3, **el** retardo de transporte ocasiona retardos de tiempo **en** el proceso; este fenómeno se conoce comúnmente como ***tiempo*** *muerto.*

Puesto que la **transformada de Laplace no contiene** infórmaciáh **acerca de la función** original para tiempo negativo, se supone que la función retardada es cero, para todos los tiempos menores al tiempo de retardo (ver figura 2-2). El teorema se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}\,[f(t - t_0)] = e^{-st_0}\,F(s) \qquad (2\text{-}9)$$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

$f(t-a) = 0$ $\quad t-a<0$ $\quad a = cte$ posit.

Demostración. A partir de la definición de transformada de **Laplace, ecuación** (2-1), se tiene

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \int_0^{\infty} f(t - t_0)e^{-st}\,dt$$

Sea $\tau = t - t_0$ (o $t = t_0 + \tau$) y substituyendo:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \int_{\tau=-t_0}^{\tau=\infty} f(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}\,d(t_0 + \tau)$$

$$= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f(\tau)\,e^{-st_0}\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-st_0}\int_0^{\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-st_0}F(s) \qquad \text{q.e.d.}$$

Nótese que en esta demostración se aprovechó el hecho de que:

$$f(\tau) = 0 \text{ para } \tau < 0 \ (\tau < t_0).$$

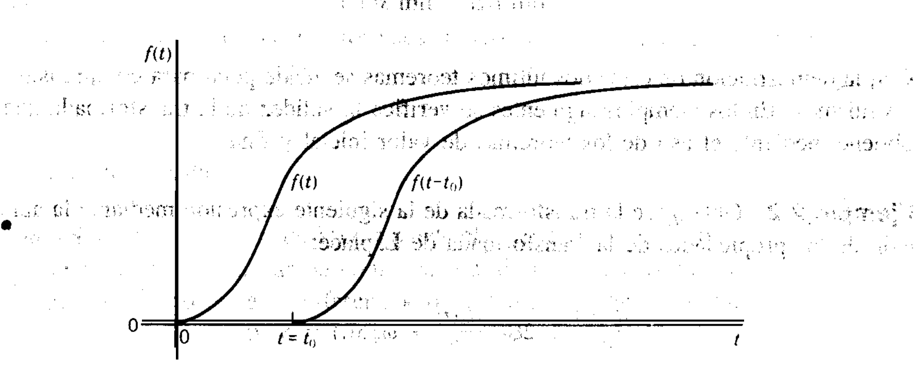


Figura 2-2. La función que se traslada **en tiempo es cero** para todos **los tiempos** menores al tiempo de retardo t_0.

Teorema de la traslación completa. Este teorema facilita la evaluación de la transformada de funcione9 que implican al tiempo como exponente.

$$\mathcal{L}\,[e^{at}f(t)] = F(s - a) \qquad s > \alpha + a \tag{2-10}$$

Demostración. De la definición de transformada de Laplace, ecuación (2-1), se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty e^{at}f(t)\,e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s-a)t}\,dt\end{aligned}$$

Sea $\sigma = s - a$, substituyendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\,dt \\ &= F(\sigma) = F(s - a) \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Teorema del valor final. Este teorema permite el cálculo del valor final o de estado estacionario de una función a partir de su transformada. También es útil para verificar la validez de la transformada que se obtiene. Si el límite $t \to \infty$ de $f(t)$ existe, se puede calcular a partir de la transformada de Laplace como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{2-11}$$

Teorema del valor inicial. Este teorema es útil para calcular el valor inicial de una función a partir de su transformada; además proporciona otra verificación de la validez de la transformada que se obtiene.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{2-12}$$

Con la demostración de estos dos últimos teoremas se añade poco para comprensión de los mismos. En los ejemplos siguientes se verifica la validez de la transformada que se obtiene mediante el uso de los teoremas de valor inicial y final.

Ejemplo 2-2. **Obténgase** la transformada de la siguiente expresión mediante la aplicación de las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2\,x(t) = Kr(t)$$

donde K, ω_n y ξ son constantes, y $x(0) = dx/dt(0) = 0$.

Solución. Al aplicar la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, ecuaciones (2-2) y (2-3), se obtiene la transformada de cada término; posteriormente se aplica el teorema de la diferenciación real, ecuación (2-5):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0) = s^2X(s)$$

$$\mathcal{L}\left[2\xi\omega_n \frac{dx(t)}{dt}\right] = 2\xi\omega_n \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$$

$$= 2\xi\omega_n [sX(s) - x(0)]$$

$$= 2\xi\omega_n sX(s)$$

$$\mathcal{L}[\omega_n^2 x(t)] = \omega_n^2 \mathcal{L}[x(t)] = \omega_n^2 X(s)$$

$$\mathcal{L}[Kr(t)] = K\mathcal{L}[r(t)] = KR(s)$$

De la substitución en la ecuación original se obtiene

$$s^2X(s) + 2\xi\omega_n sX(s) + \omega_n^2X(s) = KR(s)$$

resolviendo para X(s), se tiene

$$X(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}R(s)$$

En el ejemplo precedente se ilustra el hecho de que la transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial original en una ecuación algebraica, en esto estriba la gran utilidad de la transformada de Laplace, ya que el manejo de las ecuaciones algebraicas es mucho más fácil que el de las diferenciales. Sin embargo, el precio de esta ventaja, es que es necesario transformar y después invertir la transformada para obtener la solución en el "dominio del tiempo", esto es, con el tiempo como variable independiente.

Ejemplo 2-3. Obténgase la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$y(t) = te^{-at}$$

donde a es una constante.

Solución. -La transformada $Y(s)$ se puede obtener con el uso de una de dos propiedades: el teorema de diferenciación compleja o el de traslación compleja.

Aplicando el teorema de diferenciación compleja, ecuación (2-8), se obtiene

$$j''(f) = e^{-at} \qquad F(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \text{(de. la tabla 2-1)}$$

$$Y(s) = \mathscr{L}[te^{-at}] = \mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = -\left[-\frac{1}{(s+a)^2}\right]$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

Se puede obtener el mismo resultado mediante la **aplicación** del teorema de la traslación compleja, ecuación (2-10):

Sea

$$f(t) = t \qquad F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \text{(de la tabla 2-1)}$$

entonces

$$\mathscr{L}[e^{-at}\,t] = \mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F[s - (-a)]$$

$$= F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

Con esto se verifica el resultado anterior.

Ahora se comprueba la validez de la transformada mediante la aplicación de los teoremas del valor inicial y final.

Valor inicial

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0e^{-a(0)} = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{(s+a)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

De la regla de **L'Hopital**

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2(s+a)} = 0 \qquad \text{(se comprueba)}$$

Valor final

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{at}} = \frac{\infty}{\infty}$$

De la regla de **L'Hopital**

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{ae^{at}} = 0$$

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{(s+a)^2} = \frac{0}{a^2} = 0 \qquad \text{(se comprueba)}$$

Desafortunadamente cero no es una comprobación muy confiable, ya que no permite la detección de errores de signo.

Ejemplo 2-4. Obténgase la transformada de **Laplace** de la siguiente función en retardo de tiempo:

$$m(t) = u(t-3)\ e^{-(t-3)} \cos \omega(t-3)$$

donde ω es una constante.

Nota: En esta expresión se incluye el **término** $u(t-3)$ para aclarar **explícitamente** que la función vale cero cuando $t < 3$. **Recuérdese** que $u(t-3)$ es la función de escalón unitario en $t = 3$, la cual se puede escribir como

$$u(t-3) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, $u(t-3)$ no altera al resto de la función para $t \geq 3$.

***Solución.* Sea**

$$f(t-3) = e^{-(t-3)} \cos \omega(t-3)$$

entonces

$$f(t) = e^{-t} \cos \omega t$$

$$F(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + \omega^2} \qquad \text{(de la tabla 2-1)}$$

Por aplicación del teorema de la traslación real, ecuación (2-9)

$$M(s) = \mathcal{L}\,[u(t-3)\, f(t-3)]$$
$$= e^{-3s} F(s)$$

$$M(s) = \frac{(s+1)e^{-3s}}{(s+1)^2 + \omega^2}$$

Ahora se verifica la validez de este resultado mediante la aplicación de los teoremas del valor inicial y final.

Valor inicial

$$\lim_{t\to 0} m(t) = u(-3)\,(e^{+3})\cos(-3\omega) = 0$$

ya que $u(-3) = 0$

$$\lim_{s\to\infty} sM(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+1)\,e^{-3s}}{(s+1)^2+\omega^2} = \frac{\infty(0)}{\infty}$$

Se puede separar la parte indefinida y aplicar la regla de **L'Hopital**:

$$\lim_{s\to\infty} sM(s) = \left[\lim_{s\to\infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2+\omega^2}\right]\left[\lim_{s\to\infty} e^{-3s}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right][0]$$

$$= \left[\lim_{s\to\infty} \frac{2s+1}{2(s+1)}\right]\left[\lim_{s\to\infty} e^{-3s}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right][0]$$

$$= \left[\lim_{s\to\infty} \frac{2}{2}\right][0] = 0 \qquad \text{(se comprueba)}$$

Valor final

En principio, el teorema del valor final no se puede aplicar a las funciones, periódicas, debido a que dichas funciones oscilan siempre, sin llegar a alcanzar un punto estacionario; sin embargo, la aplicación del teorema del valor final a las funciones periódicas da por resultado el valor final alrededor del cual oscila la función.

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = (1)(0)\cos(\infty) = 0$$

$$\lim_{s\to 0} sM(s) = \frac{(0)(1)\,e^{0}}{1^2+\omega^2} = 0 \qquad \text{(se comprueba)}$$

Ejemplo 2-5. Obténgase la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$c(t) = [u(t) - e^{-t/\tau}]$$

En la que τ es una constante.

Solución. Aplicando la propiedad de linealidad, ecuación (2-3):

$$C(s) = \mathcal{L}\,[u(t) - e^{-t/\tau}]$$
$$= \mathcal{L}\,[u(t)] - \mathcal{L}\,[e^{-t/\tau}]$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \qquad \text{(de la tabla 2-1)}$$
$$C(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

Valor inicial

$$\lim_{t\to 0} c(t) = 1 - e^{0} = 0$$

$$\lim_{s\to \infty} sC(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s(\tau s + 1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \text{(se comprueba)}$$

Valor final

$$\lim_{t\to \infty} c(t) = 1 - e^{-\infty} = 1$$

$$\lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(\tau s + 1)} = 1 \qquad \text{(se comprueba)}$$

2-2. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE EL USO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para ilustrar el uso de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = bx(t) \qquad \text{(2-13)}$$

El problema de resolver esta ecuación se puede plantear como sigue: dados los coeficientes a_0, a_1, a_2 y b, las condiciones iniciales. apropiadas y la 'función x(t), encuéntrese la función y(t) que satisface la ecuación (2-13).

La función $x(t)$ se conoce generalmente como 'función de forzamiento" o variable de entrada, y y(r) como la "función de salida" o variable dependiente; la variable t, tiempo, es la variable independiente. Generalmente, en el diseño de los sistemas de control una ecuación diferencial como la (2-13) representa la forma en que se relaciona la señal de salida, y(t), con la señal de entrada, x(t), en un proceso particular.

Procedimiento de solución por la transformada de Laplace

La solución de una ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Laplace implica básicamente tres pasos:

Paso 1. Transformación de la ecuación diferencial en una ecuación algebraica con la variable s de la transformada de Laplace, lo cual se logra al obtener la transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left[a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t)\right] = \mathcal{L}\left[bx(t)\right] \tag{2-14}$$

Entonces, al usar la propiedad distributiva de la transformada, ecuación (2-2), y el teorema de la diferenciación real, ecuación (2-5), se ve que

$$\mathcal{L}\left[a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = a_2\left[s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}(0)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[a_1 \frac{dy(t)}{dt}\right] = a_1\left[sY(s) - y(0)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[a_0\, y(t)\right] = a_0\, Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left[b\, x(r)\right] = b\, X(s)$$

Posteriormente se substituyen estos términos en la ecuación (2-14) y se reordena:

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)\, Y(s) - (a_2s + a_1)\, y(0) - a_2 \frac{dy}{dt}(0) = b\, X(s)$$

Nótese que ésta es una ecuación algebraica y que la variable s de la transformada de Laplace se puede tratar como cualquier otra cantidad algebraica.

Paso 2. Se emplea la ecuación algebraica que se resuelve para la variable de salida Y(s), en términos de la variable de entrada y de las condiciones iniciales:

$$Y(s) = \frac{bX(s) + (a_2s + a_1)\, y(0) + a_2 \frac{dy}{dt}(0)}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{2-15}$$

Paso 3. Inversión de la ecuación resultante para obtener la variable de salida en función del tiempo y(t):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] \tag{2-16}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b\, X(s) + (a_2s + a_1)\, y(0) + a_2 \frac{dy}{dt}(0)}{a_2s^2 + a_1s + a_0}\right]$$

En este procedimiento los dos primeros pasos son relativamente fáciles y directos, todas las dificultades se concentran en el tercer paso. La utilidad de la transformada de Laplace en el diseño de sistemas de control tiene como fundamento el hecho de que rara vez es necesario el paso de inversión, debido a que todas las características de la respuesta en tiempo $y(t)$ se pueden reconocer en los términos de Y(s); en otras palabras, el análisis completo se puede hacer en el dominio de Laplace o en el "dominio s", sin invertir la transformada en el "dominio del tiempo". En la cláusula precedente se usa el término "dominio" para designar a la variable independiente del campo en el que se realiza el análisis y diseño.

En el paso de inversión se establece la relación entre la transformada de Laplace, Y(s), y su inversa, y(t). El paso de inversión se puede demostrar mediante el método de la expansión de fracciones parciales, sin embargo, primero se generalizará la ecuación (2-15) para el caso de una ecuación de orden n.

Para la ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n con coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x(t) \tag{2-17}$$

en condiciones iniciales cero.

$$y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0; \ldots; \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) = 0$$

$$x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0; \ldots; \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}(0) = 0$$

es fácil demostrar que la ecuación de la transformada de Laplace esta dada por

$$Y(s) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \right] X(s) \tag{2-18}$$

El caso de condiciones iniciales cero es el más común en el diseño de sistemas de control, ya que las señales se definen generalmente como desviaciones respecto a un estado inicial estacionario (ver sección 2-3). Cuando se hace esto, el valor inicial de la perturbación, por definición, es cero; los valores iniciales de las derivadas del tiempo son también cero, pues se supone que el sistema esta inicialmente en un estado estacionario; es decir, no cambia con el tiempo.

Función de *transferencia.* Si las variables X(s) y $Y(s)$ de la ecuación (2-18) son las respectivas transformadas de las señales de entrada y de salida de un proceso, instrumento o sistema de control, el término entre corchetes representa por definición, la *función de transferencia* del proceso, instrumento o sistema de control. Dicha función es la expresión que, al multiplicarse por la transformada de la señal de entrada, da como resulta-

do la transformada de la función de salida. La función de transferencia proporciona un mecanismo útil para el análisis del comportamiento dinámico y el diseño de sistemas de control. Se tratará con mayor detalle en el capítulo 3.

Inversión de la transformada de Laplace mediante expansión de fracciones parciales

El último paso en el proceso de solución de una ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace es la inversión de la ecuación algebraica de la variable de salida, Y(s), la cual se puede representar mediante

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \tag{2-19}$$

Puesto que éste es el paso más difícil del procedimiento de. solución, esta sección tiene por objetivo establecer la relación general entre la transformada de la variable de salida $Y(s)$ y su inversa y(t). Con este procedimiento se puede realizar el análisis de la respuesta del sistema mediante el análisis de su función transformada Y(s), sin tener que invertirla realmente. A continuación se establece la relación entre $Y(s)$ y $y(t)$ por medio del método de expansión de fracciones parciales, el cual fue introducido por primera vez por el físico británico Oliver Heaviside (1850-1925) como parte de su revolucionario "cálculo operacional".

Como se vio en la sección precedente, la transformada de Laplace de la salida o variable dependiente de una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes, se puede expresar mediante

$$Y(s) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}\right] X(s) \tag{2-18}$$

donde:

$Y(s)$ es la transformada de Laplace de la variable de salida
$X(s)$ es la transformada de Laplace de la variable, de entrada
$a_0, a_1, \dots, a_n$ son los coeficientes constantes de la variable de salida y sus derivadas
$b_0, b_1, \dots, b_m$ son los coeficientes constantes de la variable de entrada y sus derivadas.

Si se observa la tabla 2- 1, se puede ver que la transformada de Laplace de las funciones más comunes es una relación de polinomios en las variables de la transformada de Laplace. Si se supone que éste es el caso de X(s), se puede demostrar fácilmente que $Y(s)$ también es la relación de dos polinomios:

$$Y(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)\ [\text{numerador de } X(s)]}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)\ [\text{denominador dé } X(s)]} \tag{2-20}$$

$$= \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde:

$$N(s) = \beta_j s^j + \beta_{j-1} s^{j-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$
$$D(s) = s^k + \alpha_{k-1} s^{k-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j$ son los coeficientes constantes del polinomio numerador N(s) de grado $j (j \geq m)$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ son los coeficientes constantes del polinomio denominador $D(s)$ de grado k $(k \geq n)$

Nótese que se supuso que el coeficiente de s^k en $D(s)$ es la unidad, lo cual se puede hacer sin pérdida de la generalidad, ya que siempre es posible dividir el numerador y el denominador entre el coeficiente de s^k y cumplir con la ecuacion (2-20).

Se puede demostrar que la ecuación (2-20) también representa el caso en que la variable de salida responde a más de una función de forzamiento de entrada; sin embargo, no representa el caso en que el sistema o la señal de entrada. contengan retardos de tiempo (retardos de transporte o tiempos muertos). Con el; fin de simplificar, por el momento no se trata este caso tan importante, ya que se considera como especial al final de esta sección.

El primer paso de la expansión de fracciones parciales es la factorización del polinomio denominador $D(s)$:

$$D(s) = s^k + \alpha_{k-1} s^{k-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_k) \tag{2-21}$$

donde $r_1, r_2, \dots, r_k$ son las *raíces* del polinomio, es decir, los valoresde s que satisfacen la ecuación

$$D(s) = s^k + \alpha_{k-1} s^{k-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \tag{2-22}$$

Es conveniente recordar que un polinomio de grado k puede tener hasta k raíces distintas y, como se ve, siempre se puede factorizar de la manera que se muestra en la ecuación (2-21); se observa que, al hacer s igual a cualquiera de las raíces resultantes en uno de los factores $(s - r)$, éste se hace cero, y entonces $D(s) = 0$.

La substitución de la ecuación (2-21)' en la ecuación, (2-20) da como resultado

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_k)} \tag{2-23}$$

A partir de esta ecuación es posible demostrar que la transformada Y(s) se puede expresar como la suma de k fracciones:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \dots + \frac{A_k}{s - r_k} \tag{2-24}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son una serie de coeficientes constantes que se evalúan mediante: un procedimiento de series. Este paso se conoce como "expansión en fracciones parciales".

Una vez que se expande la transformada de la salida', como se hizo en la ecuación (2-24), se puede usar la propiedad distributiva de la transformada inversa para obtener la función inversa:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s-r_1} + \frac{A_2}{s-r_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-r_k}\right] \\ &= A_1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-r_1}\right] + A_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-r_2}\right] + \ldots A_k\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-r_k}\right] \end{aligned} \tag{2-25}$$

Las inversas individuales generalmente se pueden determinar mediante el uso de una tabla de transformadas de Laplace como la tabla 2- 1.

Para evaluar los coeficientes de las fracciones parciales y completar el proceso de inversión, se deben considerar cuatro casos:

1. Raíces reales no repetidas.
2. Pares no repetidos de raíces complejas conjugadas.
3. Raíces repetidas.
4. Presencia de tiempo muerto.

A continuación se expone cada uno de estos casos.

Caso 1. Raíces reales no repetidas

Para evaluar el coeficiente A_i de una fracción que contiene una raíz real no repetida r_i, se multiplican ambos miembros de la ecuación (2-24) por el factor $(s - r_i)$, lo que da como resultado la siguiente ecuación, después de reordenar:

$$(s - r_i)\, Y(s) = \frac{A_1(s - r_i)}{s - r_1} + \quad + A_i + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{A_k(s - r_i)}{s - r_k} \tag{2-26}$$

Nótese que, como la raíz r_i no se repite., no hay cancelación de los factores, a excepción de los de la fracción i. Al hacer $s = r_i$ en la ecuación (2-26), se obtiene la siguiente fórmula para el coeficiente A_i:

$$A_i = \lim_{s \to r} (s - r_i)\, Y(s) = \lim_{s \to r} (s - r_i) \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2-27}$$

Esta fórmula se utiliza para evaluar los coeficientes de todas las fracciones que contienen raíces reales no repetidas. La inversa de los términos correspondientes de Y(S) en la ecuación (2-25) es, según la tabla 2-1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_i}{s - r_i}\right] = A_i e^{r_i t} \tag{2-28}$$

Si todas las de $D(s)$ son raíces reales no repetidas, la función inversa es

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \ldots + A_k e^{r_k t} \tag{2-29}$$

A continuación se ilustra este procedimiento por medio de un ejemplo.

Ejemplo 2-6. De la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 5u(t)$$

en la que $u(t)$ es la función escalón unitario (ver ejemplo 2-la), encuéntrese la función c(t) que satisface a la ecuación para el caso en el que las condiciones iniciales son cero:

$$c(0) = 0; \qquad \frac{dc}{dt}(0) = 0$$

Solución.

Paso 1. Se obtiene la transformada de **Laplace** de la ecuación.

$$s^2C(s) + 3sC(s) + 2C(s) = 5U(s)$$

Paso 2. Se resuelve para C(s).

$$C(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}U(s)$$
$$= \frac{5}{s^2 + 3s + 2}\,\frac{1}{s}$$

$U(s) = 1/s$ se obtiene de la tabla 2-1.

Paso 3. Se invierte, C(s).

Las raíces del polinomio denominador son

$$s(s^2 + 3s + 2) = 0$$
$$r_1 = 0$$
$$r_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = -2, -1$$

o

$$s(s^2 + 3s + 2) = s(s + 1)(s + 2)$$

Se expande C(s) en fracciones parciales, lo cual da como resultado

$$C(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

De la ecuación (2-27) se tiene que

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{(1)(2)} = \frac{5}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1} (s+1) \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{(-1)(1)} = -5$$

$$A_3 = \lim_{s\to -2} (s+2) \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{(-2)(-1)} = \frac{5}{2}$$

o

$$C(s) = \frac{5/2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{5/2}{s+2}$$

Al invertir con ayuda de la tabla 2-1, se obtiene

$$c(t) = \frac{5}{2} u(t) - 5e^{-t} + \frac{5}{2} e^{-2t}$$

Caso 2. Pares no repetidos de raíces complejas conjugadas

Como se recordará, si los coeficientes de un polinomio son números reales, sus raíces son números reales o pares de números conjugados; complejos en otras palabras, si r_i es una raíz compleja de $D(s)$, entonces existe otra raíz compleja que es el conjugado de r_i, esto es, tiene las mismas partes real e imaginaria, pero de signo contrario. A fin de simplificar, se puede decir que estas dos raíces son r_1 y r_2:

$$r_1 = r + iw \qquad r_2 = r - iw$$

donde:

$i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números 'imaginarios
r es la parte real de r_1 y r_2
w es la parte imaginaria de r_1

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales de Y(s) es

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-r-iw)(s-r+iw)\ (s-r_k)} \tag{2-30}$$

$$= \frac{A_1}{s-r-iw} + \frac{A_2}{s-r+iw} + \cdots + \frac{A_k}{s-r_k}$$

Mediante el uso del álgebra de números complejos (ver sección 2-4), se puede aplicar la ecuación (2-27) para evaluar A_1 y A_2:

$$A_1 = \lim_{s \to r + iw} (s - r - iw)\, Y(s) \qquad (2\text{-}31)$$
$$A_2 = \lim_{s \to r - iw} (s - r + iw)\, Y(s)$$

Se puede demostrar que A_1 y A_2 son un par de números complejos conjugados:

$$A_1 = B + iC \qquad A_2 = B - iC \qquad (2\text{-}32)$$

donde B y C son la parte real e imaginaria de A_1, respectivamente.

Una vez que se determinó el valor de los coeficientes A_1 y A_2, se verá el inverso de estos términos; por el momento no se tomará en cuenta que son complejos. El inverso se obtiene mediante la aplicación de la ecuación (2-28):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s - r - iw}\right] = A_1 e^{(r + iw)t} = A_1 e^{rt} e^{iwt}$$
$$= A_1 e^{rt}(\cos wt + i \operatorname{sen} wt) \qquad (2\text{-}33)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_2}{s - r + iw}\right] = A_2 e^{(r - iw)t} = A_2 e^{rt} e^{-iwt}$$
$$= A_2 e^{rt}(\cos wt - i \operatorname{sen} wt) \qquad (2\text{-}34)$$

Aquí se utilizó la identidad del exponencial de un número imaginario puro:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad (2\text{-}35)$$

De la combinación de las ecuaciones (2-33) y (2-34) se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s - r - iw} + \frac{A_2}{s - r + iw}\right]$$
$$= e^{rt}\left[(A_1 + A_2)\cos wt + i(A_1 - A_2)\operatorname{sen} wt\right] \qquad (2\text{-}36)$$
$$= e^{rt}(2B \cos wt - 2C \operatorname{sen} wt)$$

en donde se utilizó la ecuación (2-32). Nótese que con esto se demuestra que la solución y(t) únicamente contiene coeficientes reales, ya que B y C son números reales.

Una forma más simple de la ecuación (2-36) es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s - r - iw} + \frac{A_2}{s - r + iw}\right] = 2\sqrt{B^2 + C^2}\, e^{rt} \operatorname{sen}(wt - \theta) \qquad (2\text{-}37)$$

donde

$$\theta = \tan^{-1} \frac{C}{B}$$

Se puede demostrar que las ecuaciones (2-36) y (2-37) son equivalentes, mediante la substitución de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(wt - \theta) = \operatorname{sen} wt \cos\theta - \cos wt \operatorname{sen}\theta$$
$$B = \sqrt{B^2 + C^2} \cos\theta$$
$$C = \sqrt{B^2 + C^2} \operatorname{sen}\theta$$

Es importante señalar que el argumento de la funciones seno y coseno en las ecuaciones *(2-36) y (2-37) está en radianes*, no en grados, debido a que las unidades de w son radianes por unidad de tiempo.

La parte real de las raíces complejas, r, aparece en el exponencial de tiempo e^{rt} de la solución final; y la parte imaginaria, w, en el argumento de las funciones seno y coseno. Los dos factores complejos conjugados se pueden combinar en un solo factor "cuadrático" (de segundo orden) como sigue:

$$\frac{B + iC}{s - r - iw} + \frac{B - iC}{s - r + iw} = \frac{2B(s - r) - 2Cw}{s^2 - 2rs + r^2 + w^2} = \frac{2B(s - r) - 2Cw}{(s - r)^2 + w^2} \qquad (2\text{-}38)$$

Nótese que el denominador de este factor cuadrático es comparable a uno de los dos últimos de la tabla 2-1, por la igualación de $a = -r$. ¿Cómo se iguala el numerador?

Ejemplo 2-7. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2 \frac{dc(t)}{dt} + 5c(t) = 3u(t)$$

cuyas condiciones iniciales cero son

$$c(0) = 0, \qquad dc/dt\,(0) = 0$$

encontrar, mediante el uso de la transformada de Laplace, la función c(t) que satisface a la ecuación.

Solución.

Paso 1. La transformada de Laplace de la ecuación es:

$$s^2C(s) + 2sC(s) + 5C(s) = 3U(s)$$

Paso 2. Se resuelve para C(s) y se substituye $U(s)$ de la tabla 2-1.

$$C(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 5}\,\frac{1}{s}$$

Paso 3. Se invierte C(s).
Las raíces de $(s^2 + 2s + 5)s = 0$ son

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm i2$$

$$r_3 = 0$$

La expansión en fracciones parciales da

$$C(s) = \frac{3}{(s + 1 - i2)(s + 1 + i2)s} = \frac{A_1}{s + 1 - i2} + \frac{A_2}{s + 1 + i2} + \frac{A_3}{s}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1+i2} (s + 1 - i2)\frac{3}{(s + 1 - i2)(s + 1 + i2)s} = \frac{3}{i4(-1 + i2)}$$

$$= \frac{3(-2 + i)}{4(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-6 + 3i}{20}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1-i2} (s + 1 + i2)\frac{3}{(s + 1 - i2)(s + 1 + i2)s} = \frac{3}{-i4(-1 - i2)}$$

$$= \frac{-3(2 + i)}{4(2 - i)(2 + i)} = \frac{-6 - 3i}{20}$$

$$A_3 = \lim_{s\to 0} s\frac{3}{(s + 1 - i2)(s + 1 + i2)s} = \frac{3}{5}$$

o

$$C(s) = \frac{(-6 + 3i)/20}{s + 1 - i2} + \frac{(-6 - 3i)/20}{s + 1 + i2} + \frac{3/5}{s}$$

Al invertir, con ayuda de las ecuaciones (2-36) y (2-37) y la tabla 2-1, se tiene

$$c(t) = e^{-t}\left(\frac{-3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{3}{5}u(t) = \frac{3\sqrt{5}}{10}e^{-t}\operatorname{sen}(2t - 2.678) + \frac{3}{5}u(t)$$

con $r = -1$, $\omega = 2$, $B = -3/10$, $C = 3/20$, $\theta = 2.678$ radianes,

Caso 3. Raíces repetidas.

La fórmula que se dio en los dos primeros casos no se puede utilizar para evaluar los coeficientes de las fracciones que contienen raíces repetidas. El procedimiento que se presenta aquí se aplica tanto para el caso donde las raíces repetidas son reales como para aquel en que son complejas.

La expansión en fracciones parciales de una transformada para la cual una raíz r_1 se repite *m veces* está dada por

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - r_1)^m \ldots (s - r_k)} \tag{2-39}$$
$$= \frac{A_1}{(s - r_1)^m} + \frac{A_2}{(s - r_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{s - r_1} + \ldots + \frac{A_k}{s - r_k}$$

Para evaluar los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_m$ se aplican en orden las siguientes fórmulas:

$$A_1 = \lim_{s \to r_1} [(s - r_1)^m Y(s)]$$
$$A_2 = \lim_{s \to r_1} \frac{d}{ds} [(s - r_1)^m Y(s)]$$
$$A_3 = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s - r_1)^m Y(s)] \tag{2-40}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$A_m = \lim_{s \to r_1} \frac{1}{(m - 1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s - r_1)^m Y(s)]$$

Una vez que se evalúan los coeficientes, la inversión de la ecuación (2-39) con el uso de la tabla 2-1 da como resultado lo siguiente:

$$y(t) = \left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m - 1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m - 2)!} + \ldots + A_m\right] e^{r_1 t} + \ldots + A_k e^{r_k t} \tag{2-41}$$

Para el raro caso de los pares repetidos de raíces complejas conjugadas se puede ahorrar trabajo si se considera que los coeficientes son pares de complejos conjugados. De la ecuación (2-32) se tiene

$$A_1 = B_1 + iC_1 \qquad A_1^c = B_1 - iC_1$$

donde A_1^c es el conjugado de A_1.

Por lo tanto, de la combinación de la ecuación (2-36) y (2-41) se puede escribir

$$y(t) = e^{\sigma t}\left\{\left[\frac{2B_1 t^{m-1}}{(m - 1)!} + \frac{2B_2 t^{m-2}}{(m - 2)!} + \ldots + 2B_m\right] \cos \omega t - \left[\frac{2C_1 t^{m-1}}{(m - 1)!} + \frac{2C_2 t^{m-2}}{(m - 2)!} + \ldots + 2C_m\right] \operatorname{sen} \omega t\right\} + \ldots + A_k e^{r_k t} \tag{2-42}$$

Ejemplo 2-8. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2c(t)}{dt} + 3\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = 2u(t)$$

con condiciones iniciales cero

$$c(0) = 0; \qquad \frac{dc}{dt}(0) = 0; \qquad \frac{d^2c}{dt^2}(0) = 0$$

encontrar, mediante la aplicación del método de transformada de **Laplace,** la función c(t) que satisface a la ecuación.

Solución.

Paso 1. Se transforma la **ecuación.**

$$s^3\,C(s) + 3s^2\,C(s) + 3s\,C(s) + C(s) = 2U(s)$$

Paso 2. Se resuelve para $C(s)$ y se substituye $U(s)$ de la tabla 2-1.

$$C(s) = \frac{2}{(\$3 + 3s^2 + 3s + 1)}\frac{1}{s}$$

Paso 3. Se invierte para **obtener** $c(t)$.
Las **raíces** son:

$$(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)\,s = 0$$
$$r_{1,2,3} = -1,\ -1,\ -1$$
$$r_4 = 0$$

Se expande en fracciones parciales

$$C(s) = \frac{2}{(s+1)^3 s} = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{A_4}{s}$$

Se evalúan los coeficientes mediante el uso de la ecuación (2-40):

$$A_1 = \lim_{s \to -1}\left[(s+1)^3 \frac{2}{(s+1)^3 s}\right] = -2$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{2}{(s+1)^3 s}\right] = \lim_{s \to -1}\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s}\right]$$

$$= \lim_{s \to -1}\left[-\frac{2}{s^2}\right] = -2$$

$$A_3 = \lim_{s \to -1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{2}{(s+1)^3 s}\right] = \lim_{s \to -1}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[-\frac{2}{s^2}\right]$$

$$= \lim_{s \to -1}\frac{1}{2}\left[\frac{4}{s^3}\right] = -2$$

$$A_4 = \lim_{s \to 0} s \frac{2}{(s+1)^3 s} = 2$$

$$C(s) = -\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{s}$$

Al invertir, con ayuda de la ecuación (241) y de la tabla 2-1, se obtiene

$$c(t) = -[t^2 + 2t + 2]\, e^{-t} + 2u(t)$$

Nótese que con el uso de la tabla 2-1 se puede obtener el mismo resultado mediante la inversión directa de cada término.

Caso 4. Tiempo muerto

El uso de la técnica de expansión en fracciones parciales se restringe a los casos en que la transformada de Laplace se puede expresar como una relación de dos polinomios. Como se vio en el teorema de traslación real, ecuación (2-9), cuando la transformada de Laplace contiene tiempo muerto (retardo de transporte o tiempo de retraso), en la función transformada aparece el término exponencial e^{-st_0}, donde t_0 es el tiempo muerto y, puesto que el exponencial es una función trascendental, el procedimiento de inversión se debe modificar de manera apropiada.

Si la función exponencial aparece en el denominador de la transformada de Laplace, no se puede hacer la inversión por expansión en fracciones parciales, porque ya no se tiene un número finito de raíces y, en consecuencia, habrá un número infinito de fracciones en la expansión. Por otro lado, los términos exponenciales en el numerador se pueden manejar, como se verá enseguida.

Considérese primeramente el caso en que la transformada de Laplace consta de un termino exponencial que se multiplica por la relación de dos polinomios:

$$Y(s) = \left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] e^{-st_0} = Y_1(s) e^{-st_0} \tag{2-43}$$

El procedimiento consiste en expandir en fracciones parciales únicamente la relación de los polinomios.

$$Y_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_k}{s - r_k} \tag{2-44}$$

Para esta expansión se requiere la aplicación de alguno de los tres primeros casos; a continuación se invierte la ecuación (2-44) para obtener

$$Y_1(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \ldots + A_k e^{r_k t}$$

Para invertir la ecuación (2-43) se hace uso del teorema de traslación real, ecuación (2-9).

$$Y(s) = e^{-st_0}\, Y_1(s) = \mathcal{L}\,[y_1(t - t_0)] \tag{2-45}$$

Al invertir esta ecuación resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\,[Y(s)] = y_1(t - t_0) \\ &= A_1 e^{r_1(t-t_0)} + A_2 e^{r_2(t-t_0)} \cdots + A_k e^{r_k(t-t_0)} \end{aligned} \tag{2-46}$$

Es importante subrayar el efecto de la eliminación del término exponencial del procedimiento de expansión en fracciones parciales; si se expande la función original, ecuación (2-43), se obtiene

$$Y(s) = \frac{A_1 e^{-r_1 t_0}}{s - r_1} + \frac{A_2 e^{-r_2 t_0}}{s - r_2} + \ldots + \frac{A_k e^{-r_k t_0}}{s - r_k}$$

A pesar de que parece funcionar en ciertos casos, esto es fundamentalmente ***incorrecto.***

A continuación se considera el caso de múltiples retardos, lo que introduce más de una función exponencial en el numerador de la transformada de Laplace, cuyo procedimiento implica manejar la función algebraicamente como una suma de términos, de manera que cada uno comprenda el producto de un exponencial por la relación de dos polinomios.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left[\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\right] e^{-st_{01}} + \left[\frac{N_2(s)}{D_2(s)}\right] e^{-st_{02}} + \ldots \\ &= [Y_1(s)]\, e^{-st_{01}} + [Y_2(s)]\, e^{-st_{02}} + \ldots \end{aligned} \tag{2-47}$$

Porteriormente se expande cada relación de polinomios en fracciones parciales y se invierte para obtener un resultado de la forma

$$y(t) = y_1(t - t_{01}) + y_2(t - t_{02}) + \ldots \tag{2-48}$$

Los retardos múltiples pueden ocurrir cuando el sistema se sujeta a diferentes funciones de forzamiento, cada una con diferente periodo de retardo.

Ejemplo 2-9. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = f(t)$$

con c(O) = 0, encontrar la respuesta de salida para:

a) El cambio de un escalón unitario-'en $t = 1$: $f(t) = u(t - 1)$

b) Una función secuencial de escalones unitarios que se repiten cada unidad de tiempo

$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + \cdots$$

Estas funciones se muestran en la figura 2-3.

Solución.

Paso 1. Se transforma la ecuación diferencial y la función de entrada:

$$sC(s) + 2C(s) = F(s)$$

Se utilizan el teorema de la traslación real y la tabla 2-1, de donde se obtiene

$$\text{(a)} \quad F(s) = \mathcal{L}[u(t-1)] = e^{-s}\frac{1}{s}$$

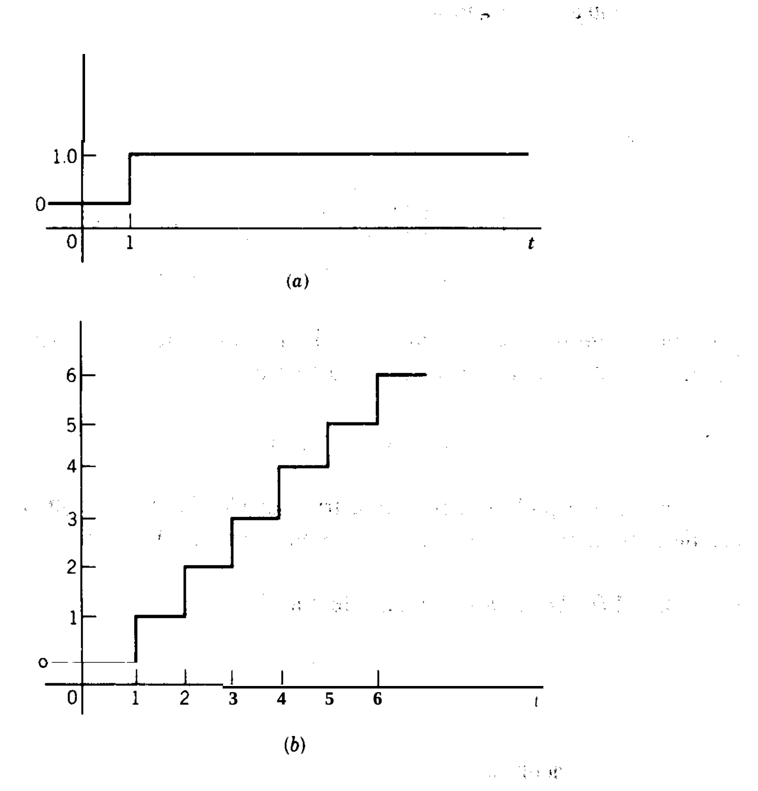


Figura 2-3. Funciones de entrada para el ejemplo 2-9. a) Escalón unitario con retardo. *b)* Secuencia de escalones unitarios.

$$\text{(b)}\quad F(s) = \mathcal{L}[u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + \ldots]$$
$$= \frac{1}{s}(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \ldots)$$

Paso 2. Se resuelve para C(s).

$$C(s) = \frac{1}{s+2}F(s)$$

Paso 3. Se invierte para obtener c(t).

$$\text{(a)}\quad C(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s}e^{-s} = C_1(s)e^{-s}$$

$$C_1(s) = \frac{1}{(s+2)s} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{(s+2)s} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{(s+2)s} = \frac{1}{2}$$

$$C_1(s) = -\frac{1/2}{s+2} + \frac{1/2}{s}$$

Se invierte para obtener

$$c,(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}u(t)$$

Se aplica la ecuación (2-46):

$$c(t) = c_1(t-1) = \frac{1}{2}u(t-1)[1 - e^{-2(t-1)}]$$

Nótese que el escalón unitario $u(t-1)$ se debe multiplicar también por el término exponencial, para indicar que c(r) = 0 cuando $t < 1$.

b) Para la función escalera se ve que

$$C(s) = \left[\frac{1}{s+2}\frac{1}{s}\right](e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \ldots)$$
$$= C_1(s)e^{-s} + C_1(s)e^{-2s} + C_1(s)e^{-3s} + \ldots$$

Es notorio que C,(s) es la misma de la parte (*a*) y, por tanto, el resultado de los pasos de expansión e inversión es el mismo. De la aplicación de la ecuación (2-46) a cada miembro resulta

$$c(t) = c_1(t-1) + c_1(t-2) + c_1(t-3) + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}u(t-1)[1-e^{-2(t-1)}] + \frac{1}{2}u(t-2)[1-e^{-2(t-2)}]$$
$$+ \frac{1}{2}u(t \quad 3)[1-e^{-2(t-3)}] + .$$

Si ahora se desea evaluar la función en $t = 2.5$, la respuesta es

$$c(2.5) = \frac{1}{2}(1)[1-e^{-2(2.5-1)}] + \frac{1}{2}(1)[1-e^{-2(2.5-2)}]$$
$$+ \frac{1}{2}(0)[1-e^{-2(2.5-3)}] + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(0.950) + \frac{1}{2}(0.632) = 0.791$$

Nótese que, después de los dos primeros, todos los términos son cero.

En la tabla 2-2 se resumen los cuatro casos precedentes. Puesto que con todos estos casos se cubren esencialmente todas las posibilidades de solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, la correspondencia uno a uno en la tabla 2-2 hace innecesaria la inversión real de la transformada de **Laplace** de la variable dependiente, debido a que generalmente se pueden reconocer los términos de la función del tiempo *y(t)* en la transformada de **Laplace** Y(s).

Tabla 2-2 Relación entre la transformada de **Laplace** $Y(s)$ y su inversa y(t).,

Denominador de Y(s)	*Término de la fracción parcial*	*Término de y(t)*
1. **Raíz** real no repetida	$\frac{A}{s-r}$	Ae^{rt}
2. Par de raíces complejas conjugadas	$\frac{B(s-r)+Cw}{(s-r)^2+w^2}$	$e^{rt}(B\cos wt + C \text{ sen } wt)$
3. **Raíz** real que se repite *m* veces	$\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{(s-r)^j}$	$e^{rt}\sum_{j=1}^{m}A_j\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$
Término de tiempo muerto en el numerador de $Y(s)$		**Término** de y(t)
4. $Y_1(s)e^{-t_0 s}$		$y_1(t-t_0)$

Eigenvalores y estabilidad

Al revisar la tabla 2-2 es evidente que las raíces del denominador de la transformada de Laplace $Y(s)$ determinan la respuesta y(t); también se puede ver que, de la ecuación (2-20), algunas de las raíces del denominador de $Y(s)$ son las de la siguiente ecuación:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{2-49}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes, de, la variable dependiente y sus derivadas en la ecuación diferencial (2-17). El balance. de las raíces del polinomio denominador provienen de la función de entrada o de forzamiento X(s).

Se dice que la ecuación (2-49) es la *ecuación característica* de la ecuación diferencial y del sistema cuya respuesta dinámica representa. Sus raíces se conocen como eigenvalores (del alemán *eigenvalues*, que significa valores "característicos" o "propios") de la ecuación diferencial, y cuyo significado es que son, por definición, característicos de la ecuación diferencial e independientes de la función de forzamiento de entrada. En la tabla 2-2 se puede ver que los eigenvalores determinan si la respuesta en tiempo va a ser monótona (casos 1 y 3) u oscilatoria (caso 2), independientemente de que la función de forzamiento tenga o no tales características. Nótese que en el caso 2 las funciones seno y coseno causan las respuesta oscilatoria (ver figura 2-1). Los eigenvalores también determinan si la respuesta es *estable o* no es estable.

Se dice que una ecuación diferencial *es estable* cuando su respuesta en tiempo permanece limitada (finita) para una función de forzamiento limitante. En la tabla 2-2 se ve que para que se cumpla esta condición a fin de mantener la estabilidad, *todos los eigenvulores deben tener partes reales r negutivus,* debido a que el término e^{rt} aparece en ca& uno de los términos de la posible respuesta; y, para que este término exponencial permanezca finito conforme se incrementa el tiempo, r debe ser negativa (en cada caso r es, o bien la raíz real o la parte real de la raíz). La estabilidad se tratará con más detalle en el capítulo 6, cuando se estudie la respuesta de los sistemas de control por retroalimentación.

Raíces de los polinomios

La operación que más tiempo requiere en la inversión es encontrar las raíces del polinomio denominador, D(s), cuando éste es de tercer grado o superior, debido a que el procedimiento para encontrar las raíces es un procedimiento iterativo o de ensayo y error. Como el tiempo es valioso, es importante utilizar métodos eficientes para encontrar las raíces del polinomio; tres de los mttodos más eficaces son:

1. Método de Newton para raíces reales.
2. Método de Newton-Bairstow para rafces reales y complejas conjugadas.
3. Método de Müller para raíces complejas y reales.

De éstos, el método de Newton es el más conveniente para el cálculo manual, especialmente cuando se combina con el de multiplicaciones anidadas para evaluar el polino-

mio y su derivada. Este método funciona mientras no existe más que un par de raíces complejas conjugadas.

El método Newton-Bairstow se usa generalmente para encontrar factores cuadráticos (factores polinómicos de segundo grado) del polinomio con calculadoras programables. A partir de los coeficientes de cada factor cuadrático se pueden encontrar dos rafces, que pueden ser reales o un par de complejas conjugadas.

El método de Müller[1] es el mas eficiente para encontrar las rafces, reales o complejas de cualquier función, sin embargo, el calculo que implica es complicado, por lo que se debe usar la aritmética de números complejos para encontrar las raíces complejas. Por tal razón este método es recomendable cuando se usa una computadora para calcular las raíces. En el apéndice D se lista un programa en FORTRAN para encontrar las rafces de un polinomio mediante el método de Müller. El algoritmo para el método de Newton-Bairstow se describe en cualquier texto completo de métodos numéricos[2,3]. Aquí se restringe la presentación al método de Newton.

El problema de encontrar las rafces de un polinomio se puede plantear como signe: Dado el polinomio de grado n

$$f_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \tag{2-50}$$

encuéntrense todas sus raíces, esto es, todos los valores de s que satisfacen la ecuación

$$f_n(s) = 0$$

Los tres pasos básicos que se requieren para resolver este problema por iteración de ensayo y error son los siguientes:

1. Se supone una aproximación inicial s_0 a la raíz.
2. Se calcula una mejor aproximación s_k.
3. Se verifica la convergencia dentro de una tolerancia de error especificado; si no esta dentro de la tolerancia, se repiten los pasos 1 y 2 hasta que se alcanza la convergencia.

Después de que el procedimiento converge con el valor r_1, se toma este valor como la primera raíz y se determina el polinomio de grado $n - 1$ mediante

$$f_{n-1}(s) = \frac{f_n(s)}{s - r_1} \tag{2-51}$$

Entonces se repite el procedimiento iterativo para $f_{n-1}(s)$ y se encuentra la segunda raíz r_2; después, para $f_{n-2}(s)$, a fin de encontrar r_3; y así, sucesivamente, hasta encontrar las n raíces. El polinomio $f_{n-2}(s)$ se conoce como "polinomio reducido".

La diferencia básica entre los diferentes métodos de iteración es la fórmula que se utiliza en el paso 2 'del procedimiento de iteración para mejorar la aproximación a la raíz que se busca.

Método de Newton. La fórmula de iteración para el método de Newton esta dada por

$$s_{k+1} = s_k - \frac{f(s_k)}{f'(s_k)} \tag{2-52}$$

donde:

s_k es la aproximación previa a' la raíz
s_{k+1} es la nueva aproximación
$f(s_k)$ es el valor del polinomio en s_k
$f'(s_k) = \frac{df}{ds}(s_k)$

Esta fórmula es muy eficaz en términos de la cantidad de iteraciones que se requieren para aproximar la raíz con una cierta tolerancia de error; sin embargo, se necesita evaluar el polinomio y su derivada en ca& iteración, mientras que en otros métodos sólo se requiere evaluar la función a cada iteración (por ejemplo, secante, Müller). A pesar de todo, el método de Newton puede ser eficaz para polinomios cuando se utiliza el método de multiplicaciones anidadas para evaluar el polinomio y su derivada.

Multiplicaciones anidadas[3]. Para evaluar el polinomio de grado n de la ecuación (2-49) y su derivada en $s = s_k$, se utiliza el método de las multiplicaciones anidadas o división sintética, el cual consiste en el siguiente procedimiento; en el que a_i son los coeficientes del polinomio y b_i y c_i son los dos conjuntos de variables que se usan para el cálculo:

1. Para $b_n = a_n$ y $c_n = b_n$.
2. Para $i = n - 1, n - 2, \ldots, 1, 0$, sea $b_i = a_i + b_{i+1}s_k$.
3. Para $i = n - 1, n - 2, \ldots, 1$, sea $c_i = b_i + c_{i+1}s_k$.

Entonces

$$f(s_k) = b_0$$
$$f'(s_k) = c_1$$

Por lo tanto, los valores del polinomio y su derivada se calculan con sólo efectuar $2n - 1$ multiplicaciones y sumas; en comparación, en la evaluación directa del polinomio y su derivada se requieren n^2 multiplicaciones y $2n - 1$ sumas. Para un polinomio de quinto grado, con el método de multiplicaciones anidadas se requieren 9 multiplicaciones por iteración, en lugar de ¡25!

Además del significativo ahorro en cálculo, con el método de multiplicaciones anidadas se tiene la ventaja de que, cuando ya se ha encontrado la raíz, el polinomio reducido de grado $(n - 1)$ esta dado por

$$f_{n-1}(s) = b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + bjs + b_1 \qquad \textbf{(2-53)}$$

Con esto se elimina la necesidad de hacer la división de la ecuación (2-51) después de encontrar cada raíz.

Ejemplo 2-10. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 4c(t) = 4\delta(t)$$

donde S(t) es la función de impulso unitario en $t = 0$; y, dado que todas las condiciones iniciales son cero:

$$c(0) = 0; \qquad \frac{dc}{dt}(0) = 0; \qquad \frac{d^2c}{dt^2}(0) = 0$$

encuéntrese la respuesta $c(t)$ mediante la transformada de Laplace.

Solución.

Paso 1. Se transforman la ecuación diferencial y la función de entrada.

$$s^3C(s) + 2s^2C(s) + 3sC(s) + 4C(s) = 4\mathscr{L}[\delta(t)]$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1 \qquad \text{(de la tabla 2-1)}$$

Paso 2. Se resuelve para C(s)

$$C(s) = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

Para factorizar el polinomio es necesario encontrar sus raíces

$$f(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$$

Procedimiento de iteración de Newton

Aproximación inicial $s_0 = -1$

Iteración 1

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_0 = -1$		$b_3 s = \underline{-1}$	$b_2 s = \underline{-1}$	$b_1 s = \underline{-2}$
	$b_3 = 1$	$b_2 = 1$	$b_1 = 2$	$b_0 = 2 = f(-1)$
$s_0 = -1$		$c_3 s = \underline{-1}$	$c_2 s = 0$	
	$c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 = -2 = f'(-1)$	

$s_2 = -1 - (2/2) = -2$

Iteración 2

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_1 = -2$		-2	0	-6
	$b_3 = 1$	$b_2 = 0$	$b_1 = 3$	$b_0 = -2 = f(-2)$
$s_1 = -2$		-2	4	
	$c_3 = 1$	$c_2 = -2$	$c_1 = 7 = f'(-2)$	

$s_2 = -2 \quad (-2/7) = -1.714$

Iteración 3

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_2 = -1.714$		-1.714	-0.490	-4.303
	$b_3 = 1$	$b_2 = 0.286$	$b_1 = 2.510$	$b_0 = -0.303 = f(-1.714)$
$s_2 = 1.714$		-1.714	2.448	
	$c_3 = 1$	$c_2 = -1.428$	$c_1 = 4.958 = f'(-1.714)$	

$s_3 = -1.714 - (-0.303/4.958) = 1.653$

Iteración 4

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_3 = -1.653$		-1.653	-0.573	-4.012
	$b_3 = 1$	$b_2 = 0.347$	$b_1 = 2.427$	$b_0 = -0.012 = f(-1.653)$
$s_3 = -1.653$		-1.653	2.159	
	$c_3 = 1$	$c_2 = -1.306$	$c_1 = 4.586 = f'(-1.653)$	

$s_4 = -1.653 - (-0.012/4.586) = 1.651$

Iteración 5

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_4 = -1.651$		-1.651	-0.577	-4
	$b_3 = 1$	$b_2 = 0.349$	$b_1 = 2.423$	$b_0 = 0 = f(-1.651)$

Puesto que la función del polinomio es cero, no hay necesidad de calcular la derivada después de la última iteración.

Por lo tanto, la primera raíz es $r_1 = -1.651$

De la ecuación **(2-53)**, se tiene que el polinomio reducido está dado por

$$f_2(s) = s^2 + 0.349s + 2.423$$

Nótese que los coeficientes son las *b* que se calculan en la iteración 5. Las raíces de este polinomio se pueden encontrar mediante el uso de la fórmula cuadrática

$$r_{2,3} = \frac{-0.349 \pm \sqrt{0.1218 - 4(2.423)}}{2} = -0.174 \pm i1.547$$

Entonces

$$C(s) = \frac{4}{(s + 1.651)(s + 0.174 - i1.547)(s + 0.174 + i1.547)}$$

$$= \frac{A_1}{s + 1.651} + \frac{A_2}{s + 0.174 - i1.547} + \frac{A_3}{s + 0.174 + i1.547}$$

$$A_1 = 0.875$$

$$A_2 = -0.437 - i0.417$$

$$A_3 = -0.437 + i0.417$$

$$C(s) = \frac{0.875}{s + 1.651} + \frac{-0.437 - i0.417}{s + 0.174 - i1.547} + \frac{-0.437 + i0.417}{s + 0.174 + i1.547}$$

Al invertir se obtiene

$$c(t) = 0.875e^{-1.651t} + e^{-0.174t} \cdot [-0.874 \cos (1.547t) + 0.834 \sin (1.547t)]$$

Resumen del método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales

El procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales mediante la utilización de la transformada de Laplace y de la expansión de fracciones parciales se resume como sigue.

Se tiene una ecuación diferencial de orden *n*, de la forma de la ecuación (2-17), con variable de salida y(t) y variable de entrada $x(t)$.

Paso 1. Con la transformada de Laplace se convierte la ecuación, término a término, en una ecuación algebraica en Y(s) y X(s).

Paso 2. La transformada de Laplace de la variable de salida Y(s) se resuelve algebraicamente y se substituye la transformada de la variable de entrada X(s), para obtener una relación de dos polinomios:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2-20}$$

Paso 3. Se invierte mediante la expansión en fracciones parciales, de la siguiente manera:

a) Se encuentran las raíces del denominador de $Y(s)$ mediante un método como el de Newton (subsección anterior) o un programa de computadora (apéndice D).
b) Se factoriza el denominador

$$D(s) = (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_k) \tag{2-21}$$

c) Se expande la transformada en fracciones parciales.,

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \ldots + \frac{A_k}{s - r_k} \tag{2-24}$$

donde:

$$A_i = \lim_{s \to r_i} (s - r_i) \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2-27}$$

si ninguna de las raíces, reales o complejas, se repite. Si existen raíces repetidas, entonces los coeficientes correspondientes se deben evaluar mediante el uso del sistema de fórmulas que constituye la ecuación (2-40).
d) Se invierte la ecuación (2-24) con ayuda de una tabla de transformadas de Laplace (tabla 2-1 o 2-2). Para raíces no repetidas la solución es de la forma

$$y(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \ldots + A_k e^{r_k t} \tag{2-29}$$

Para el caso de raíces complejas conjugadas, la solución tiene la forma de las ecuaciones (2-36) o (2-37). En cuanto al caso de raíces repetidas, la solución tiene la forma de las ecuaciones (2-41) o (2-42).

Si existe tiempo muerto en el numerador, el procedimiento se altera como se indica en las ecuaciones (2-47) y (2-48).

Afortunadamente, cuando se diseñan sistemas de control se puede evitar la mayor parte de este procedimiento de inversión, porque, como se indica en la tabla 2-2, los términos del tiempo de respuesta se pueden reconocer en los términos del denominador de la transformada de Laplace; sin embargo, para usar la transformada de Laplace, las ecuaciones que representan los procesos y los instrumentos deben ser lineales, pero como generalmente éste no es el caso, a continuación se aborda dicho problema.

2-3. LINEALIZACIÓN Y VARIABLES DE DESVIACIÓN

Al analizar la respuesta dinámica de los procesos industriales, una de las mayores dificultades es el hecho de-que no es lineal, es decir, no se puede representar mediante ecuaciones lineales. Para que una ecuación sea lineal, cada uno de sus términos no debe contener más de una variable o derivada y ésta debe estar a la primera potencia. Desafortunada-

mente, con la transformada de **Laplace,** poderosa herramienta que se estudió en la sección precedente, **únicamente** se pueden analizar sistemas lineales. Otra dificultad es que no existe una técnica conveniente para analizar un sistema no lineal, de tal manera que se pueda generalizar para una amplia variedad de sistemas **físicos.**

En esta sección se estudia la técnica de ***linealización,*** mediante la cual es posible aproximar las ecuaciones no lineales que representan un proceso a ecuaciones lineales que se pueden analizar mediante transformadas de **Laplace.** La **suposición básica** es que la respuesta de la aproximación lineal representa la respuesta del proceso en la región cercana al punto de operación, alrededor del cual se realiza la **linealización.**

El manejo de las ecuaciones linealizadas se facilita en gran medida con la utilización de las ***variables de desviación o perturbación,*** mismas que se definen a continuación.

Variables de desviación

La variable de desviación se define como la diferencia entre el valor de la variable o señal y su valor en el punto de operación:

$$X(t) = x(r) - \bar{x} \qquad (2\text{-}54)$$

donde:

$X(t)$ es la variable de desviación
$x(t)$ es la variable absoluta correspondiente
$\bar{x}$ es el valor de x en el punto de operación (valor base)

En otras palabras, la variable de desviaciónes la **desviación** de una variable respecto a su valor de operación o base. Como se ilustra en la figura 2-4, la transformación del valor absoluto de una variable al de desviación, equivale a mover el cero sobre el eje de esa variable hasta el valor base.

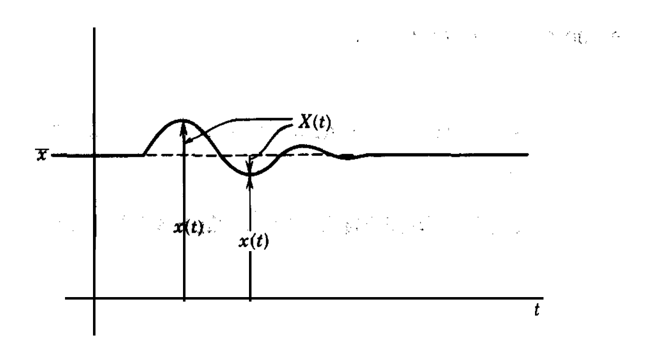


Figura 2-4. **Definición** de variable de desviación.

Puesto que el valor base de la variable es una constante, las derivadas de las variables de desviación son siempre iguales a las derivadas correspondientes de las variables:

$$\frac{d^nX(t)}{dt^n} = \frac{d^nx(t)}{dt^n} \quad \text{para } n = 1, 2, \text{etc.} \qquad (2\text{-}55)$$

La ventaja principal en la utilización de variables de desviación se deriva del hecho de que el valor base $\bar{x}$ es generalmente, el *valor inicial* de la variable. Además, el punto de operación está generalmente en estado *estacionario*; es decir, las condiciones iniciales de las variables de desviación y sus derivadas son todas cero:

$$x(0) = \bar{x} \qquad X(0) = 0$$

También

$$\frac{d^nX}{dt^n}(0) = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \text{etc.}$$

Entonces, para obtener la transformada de Laplace de cualquiera de las derivadas de las variables de desviación se aplica la ecuación (2-6):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nX(t)}{dt^n}\right] = s^nX(s)$$

donde X(s) es la transformada de Laplace de la variable de desviación.

Otra característica importante del caso en que todas las variables de desviación son desviaciones de las condiciones iniciales de estado estacionario, es que en las ecuaciones diferenciales linealizadas se excluyen los términos constantes. A continuación se demuestra esto brevemente.

Linealización de funciones con una variable

Considérese la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] + k \qquad (2\text{-}56)$$

donde $f[x(t)]$ es una función no lineal de x, y k es una constante. La expansión por series de Taylor de $f[x(t)]$, alrededor del valor $\bar{x}$, está dada por

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}]^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}]^3 + \ldots \qquad (2\text{-}57)$$

La **aproximación lineal** consiste en eliminar todos los términos de la serie, con excepción de los dos primeros:

$$f[x(t)] \doteq f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}] \tag{2-58}$$

y, al substituir, la definición de variable de desviación .X(f) de la ecuación (2-54);

$$f[x(t)] \doteq f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})X(t) \tag{2-59}$$

En la figura 2-5 se da la interpretación gráfica de esta aproximación. La aproximación lineal es una línea recta que pasa por el punto $[\bar{x}, f(\bar{x})]$, con pendiente $df/dx\ (\bar{x})$; esta línea es, por definición, tangente a la curva $f(x)$ en $\bar{x}$. Nótese que la diferencia entre la aproximación lineal y la función real es menor en las cercanías del punto de operación $\bar{x}$, y mayor cuando se aleja de éste. Es difícil definir la región en que la aproximación lineal es lo suficientemente precisa como para representar la función no lineal; tanto más alineal es una función cuanto menor es la región sobre la que la aproximación lineal es precisa.

De la substitución de la ecuación (2-59) de aproximación lineal en la ecuación (2-56) resulta

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})X(t) + k \tag{2-60}$$

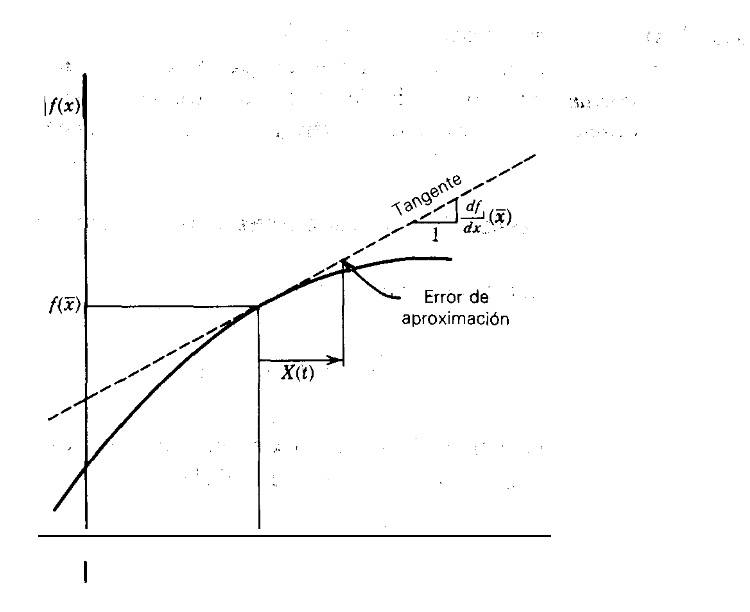


Figura 2-5. La aproximación lineal es tangente a la función en el punto de operación.

Si las condiciones iniciales son

$$x(0) = \bar{x} \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \qquad X(0) = 0$$

entonces

$$0 = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})\,(0) + k$$

o

$$f(\bar{x}) + k = 0$$

Al substituir en la ecuación **(2-58),** se tiene

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{df}{dx}(\bar{x})X(t) \qquad (2\text{-}61)$$

Con esto se demuestra cómo se eliminan los **términos** constantes de la ecuación **linealiza**da cuando el valor base es la condición inicial de estado estacionario. Nótese que es posible omitir todos los pasos intermedios **y llegar** directamente de la ecuación (2-56) a la ecuación (2-6 1).

Los siguientes son ejemplos **de** algunas funciones no lineales más usuales en los modelos de proceso:

1. Dependencia de Arrhenius de la tasa de reacción de **la temperatura.**

   $$k(T) = k_0 e^{-(E/RT)}$$

   donde k_0, E y R son constantes.

2. Presión de vapor de una substancia **pura** (ecuación de Antoine).

   $$p^0(T) = e^{[A-B/(T+C)]}$$

   donde A, B y C son constantes.

3. Equilibrio vapor-líquido por volatilidad relativa.

   $$y(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

   donde α es una constante.

4. Caída de presión a través de accesorios y **tuberías.**

   $$\Delta P(F) = kF^2$$

   donde k es una constante.

5. Razón de transferencia de calor por radiación.

$$q(T) = \epsilon\sigma AT^4$$

donde ϵ, σ y A son constantes.

6. Entalpia como función de la temperatura.

$$H(T) = H_0 + AT + BT^2 + CT^3 + DT^4$$

donde H_0, A, B, C y D son constantes.

Ejemplo 2-11. Linealizar la ecuación de Arrhenius para la dependencia de. las tasas de reacción química de la temperatura:

$$k(T) = k_0 e^{-(E/RT)}$$

donde k_0, E y R son constantes.

Solución. De la ecuación (2-56) se tiene

$$k(T) \doteq k(\bar{T}) + \frac{dk}{dT}(\bar{T})(T - \bar{T})$$

$$\frac{dk}{dT}(\bar{T}) = k_0 e^{-(E/R\bar{T})}\left(\frac{E}{R\bar{T}^2}\right) = k(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}$$

Se substituye para obtener

$$k(T) \doteq k(\bar{T}) + k(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}(T - \bar{T})$$

En términos de las variables de desviación se ve que

$$K(T) \doteq \left[k(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}\right]\mathrm{T}$$

donde $K(T) = k(T) - k(\bar{T})$ y $\mathrm{T} = T - \bar{T}$.

Para mostrar que las únicas variables en la ecuación lineal son K y T, considérese el siguiente problema numérico:

$$k_0 = 8 \times 10^9\ s^{-1}$$

$$E = 22000 \text{ cal/g mol}$$

$$\bar{T} = 373\text{K } (100\text{C})$$

Y

$$R = 1.987 \text{ cal/g mole K}$$
$$k(\bar{T}) = 8 \times 10^9 e^{-[22000/(1.987)(373)]} = 1.0273 \times 10^{-3} s^{-1}$$
$$\frac{dk}{dt}(\bar{T}) = (1.0273 \times 10^{-3})\frac{22000}{(1.987)(373)^2}$$
$$= 8.175 \times 10^{-5} s^{-1}K^{-1}$$

Esto da como resultado las siguientes ecuaciones lineales:

$$k(T) = 1.0273 \times 10^{-3} + 8.175 \times 10^{-5} (T - 373)$$
$$K(T) = 8.175 \times 10^{-5} T$$

Linealización de funciones con dos o más variables

Considérese la función no lineal de dos variables $f[x(t), y(t)]$; la expansión por series de Taylor alrededor de un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está dada por

$$f[x(t), y(t)] = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})[x(t) - \bar{x}] + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})[y(t) - \bar{y}] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})[x(t) - \bar{x}]^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})[y(t) - \bar{y}]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})[x(t) - \bar{x}][y(t) - \bar{y}] + \dots \quad (2\text{-}62)$$

La aproximación lineal consiste en eliminar los términos de segundo orden o superior, para obtener

$$f[x(t), y(t)] \doteq f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})[x(t) - \bar{x}] + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})[y(t) - \bar{y}] \quad (2\text{-}63)$$

El error de esta aproximación lineal es pequeño para x y y en la vecindad de $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Para ilustrar esto gráficamente, se utilizará un ejemplo; considérese el área de un rectángulo en función de sus lados h y w:

$$a(h,w) = hw$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial a}{\partial h} = w \qquad \frac{\partial a}{\partial w} = h$$

La aproximación lineal está dada por

$$a(h,w) \doteq a(\bar{h},\bar{w}) + \bar{w}(h - \bar{h}) + \bar{h}(w - \bar{w})$$

Como se muestra gráficamente en la figura 2-6, el error de esta aproximación es un pequeño rectángulo de área $(h - \bar{h})(w - \bar{w})$; tal error es pequeño cuando h y w están cerca de $\bar{h}$ y $\bar{w}$. En términos de las variables de desviación

$$A(h,w) \doteq \bar{w}H + \bar{h}W$$

donde $A(h, w) = a(h, w) - a(\bar{h}, \bar{w})$.

En general, una función con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se linealiza mediante la fórmula

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\doteq f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(x_1 - \bar{x}_1) \\ &\quad + \overline{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \overline{\frac{\partial f}{\partial x_n}}(x_n - \bar{x}_n) \qquad (2\text{-}64) \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(x_k - \bar{x}_k) \end{aligned}$$

donde:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$$

designa las derivadas parciales que se evalúan en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

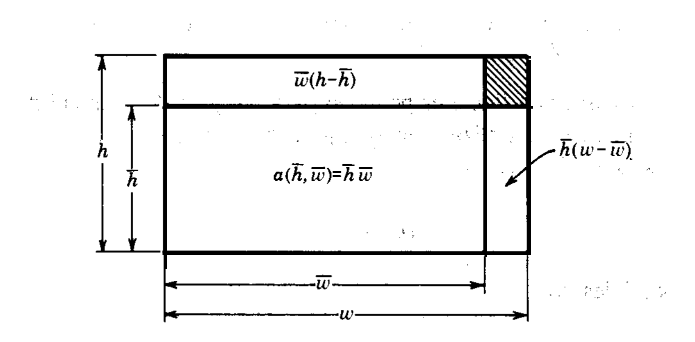


Figura 2-6. El área sombreada es el error de la aproximación lineal de la función $a(h, w) = hw$.

Ejemplo 2-12. Encuéntrese la aproximación lineal de la función no lineal

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy^2 - 3\frac{y}{z}$$

en el punto $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 2$, $\bar{z} = 3$.

Solución. En la ecuación (2-64) la aproximación lineal está dada por

$$f(x,y,z) = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}(x - \bar{x}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(y - \bar{y}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z - \bar{z})$$

Si se toman las derivadas parciales de la función indicadas, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{3}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y}{z^2}$$

Si se evalúa la función y sus derivadas parciales en el punto base resulta

$$\bar{f} = 2(1)^2 + 1(2)^2 - 3\frac{2}{3} = 4$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 4(1) + (2)^2 = 8$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = 2(1)(2) - \frac{3}{3} = 3$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{3(2)}{(3)^2} = \frac{2}{3}$$

Al substituir estos valores, la función linealizada queda dada por

$$f(x,y,z) \doteq 4 + 8(x - 1) + 3(y - 2) + \frac{2}{3}(z - 3)$$

o, en términos de las variables de desviación F, X, Y y Z

$$F \doteq 8X + 3Y + \frac{2}{3}Z$$

Ejemplo 2-13. La densidad de un gas ideal se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}$$

donde M es el peso molecular y R la constante de los gases perfectos.

Encuéntrese la aproximación lineal de la densidad como función de T y p y evalúense los coeficientes para aire (M = 29) a 300K y presión atmosférica (101,300 N/m^2). En unidades del SI la constante de los gases perfectos es R = 8.314 N-m/kgmol-K.

Solución. A partir de la ecuación (2-64), la aproximación lineal se da por

$$\rho = \bar{\rho} + \overline{\frac{\partial \rho}{\partial T}}(T - \bar{T}) + \overline{\frac{\partial \rho}{\partial p}}(p - \bar{p})$$

Las derivadas parciales de la función densidad son

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{Mp}{RT^2} = -\frac{\rho}{T}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{M}{RT} = -\frac{\rho}{p}$$

Al evaluar en las condiciones de base se obtiene

$$\bar{\rho} = \frac{M\bar{p}}{R\bar{T}} = \frac{(29)(101300)}{(8314)(300)} = 1.178 \text{ kg/m}^3$$

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial T}} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{T}} = -\frac{1.178}{300} = -0.00393 \text{ kg/m}^3\text{K}$$

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial p}} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} = \frac{1.178}{101300} = 1.163 \times 10^{-5} \text{ kg/m-N}$$

Por substitución, se obtiene la función linealizada:

$$\rho \doteq 1.178 - 0.00393\ (T - \bar{T}) + 1.163 \times 10^{-5}\ (p - \bar{p})$$

o, en términos de las variables de desviación R, T, P

$$R \doteq -0.00393T + 1.163 \times 10^{-5}P$$

Ejemplo 2-14. La respuesta de la composición del reactivo A en un tanque de reacción con agitación continua (ver figura 2-7) se puede calcular mediante las siguientes ecuaciones:

$$V\frac{dc_A(t)}{dt} = f(t)[c_{Ai}(t) - c_A(t)] - Vk[T(t)]c_A(t)$$

$$k[T(t)] = k_0 e^{-[E/RT(t)]}$$

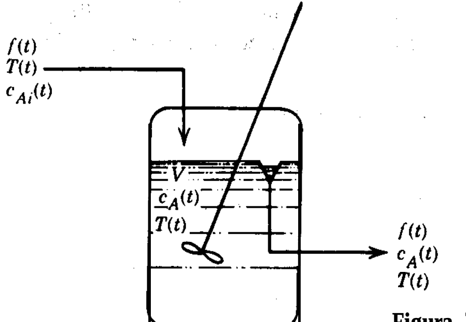


Figura 2-7. Tanque de **reacción** con agitación continua.

donde k_0, V, E y R son constantes. Para derivar estas ecuaciones se supone que el reactor es adiabático y de volumen constante, y que el calor de reacción es despreciable.

Las ecuaciones linealizadas se deben anotar en términos de las variables de desviación, alrededor de las condiciones iniciales de estado estacionario y de las variables de la transformada de **Laplace.**

Solución. De la linealización de cada miembro de la ecuación resulta

$$f(t)[c_{Ai}(t) - c_A(t)] \doteq \bar{f}(\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A) + \bar{f}[C_{Ai}(t) - C_A(t)] + [\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A]F(t)$$

$$Vk[T(t)]c_A(t) \doteq Vk(\bar{T})\bar{c}_A + V\frac{dk}{dT}(\bar{T})\bar{c}_A T(t) + Vk(\bar{T})C_A(t)$$

Al substituir el resultado del ejemplo 2-11, se obtiene

$$Vk[T(t)]c_A(t) \doteq Vk(\bar{T})\bar{c}_A + Vk(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}\bar{c}_A T(t) + Vk(\bar{T})C_A(t)$$

Puesto que los valores base iepresentan un estado estacionario, se ve que

$$0 = \bar{f}(\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A) - Vk(\bar{T})\bar{c}_A$$

Si ahora se substituyen estas dos últimas ecuaciones en la ecuación diferencial original, se obtiene

$$V\frac{dC_A(t)}{dt} \doteq \bar{f}C_{Ai}(t) + (\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A)F(t) - [\bar{f} + Vk(\bar{T})]C_A(t) - Vk(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}\bar{c}_A T(t)$$

Se aprovecha la ventaja de que los valores base son los iniciales (es decir, $C_A(0) = 0$) y entonces se puede obtener la transformada de Laplace de la ecuación linealizada:

$$VsC_A(s) = \bar{f}C_{Ai}(s) + (\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A)F(s) - [\bar{f} + Vk(\bar{T})]C_A(s) - Vk(\bar{T})\frac{E}{R\bar{T}^2}\bar{c}_A T(s)$$

Al reordenar, se tiene

$$C_A(s) = \frac{K_A}{\tau s + 1}C_{Ai}(s) + \frac{K_F}{\tau s + 1}F(s) - \frac{K_T}{\tau s + 1}T(s)$$

en donde los parámetros constantes son

$$\tau = \frac{V}{\bar{f} + Vk(\bar{T})} \qquad K_A = \frac{\bar{f}}{\bar{f} + Vk(\bar{T})}$$

$$K_F = \frac{\bar{c}_{Ai} - \bar{c}_A}{\bar{f} + Vk(\bar{T})} \qquad K_T = \frac{k(\bar{T})E\bar{c}_A}{R\bar{T}^2[\bar{f} + Vk(\bar{T})]}$$

Con el resultado de este último ejemplo se prueba que los parámetros de la ecuación linealizada dependen de los valores base de las variables del sistema. Se deduce que, para un sistema no lineal, la respuesta dinámica será diferente en diferentes condiciones de operación; este punto se abordará con mayor detalle en los capítulos 3 y 4.

2-4. REPASO DEL ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEJOS

En las secciones precedentes se aprendió que la linealización y la transformada de Laplace son herramientas poderosas para establecer las relaciones generales entre las variables y señales que constituyen los sistemas de control de proceso; desafortunadamente, el manejo de la transformada de Laplace requiere familiaridad con el álgebra de números complejos. En esta sección se resumen algunas de las operaciones fundamentales con números complejos, con la finalidad de proporcionar una referencia rápida a los lectores que pudieran tener dificultades en el manejo de números complejos.

Números complejos

Se dice que un número es complejo cuando no se puede representar como un número real puro o un número imaginario puro; un número ***imaginario*** es aquel que contiene la raíz cuadrada de la unidad negativa ($i = \sqrt{-1}$). Una manera de representar un número complejo es la siguiente:

$$c = a + ib \tag{2-65}$$

donde:

a es la parte real de numero complejo, *c*
b es la parte imaginaria.

Un número complejo se puede representar **gráficamente** en un plano en el que la parte imaginaria se sitúa en el eje vertical o ***imaginario***; y la parte real, en el eje horizontal o ***real.*** Este plano ***se*** conoce como ***plano complejo*** y se ilustra mediante la figura 2-8; cada punto en dicho plano representa un **número** real, si **está** sobre el eje real; imaginario, si esta sobre el eje imaginario; o complejo, si esta en cualquier otro **lugar**.

Una manera alterna para representar un número complejo es la ***notación polar. Co***mo se observa en la figura 2-8, la distancia del punto ***(a, b)*** al origen esta dada por

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| \qquad (2\text{-}66)$$

Esto se conoce como ***magnitud*** del número complejo c que aparece en la ecuación (2-65). La otra parte que se requiere para representar el número c en notación polar es el ángulo θ (ver figura 2-8), el cual está dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \measuredangle c \qquad (2\text{-}67)$$

Éste es el ángulo formado por la línea que va del origen al punto (a, ***b)*** y la parte positiva del eje real; ***se*** conoce como ***argumento*** del número complejo. Las ecuaciones (2-66) y

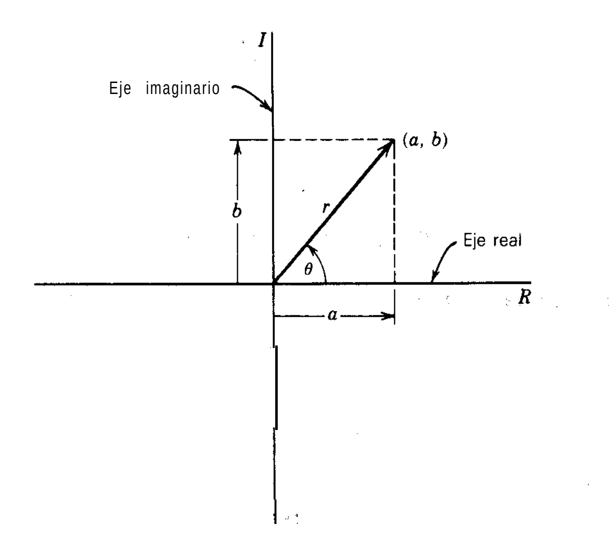


Figura 2-8. **Plano complejo.**

(2-67) se utilizan para convertir un número complejo, de la forma cartesiana (a, b) a la forma polar (r, θ). La operación inversa se puede efectuar mediante la utilización de las siguientes ecuaciones, las cuales se pueden comprobar fácilmente mediante la observación de la figura 2-8:

$$a = r\cos\theta \tag{2-68}$$

$$b = r\,\text{sen}\,\theta \tag{2-69}$$

Si se substituyen las ecuaciones (2-68) y (2-69) en la ecuación (2-65) y se factoriza la magnitud r, se obtiene

$$c = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = re^{i\theta} \tag{2-70}$$

aquí se hizo uso de la identidad trigonométrica

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \tag{2-71}$$

La ecuación (2-70) es la forma polar del número complejo c. .

Operaciones con números complejos

Dados dos números complejos

$$c = a + ib$$
$$p = v + iw$$

La suma se expresa mediante

$$c + p = (a + v) + i(b + w) \tag{2-72}$$

La resta es

$$c - p = (a - v) + i(b - w) \tag{2-73}$$

La multiplicación está dada por

$$\begin{aligned} cp &= (a + ib)(v + iw) \\ &= av + i^2bw + ibv + iaw \\ &= (av \quad bw) + i(bv + aw) \end{aligned} \tag{2-74}$$

donde se substituyó $i^2 = -1$.

En consecuencia, para la suma, la resta y la multiplicación de números complejos se siguen las mismas reglas del álgebra general; lo mismo sucede en cuanto a la división, con la excepción de que, para despejar el denominador, se debe usar el ***conjugado.***

El conjugado de un número complejo se define como un número que tiene **una parte** real y una parteimaginaria de igual magnitud, pero de signo contrario, en otras palabras

$$\text{conj. } (a + ib) = a - ib \tag{2-75}$$

El producto de un número complejo por su conjugado es un numero real que se expresa mediante

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \tag{2-76}$$

Con esto, la división de números complejos se realiza mediante la multiplicación del numerador y el denominador, por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{c}{p} &= \frac{a + ib}{v + iw} \cdot \frac{v - iw}{v - iw} \\ &= \frac{(av + bw) + i(bv - aw)}{v^2 + w^2} \\ &= \left(\frac{av + bw}{v^2 + v^2}\right) + i\left(\frac{bv - aw}{v^2 + w^2}\right) \end{aligned} \tag{2-77}$$

La multiplicación y la división se pueden realizar con mayor facilidad con la notación polar. Sean c y p que se expresan mediante

$$c = re^{i\theta}$$
$$p = qe^{i\beta}$$

Entonces el producto se expresa mediante

$$cp = rqe^{i(\theta + \beta)} \tag{2-78}$$

y el cociente por

$$\frac{c}{p} = \frac{r}{q} e^{i(\theta - \beta)} \tag{2-79}$$

La elevación a una, potencia **también** es 'mas simple en la notación polar:

$$c^n = r^n e^{in\theta} \tag{2-80}$$

así como la extracción de la raíz *enésima* Un número tiene n raíces ***enésimas* cuando** se toman en cuenta sus raíces reales y complejas:

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2-81}$$

donde se cambia el valor de k hasta que se calculan n raíces diferentes.

Las anteriores constituyen las operaciones fundamentales del álgebra de números complejos. Es importante tener en mente que, con el FORTRAN y otros lenguajes de programación de computadora, se pueden realizar operaciones y calcular funciones que contienen números complejos.

Ejemplo 2-15. Dados los números

$$a = 3 + i4 \qquad b = 8 - i6 \qquad c = -1 + i$$

a) Conviértanse a la forma polar:

$$|a| = \sqrt{9 + 16} = 5 \qquad |b| = \sqrt{64 + 36} = 10 \qquad |c| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\measuredangle a = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 0.9273 \qquad \measuredangle b = \tan^{-1}\frac{-6}{8} = -0.6435 \qquad \measuredangle c = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$$

$$a = 5e^{i0.9273} \qquad b = 10e^{-i0.6435} \qquad c = \sqrt{2}e^{(i3\pi/4)}$$

Nótese que b está en el cuarto cuadrante y c en el segundo del plano complejo (ver figura 2-9). Obsérvese también que los ángulos están en radianes.

b) Los siguientes son ejemplos de operaciones con númeios complejos:

$$a + b = (3 + 8) + i(4 - 6) = 11 - i2$$
$$a - b = (3 - 8) + i(4 + 6) = -5 + i10$$

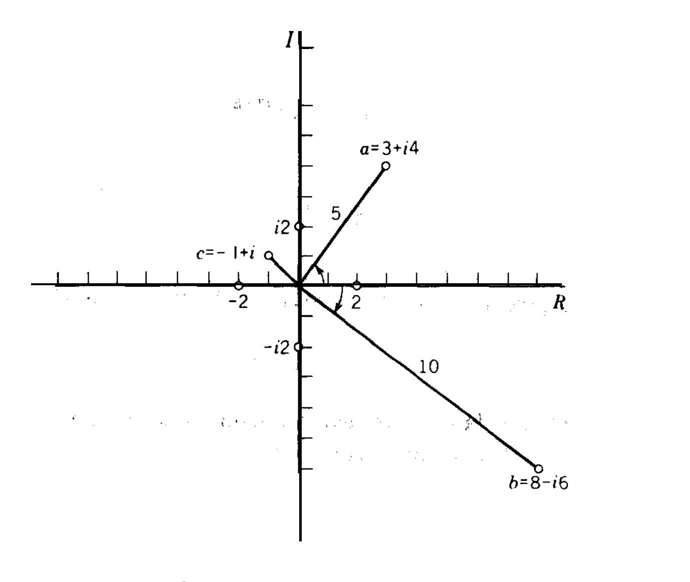


Figura 2-9. Números complejos para el ejemplo 2-15.

$$ac = (-3 - 4) + i(3 - 4) = -7 - i$$
$$bc = (-8 + 6) + i(8 + 6) = -2 + i14$$

Con lo siguiente se ilustra la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$(a + b)c = (11 - i2)(-1 + i) = (-11 + 2) + i(11 + 2) = -9 + i13$$
$$ac + bc = (-7 - i) + (-2 + i14) = -9 + i13$$

A continuación se ejemplifica la división:

$$\frac{a}{b} = \frac{3 + i4}{8 - i6} \cdot \frac{8 + i6}{8 + i6} = \frac{(24 - 24) + i(18 + 32)}{64 + 36} = i0.50$$

En notación polar

$$ac = 5e^{i0.9273}\sqrt{2}e^{i(3\pi/4)} = 5\sqrt{2}e^{i3.2834}$$
$$= 5\sqrt{2}\cos 3.2834 + i5\sqrt{2}\,\text{sen}\,3.2834 = -7 - i$$
$$\frac{a}{b} = \frac{5e^{i0.9273}}{10e^{-i0.6435}} = 0.50e^{i1.5708}$$
$$= 0.50\cos 1.5708 + i0.50\,\text{sen}\,1.5708 = i0.50$$

Estos resultados coinciden con los que se obtuvieron anteriormente.

c) Encuéntrense las cuatro raíces de 16, en coordenadas polares

$$16 = 16e^{i0}$$
$$x = \sqrt[4]{16}e^{i0} = \sqrt[4]{16}e^{i[(0+2k\pi)/4]} = 2e^{i(2k\pi/4)}$$

Las raíces son

$$\text{Para } k = 0 \qquad x = 2$$
$$k = 1 \qquad x = 2e^{i(\pi/2)} = i2$$
$$k = -1 \qquad x = 2e^{-i(\pi/2)} = -i2$$
$$k = 2 \qquad x = 2e^{i\pi} = -2$$

Estas raíces se grafican en la figura 2-9.

2-5. RESUMEN

En este capítulo se estudiaron las técnicas de transformada de Laplace y linealización; la combinación de estas herramientas permite representar la respuesta dinámica de los procesos y los instrumentos mediante sistemas de ecuaciones algebraicas en la variable de la transformada de Laplace, s. Esto conduce, como se verá en el capítulo siguiente,

al importante concepto de las funciones de transferencia. En el resto del libro se usan las funciones de transferencia para el diseño y análisis de los sistemas de control de proceso.

BIBLIOGRAFÍA

1. Müller, D. E., "A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer," *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, Vol. 10, 1956, pp. 208-215.
2. Ketter, R. L., y S. P. Prawel, Jr., *Modern Methods of Engineering Computation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
3. Conte, Samuel D., y Carl de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1980.
4. D'Azzo, John J., y C. H. Houpis, *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, 2a. ed, McGraw-Hill, Nueva York, 1966, capítulo 4.
5. Murril, Paul W., *Automatic Control of Processes*, Intext, Scranton, Pa., 1967, capítulos 4, 5 y 9.
6. Luyben, William L., *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*, McGraw-Hill, Nueva York, 1973, capítulos 6 y 7.

PROBLEMAS

2-1. A partir de la definición de transformada de Laplace, obténgase la transformada $F(s)$ de las siguientes funciones:

a) $f(t) = t$
b) $f(t) = e^{-at}$; donde a es constante.
c) $f(t) = \cos wt$, donde ω es constante.
d) $f(t) = e^{-at}\cos wt$; donde a y w son constantes.

Nota: Para las partes (*d*) y (c) posiblemente se requiera la identidad trigonométrica

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

La respuesta se puede verificar con el contenido, de la tabla 2-1.

2-2. Con el auxilio de una tabla de transformadas de Laplace y las propiedades de la transformada, encuéntrese la transformada $F(s)$ de las siguientes funciones:

a) $f(t) = u(t) + 2t + 3t^2$
b) $f(t) = e^{-2t}[u(t) + 2t + 3t^2]$
c) $f(t) = u(t) + e^{-2t} - 2e^{-t}$
d) $f(t) = u(t) - e^{-t} + te^{-t}$
e) $f(t) = u(t-2)[1 - e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)]$

2-3. Verifíquese la validez de los resultados del problema 2-2 mediante el uso de los teoremas del valor inicial y del valor final. ¿Estos teoremas se aplican en todos los casos?

2-4. Una función útil que se emplea como función de forzamiento en el análisis de los sistemas de control de proceso es la rampa parcial que se ilustra en la figura 2-10. Obténgase la transformada de Laplace de la función rampa parcial, mediante cada uno de los siguientes métodos:

a) La aplicación directa de la definición de transformada de Laplace; se consideran las siguientes secciones de la función:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{H}{t_1}t & t < t_1 \\ H & t \geq t_1 \end{cases}$$

donde H es la altura y t_1 la duración de la rampa.

b) El uso de una tabla de transformadas de Laplace, la propiedad de linealidad y el teorema de la traslación real; la función se considera como la suma o superposición de las siguientes funciones:

$$f(t) = \frac{H}{t_1}t - u(t - t_1)\frac{H}{t_1}t + Hu(t - t_1)$$

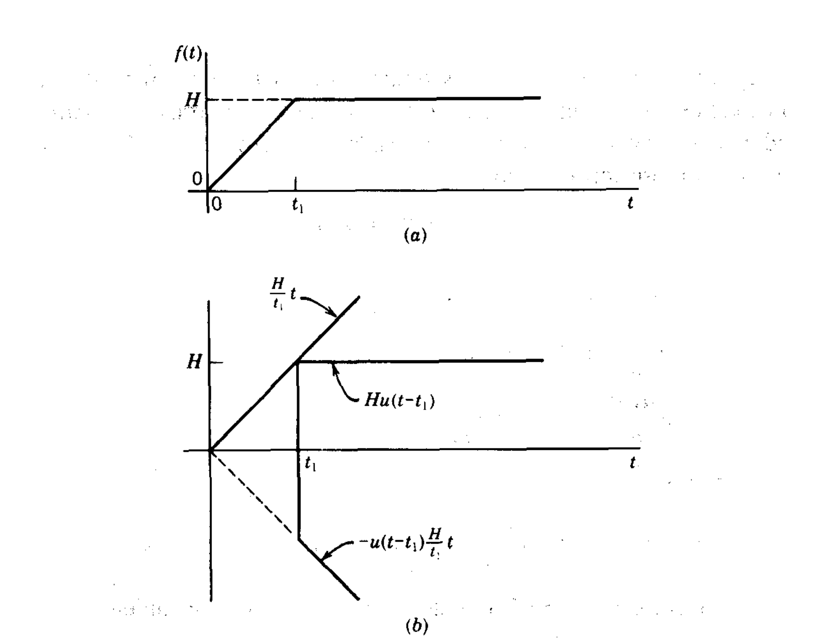


Figura 2-10. Función de forzamiento para el problema 2-4. *a)* Función rampa parcial. *b)* Funciones que se superponen para producir la función de rampa parcial.

Verifíquese el resultado mediante la aplicación de los teoremas del valor inicial y del valor final.

2-5. En el enunciado del teorema de la traslación real se' señaló que, para que el teorema se pueda aplicar, la función retardada debe ser cero para todos los tiempos inferiores al tiempo de retardo. Demuéstrese lo anterior mediante el cálculo de la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{-(t-t_0)/\tau}$$

donde t_0 y τ son constantes.

a) Se supone que se mantiene para todos los tiempos mayores a cero; esto es, se puede reordenar como

$$f(t) = e^{t_0/\tau}e^{-t/\tau}$$

b) Se supone que es cero para $t \leq t_0$; es decir, se puede escribir de manera apropiada como

$$f(t) = u(t - t_0)e^{-(t-t_0)/\tau}$$

¿Las dos respuestas son iguales? ¿Cuál de las dos concuerda con el teorema de la traslación real?

2-6. Encutntrese la solución $y(t)$ de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando el método de transformada de Laplace y la expansión en fracciones parciales. Las condiciones iniciales de $y(t)$ y sus derivadas son cero, la función de forzamiento es la función escalón unitario.

$$x(t) = u(t)$$

a) $2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(r) = 5x(t)$

b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\dfrac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = x(t)$

c) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = x(t)$

d) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\dfrac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = x(t)$

e) $2\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 21\dfrac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = X(f)$

2-7. Repítase el problema 2-6 (*d*) usando como función de forzamiento

a) $x(t) = e^{-3t}$

b) $x(t) = u(t - 1)e^{-3(t-1)}$

2-8. La forma normal de la ecuación diferencial del retardo de primer orden con tiempo muerto es

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t - t_0)$$

donde:

τ es la constante de tiempo
K es la ganancia
t_0 es el tiempo muerto

Si se supone que la condición inicial es $y(0) = y_0$, encuéntrese, mediante la transformada de Laplace, la solución y(t) para cada una de las siguientes funciones de forzamiento:

a) Impulso unitario $x(t) = \delta(t)$
b) Escalón unitario x(t) = u(t)
c) Rampa parcial del problema 2-4
d) Onda senoidal de frecuencia ω: $x(t) = \text{sen}\ \omega t$

2-9. Una forma normal de la ecuación diferencial para el retardo de segundo orden se expresa mediante

$$\tau^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

donde:

τ es la constante de tiempo característica
ζ es la tasa de amortiguamiento
K es la ganancia

Si se supone que todas las condiciones iniciales son cero, encuéntrese la respuesta de y(t) al escalón unitario, con el método de transformada de Laplace, para los siguientes casos:

a) $\zeta > 1$, se conoce como *sobreamortiguado.*
b) $\zeta = 1$, se conoce como *críticamente amortiguado.*
c) $0 < \zeta < 1$, se conoce como *subamortiguado.*
d) $\zeta = 0$, se conoce como *no amortiguado.*
e) $\zeta < 0$, se conoce como *inestable.*

Con base en los resultados ¿Qué términos de la función $y(t)$ son característicos de un retardo subamortiguado y uno no amortiguado? ¿Se puede verificar la definición de estabilidad mediante la observación del resultado de la parte (e)?

2-10. Úsese un programa de computadora para calcular las raíces del polinomio denominador de las siguientes transformadas de Laplace; encuéntrese la $y(t)$ inversa mediante el método de la expansión en fracciones parciales:

a) $Y(s) = \dfrac{s^2 + 1}{(s^5 + 1)} \cdot \dfrac{1}{s}$

b) $Y(s) = \dfrac{2}{24s^4 + 50s^3 + 35s^2 + 10s + 1} \cdot \dfrac{1}{s}$

c) $Y(s) = \dfrac{1}{4s^4 + 4s^3 + 17s^2 + 16s + 4}$

En el apéndice D se muestra un programa para encontrar raíces.

2-11. Linealícense las siguientes funciones respecto a la variable que se indica; el resultado debe estar en términos de las variables de desviación.

a) Ecuación de Antoine para presión de vapor:

$$p^{\circ}(T) = e^{[A - B/(T + C)]}$$

donde A, B y C son constantes.

b) Composición de vapor en equilibrio con líquido:

$$y(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

donde α, volatilidad relativa, es constante.

c) Flujo en una válvula:

$$f(\Delta p_v) = C_v \sqrt{\frac{\Delta p_v}{G}}$$

donde C_v y G son constantes.

d) Transferencia de calor por radiación:

$$q(T) = \varepsilon \sigma A T^4$$

donde ϵ, σ y A son constantes.

2-12, Como se indicó en el texto, el rango de aplicación de la ecuación linealizada depende del grado de no linealidad de la función original en el punto base. Demuéstrese lo anterior mediante el cálculo del rango de la fracción de mol líquido x, en el pro-

blema 2-11 (*b*), sobre el cual la **función** linealizada coincide con la función real dentro de $\pm 5\%$ de fracción de mol vapor y. Calcúlese también el rango de valores de x para los cuales los parámetros de la función linealizada permanecen dentro de $\pm 5\%$ de su valor base. Se usarán los siguientes valores numéricos:

a) $\alpha = 1.10 \qquad \bar{x} = 0.10$
b) $\alpha = 1.10 \qquad \bar{x} = 0.90$
c) $\alpha = 5.0 \qquad \bar{x} = 0.10$
d) $\alpha = 5.0 \qquad \bar{x} = 0.90$

2-13. Repítase el problema 2-12 para la función de Arrhenius del ejemplo 2-11, calcúlese el rango de valores de temperatura para los cuales la función linealizada cumple dentro de ± 5 % con el coeficiente de la tasa de reacción $k(T)$. Calcúlese también el rango de valores de T para los cuales el parámetro de la ecuación linealizada permanece dentro de ± 5 % del valor base. ¿Cuáles serían los resultados si se duplica el valor de E?

2-14. Evalúense los parámetros de la transformada que se obtuvo en el ejemplo 2-14, mediante la utilización de los parámetros cinéticos del ejemlo 2-11 y los siguientes parámetros de reactivo:

$$V = 2.6 \text{ m}^3 \qquad \bar{f} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \qquad \bar{c}_{Ai} = 12 \text{ kgmol/m}^3$$

Nótese que el valor de $\bar{c}_A$ se puede calcular a partir de la relación de estado estacionario que se da en el ejemplo 2-14.

2-15. Con la ley de Raoult se obtiene la fracción de mol vapor y de un compuesto en equilibrio, mediante la siguiente relación:

$$y(x,T,p) = \frac{p^o(T)}{p} x$$

donde:

x es la fracción de mol líquido
T es la temperatura
P es la presión total

La presión de vapor $p^o(T)$ se obtiene con la ecuación de Antoine, como en el problema 2-11 (*a*).

a) Se debe linealizar la fórmula para la fracción mol vapor y expresar el resultado en términos de las variables de desviación.
b) Evalúense los parámetros de la ecuación lineal para las siguientes condiciones:

$\bar{x} = 0.50$ (fracción de mol de benceno en el líquido)
$\bar{T} = 95C$ $\bar{p} = 760$ mm Hg
Constantes de Antoine para el benceno: $A = 15.9008$
$B = 2788.51C$
$C = 220.80C$

2-16. Escríbase la aproximación lineal de las siguientes funciones, en términos de las variables de desviación:

a) $f(x,y) = y^2x + 2x + \ln y$

b) $f(x,y) = \dfrac{3\sqrt{x}}{y} + 2 \operatorname{sen} xy$

c) $f(x,y) = y^x$:

2-17. El tanque que se muestra en la figura 2-11 se coloca en una línea de tubería para reducir las variaciones de flujo debido a cambios en la presión de entrada $p_i(t)$ y en la presión de salida $p_o(t)$. En las condiciones base de estado estacionario el flujo a través del sistema es de 25.0 kgmolheg y las presiones son:

$$\bar{p}_i = 2000 \text{ kN/m}^2$$
$$\bar{p} = 1800 \text{ kN/m}^2$$
$$\bar{p}_o = 1600 \text{ kN/m}^2$$

El volumen del tanque es $V = 10$ m^3. El balance molar en el tanque, si se supone que el comportamiento es el de un gas perfecto y la temperatura constante a 400 K, se expresa mediante

$$\frac{V}{RT}\frac{dp(t)}{dt} = f_i(t) - f_o(t)$$

donde $R = 8314$ N-m/kgmol K es la constante de los gases ideales. La tasa de flujo de entrada y de salida se expresa mediante

$$f_i(t) = k_i\sqrt{p_i(t)[p_i(t) - p(t)]}$$
$$f_o(t) = k_o\sqrt{p(t)[p(t) - p_o(t)]}$$

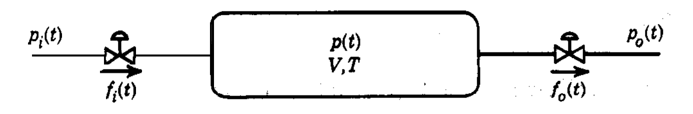


Figura 2-11. Tanque de compensación de presión para el problema 2-17.

donde k_i y k_o son los coeficientes de conductancia (constantes) de las válvulas de entrada y de salida, respectivamente; estas válvulas se ajustan para obtener las presiones base a partir del flujo base que se dio arriba. Linealícense las ecuaciones de arriba y resuélvanse para obtener la respuesta de la presión p(t) en el tanque a las siguientes funciones de forzamiento:

a) Escalón unitario en la presión de entrada; la presión de salida es constante

$$p_i(t) = u(t) \qquad p_o(t) = \text{constante}$$

b) Escalón unitario en la presión de salida; la presión de entrada permanece constante

$$p_o(t) = u(t) \qquad p_i(t) = \text{constante}$$

Úsese el método de transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

100

1 2 3

$$\frac{y(s)}{z(s)} = \frac{-4}{s^2+2s+5}$$

$r_{1,2} = -1 \pm 2i \rightarrow$ sist. estable

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{z}(s)} = \frac{-4}{s^2+2s+5}$$

$$\frac{\bar{y}(t\to\infty)}{\bar{z}(t\to\infty)} = \frac{1}{2} e^{-t} \{-4 \operatorname{sen} 2t\}$$

$t\to\infty \rightarrow \emptyset$

$\frac{y}{z} = \emptyset \qquad \bar{y}(t\to\infty) = 0.$

$\bar{y} \searrow \emptyset \qquad y(t) - y^s \rightarrow$ edo estable

100.

$y_s = 100$ al edo estable

LINEALIZAR $\quad z(y,x) = 200 + 40x^2 - \frac{x^2}{y}$

Halle exp lineal eq. para evaluar $z(x,y)$ alrededor

ptos $x=5$ y $y=0.5$

$$z(x,y) = z(y^R, z^R) + \left.\frac{\partial z(x)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_R \\ y=y_R}} (x-x_R) + \left.\frac{\partial z(y)}{\partial y}\right| (y-y_R)$$

$z(y_R x^R) = 200 + 40(25) + \frac{25}{0.5} = 1150$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 80x - \frac{2x}{y} = 80(5) - \frac{2(5)}{0.5} = 380$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2} = 10$

$z(x,y) = 1150 + 380(x-5) + \ldots (y-0.5)$

CAPÍTULO

3

Sistemas dinámicos de primer orden

En este capítulo se tienen dos objetivos principales. El primero es presentar una introducción al desarrollo de modelos simples de proceso, los cuales son necesarios siempre que se **requiere analizar** los sistemas de control. El segundo objetivo, que se deriva del primero, es explicar el significado físico de algunos de los parámetros del proceso que definen la "personalidad" de éste; como se explicó en el capítulo 1, cuando ya se conoce la personalidad del proceso, entonces es posible diseñar el sistema de control que se requiere. **También** se estudiaran algunos **términos** nuevos y otros recursos **matemáticos** importantes para el estudio del control automático de proceso. Las herramientas que se estudiaron en el capítulo 2 se utilizarán ampliamente en éste.

Todo lo anterior se abordará mediante ejemplos de procesos. Se empezará con algunos ejemplos simples, y a partir de éstos se avanzará hacia los más complejos y que se acerquen más a lo real.

Para hacer el modelo de los procesos industriales generalmente se comienza con el balance de una cantidad que se conserva: masa o energía, este balance se puede escribir como:

Flujo de masa/energía de entrada al proceso − Flujo de masa/energía de salida del proceso = Tasa de acumulación de masa/energía en el proceso.

Como se puede imaginar, para escribir estos balances y todas las otras ecuaciones auxiliares se deben utilizar casi todas las **áreas** de la ingeniería de proceso, por ejemplo, la termodinámica, la transferencia de calor, flujo de fluidos, transferencia de masa e ingeniería de reacción; todo esto hace que el **diseño** de modelos de procesos industriales sea muy interesante y motivante.

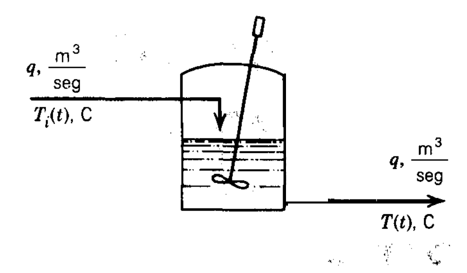


Figura 3-1. Proceso **térmico.**

3-1. PROCESO TÉRMICO

Considérese el tanque con agitación continua ilustrado en la figura 3-1, se tiene interés en conocer la forma en que responde la temperatura de salida, $T(t)$, a los cambios en la temperatura de entrada, $T_i(t)$.

En este ejemplo se supone que los flujos **volumétricos** de **entrada** y salida, la densidad de los líquidos y la capacidad calorífica de los líquidos son constantes y que se conocen todas estas propiedades. El líquido en el tanque se mezcla bien y el tanque está bien aislado, es decir, el proceso es adiabático.

La relación que se desea entre la temperatura de entrada y la de salida da como resultado un balance de energía en estado dinámico al contenido del tanque:

$$q\rho_i h_i(t) - q\rho h(t) = \frac{d(V\rho u(t))}{dt} \tag{3-1}$$

0, en términos de la temperatura

$$q\rho_i C_{pi} T_i(t) - q\rho C_p T(t) = \frac{d(V\rho C_v T(t))}{dt}$$

donde:

ρ_i, ρ = densidad del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente, en kg/m^3

C_{pi}, C_p = capacidad calorífica a presión constante del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente, en J/kg-C

C_v = capacidad calorífica a volumen constante del líquido, en J/kg-C

V = volumen del líquido en el tanque, m^3

h_i, h = entalpia del líquido a la entrada y a la salida, respectivamente, J/kg

u = energía interna del liquido en el tanque, J/kg.

Puesto que se supone que la densidad y la capacidad calorífica permanecen constantes, sobre todo el rango de tempetarua de operación, la última ecuación se puede escribir como

$$q\rho C_p T_i(t) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{3-2}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden que expresa la relación entre la temperatura de entrada y la de salida: 'Es importante señalar que en esta ecuación sólo existe una incógnita, ***T*(*t*)**; la temperatura de entrada, T,(t), es una variable de entrada y, por tanto, no se considera como incógnita, ya que se puede especificar la forma en que cambia, por ejemplo, un cambio en escalón o en rampa. Para indicar que existe una ecuación con una incógnita se escribe:

$$q\rho C_p T_i(t) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{3-2}$$

1 ecuación, 1 incógnita $(T(t))$

Con la solución de esta ecuación diferencial para cierta temperatura de entrada se obtiene **la respuesta** de la temperatura de salida como función del tiempo. **La** temperatura de entrada ***se*** conoce como ***variable de entrada o función de forzamiento,*** ya que es la que fuerza el cambio en la temperatura de salida; la temperatura de salida se conoce como ***variable de salida*** o ***variable de respuesta,*** ya que es la que responde a la función de forzamiento.

Antes de resolver la ecuación anterior se hace un cambio de variable, con el que se simplifica la solución; se escribe el balance de energía del contenido del tanque en estado estacionario:

$$q\rho C_p \bar{T}_i - q\rho C_p \bar{T} = 0 \tag{3-3}$$

Al substraer la ecuación (3-3) de la ecuación (3-2) se tiene

$$q\rho C_p(T_i(t) - \bar{T}_i) - q\rho C_p(T(t) - \bar{T}) = V\rho C_v \frac{d(T(t) \quad \bar{T})}{dt} \tag{3-4}$$

Ahora se definen las siguientes ***variables de desviación,*** como se vio en el capítulo 2:

$$\text{T(r)} = \text{T(t)} - \bar{T} \tag{3-5}$$

$$\mathbf{T}_i(t) = \text{T,(t)} - \bar{T}_i \tag{3-6}$$

donde:

$\bar{T}$, $\bar{T}_i$ = valores de estado estacionario de la temperatura de entrada y de salida, respectivamente, C

T(t), $\mathbf{T}_i(t)$ = variables de desviación de la temperatura de entrada y de salida, respectivamente, C

Se substituyen las ecuaciones (3-5) y (3-6) en la (3-4) y se obtiene

$$q\rho C_p \mathbf{T}_i(t) - q\rho C_p \mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \tag{3-7}$$

La ecuación (3-7) es la misma que la ecuación **(3-2),** con la excepción de que esta en términos de las temperaturas de desviación. La solución de esta ecuación da por resultado la temperatura de desviación, T(t), contra el tiempo, para cierta función de forzamiento $\mathbf{T}_i(T)$. Si se desea la temperatura real de salida, T(t), se debe añadir el valor de estado estacionario $\bar{T}$ a T(t), debido a la ecuación (3-5).

La definición y utilización de las *variables de desviación es muy* importante en el análisis y diseño de sistemas de control de proceso. En toda la teoría de control se utilizan casi exclusivamente estas variables y, por tanto, se debe comprender bien el significado e importancia de las variables de desviación. Como se explicó en el capítulo 2, con su uso se tiene la ventaja de que su valor indica el grado de desviación respecto a algún valor de operación de estado estacionario; en la práctica, este valor de estado estacionario puede ser el valor deseado de la variable. Otra ventaja en el uso de estas variables es que su valor inicial es cero, si se supone que se comienza a partir de un estado estacionario, con lo que se simplifica la solución de las ecuaciones diferenciales semejantes a la ecuación (3-7). Como se mencionó, dichas variables se usan ampliamente a lo largo de este libro.

La ecuación (3-7) se puede reordenar como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{q\rho C_p}\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_i(t)$$

sea

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{q\rho C_p} \tag{3-8}$$

de manera que

$$\tau \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_i(t) \tag{3-9}$$

Puesto que ésta es una ecuación diferencial lineal, con la utilización de la transformada de Laplace se obtiene

$$\tau s\mathbf{T}(s) - \tau\mathbf{T}(0) + \mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_i(s)$$

Pero T(O) = 0 y, por tanto, algebraicamente

$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1} T_i(s) \tag{3-10}$$

o

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{3-11}$$

La ecuación (3-11) se conoce como ***función de transferencia; es*** una función de transferencia de primer orden porque se desarrolla a partir de una ecuación diferencial de primer orden. Los procesos que se describen mediante esta función se denominan ***procesos de primer orden, sistemas de primer orden o retardos de primer orden;*** algunas veces también se conocen como sistemas de capacitancia única, porque la función de transferencia es del mismo tipo que la descrita por un sistema eléctrico con una resistencia y un capacitor (R-C).

El nombre de "función de transferencia" proviene del hecho de que con la solución de la ecuación ***se transfiere la entrada*** o función de forzamiento, $T_i(t)$, a la salida o variable de respuesta, T(t). Las funciones de transferencia se tratan con más detalle en la sección 3-3.

Si se supone que la temperatura de entrada, $T_i(t)$, al tanque se incrementa en A grados C, es decir, sufre un cambio en escalón con A grados de magnitud, esto se expresa matemáticamente como sigue:,

$$T_i(t) = \bar{T}_i \qquad t < 0$$
$$T_i(t) = \bar{T}_i + A \qquad t \geq 0$$

0 como se vio en el capítulo 2

$$T_i(t) = Au(t)$$

Al obtener la transformada de Laplace se tiene

$$T_i(s) = \frac{A}{s}$$

De la substitución en la ecuación (3-10) se obtiene

$$T(s) = \frac{A}{s(\tau s + 1)}$$

y con el uso de las fracciones parciales para obtener la transformada inversa se llega a

$$T(t) = A(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-12}$$

o

$$T(t) = \overline{T} + A(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-13}$$

En la figura 3-2 se ilustra gráficamente la solución de las ecuaciones (3-12) y (3-13).

La ecuación (3-12) expresa el significado físico de τ, la cual se conoce como ***constante de tiempo del proceso.*** Si se hace $t = \tau$, se tiene

$$T(\tau) = A(1 - e^{-\tau/\tau}) = A(1 - e^{-1})$$
$$T(\tau) = 0.632A$$

Es decir, en una constante de tiempo se alcanza el 63.2% del cambio total, lo cual se ilustra gráficamente en la figura 3-2; en consecuencia, la ***constante de tiempo guarda relación con la velocidad de respuesta del proceso.*** Mientras más lenta es la respuesta de un proceso a la función de forzamiento o entrada, más grande es el valor de τ; tanto, más rápida es la respuesta del proceso a la función de forzamiento, cuanto más pequeño es el valor de τ. τ debe estar en unidades de tiempo; de la ecuación (3-8) se ve que

$$\tau = \frac{[\text{m}^3]\ [\text{kg/m}^3]\ [\text{J/kg-C}]}{[\text{m}^3/\text{s}]\ \ [\text{kg/m}^3]\ \ [\text{J/kg-C}]} = \text{segundos}$$

También es muy importante darse cuenta que la constante de tiempo se compone con las diferentes propiedades físicas y parámetros de operación del proceso, como se observa en la ecuación (3-8); es decir, la constante de tiempo depende del volumen de líquido en el tanque (V), de las capacidades caloríficas $(C_p$ y $C_v)$ y del flujo del proceso (q). Si alguna de estas características cambia, la constante de tiempo también cambia. Otra manera de expresar lo anterior es que, si alguna de las condiciones del proceso cambia, también cambia la "personalidad" del proceso y ello se refleja en la velocidad de, respuesta del proceso o constante de tiempo.

Otro punto importante es que en este ejemplo el valor de la constante de tiempo permanece constante en todo el rango de operación de $T(t)$, la cual es una propiedad de los

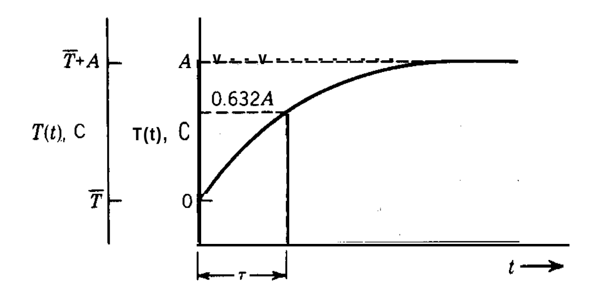


Figura 3-2. Respuesta de un proceso de primer orden a un cambio en escalón de la función de forzamiento-constante de tiempo.

sistemas lineales que no se aplica para el caso de los sistemas no lineales, como se verá de manera separada.

Hasta ahora se supuso que el tanque esta bien aislado, lo que propicia un proceso adiabático; es decir, no hay pérdidas de calor hacia la atmósfera y, en consecuencia, no existe término de pérdida de calor en el balance de energía. Si se elimina la suposición de operación adiabática y se toma en cuenta la pérdida de calor en el balance de energía, se llega a la siguiente ecuación:

$$q\rho C_p T_i(t) - Q(t) - q\rho C_p T(t) = \text{vpc,} \ \frac{dT(t)}{dt}$$

0

$$q\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_s(t)] - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \qquad (3\text{-}14)$$

1 ecuación, 1 incógnita ($T(t)$)

donde:

U = coeficiente global de transferencia de calor, J/m^2-K-s
A = área de transferencia de calor, m^2
$T_s(t)$ = temperatura ambiente, C, que es una variable de entrada

El coeficiente global de transferencia de calor, U, es una función de diversos factores; uno de ellos es la temperatura que, sin embargo, para este ejemplo en particular, se supone es constante. Puesto que se supone que la masa y la densidad del líquido en el tanque también son constantes, entonces la altura del líquido es constante y, en consecuencia, el área de transferencia de calor, A, también es constante.

Para obtener las variables de desviación, primero se escribe el balance de energía de estado estacionario para el proceso:

$$q\rho C_p \bar{T}_i - UA(\bar{T} - \bar{T}_s) - q\rho C_p \bar{T} = 0 \qquad (3\text{-}15)$$

Al substraer la ecuación (3-15) de la ecuación (3-14), se tiene

$$q\rho C_p(T_i(t) - \bar{T}_i) - UA[(T(t) - \bar{T}) - (T_s(t) - \bar{T}_s)] - q\rho C_p(T(t) - \bar{T}) = \text{vpc,.} \frac{d(T(t) - \bar{T})}{dt} \qquad (3\text{-}16)$$

Se define una nueva variable de desviación como

$$\text{T.\textbackslash(r)} = T_s(t) \quad \bar{T}_s \qquad (3\text{-}17)$$

Con la substitución de las ecuaciones **(3-5),** (3-6) y (3-17) en la ecuación **(3-16),** se llega a

$$q\rho C_p \mathbf{T}_i(t) - UA(\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_s(t)) - q\rho C_p \mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \tag{3-18}$$

La ecuación (3-18) es la misma que la **(3-14),** con la excepción de que se escribe en **térmi**nos de las variables de desviación.

La ecuación (3-18) es **también** una ecuación diferencial lineal de primer orden y, en este caso, aún existe una ecuación con una incógnita, T(r); la nueva variable, T,(t), es otra función de forzamiento. Conforme cambia la temperatura ambiente, Z”(r), se afecta la perdida de calor y, en consecuencia, la temperatura del líquido que se procesa. La ecuación (3-18) se puede reordenar como sigue:

$$\frac{V\rho C_v}{q\rho C_p + UA} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{T}(t) = \frac{q\rho C_p}{q\rho C_p + UA} \mathbf{T}_i(t) + \frac{UA}{q\rho C_p + UA} \mathbf{T}_s(t)$$

o

$$\tau \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{T}(t) = K_1 \mathbf{T}_i(t) + K_2 \mathbf{T}_s(t) \tag{3-19}$$

donde

$$\tau = \frac{V\rho C_v}{q\rho C_p + UA}, \quad \text{segundos} \tag{3-20}$$

$$K_1 = \frac{q\rho C_p}{q\rho C_p + UA}, \quad \text{sin dimensiones } (C/C) \tag{3-21}$$

$$K_2 = \frac{UA}{q\rho C_p + UA}, \quad \text{sin dimensiones } (C/C) \tag{3-22}$$

En el miembro derecho de la ecuación (3-19) aparecen dos funciones forzadas, $\mathbf{T}_i(t)$ y $\mathbf{T}_s(t)$, que actúan sobre la respuesta o miembro izquierdo de la ecuación, T(r).

La transformada de **Laplace** de la ecuación (3-19) es

$$\tau s\mathbf{T}(s) - \tau\mathbf{T}(0) + \mathbf{T}(s) = K_1 \mathbf{T}_i(s) + K_2 \mathbf{T}_s(s)$$

Pero T(O) = 0, por lo cual, al reordenar esta ecuación, se tiene

$$\mathbf{T}(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1} \mathbf{T}_i(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1} \mathbf{T}_s(s) \tag{3-23}$$

Si la temperatura ambiente permanece constante, $T_s(t) = \bar{T}_s$ y T,(t) = 0, entonces la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la del agua que entra es

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{3-24}$$

Si la temperatura del líquido que entra permanece constante, $T_i(t) = \bar{T}_i$ y $T_i(t) = 0$, la función de transferencia que relaciona la temperatura del proceso con la temperatura ambiente es

$$\frac{T(s)}{T_s(s)} = \frac{K_2}{\tau s + 1} \tag{3-25}$$

Si tanto la temperatura del líquido que entra como la ambiente cambian, entonces la ecuación (3-23) expresa la relación correcta.

En las tres últimas ecuaciones se encuentra un parametro nuevo y muy importante, *K,* que se conoce como ***ganancia del proceso o ganancia*** de estado estacionario. Para conocer el significado físico de esta ganancia, supóngase que la temperatura de entrada al tanque se incrementa en *A* grados C; entonces la respuesta de la temperatura a esta función de forzamiento se expresa mediante

$$T(s) = \frac{K_1 A}{s(\tau s + 1)}$$

de lo cual

$$T(t) = K_1 A(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-26}$$

o

$$T(t) = \bar{T} + K_1 A(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-27}$$

La respuesta se ilustra gráficamente en la figura 3-3. K_1A expresa la cantidad total de cambio; la ganancia multiplica el cambio en la función de forzamiento. Se puede decir que ***la ganancia indica cuánto cambia la variable de salida por unidad de cambio en la finción de forzamiento o variable de entrada:*** es decir, la ganancia define la sensibilidad del proceso.

La ganancia se define matemáticamente como sigue:

$$K = \frac{\Delta O}{\Delta I} = \frac{\Delta \text{ variable de salida}}{\Delta \text{ variable de entrada}} \tag{3-28}$$

La ganancia es otro parámetro relacionado con la “personalidad” del proceso que se controla y, en consecuencia, depende de las propiedades físicas y los parámetros de operación del proceso, como se muestra mediante las ecuaciones (3-21) y (3-22). Las ganancias de dicho proceso dependen del flujo, de la densidad y capacidad calorífica del líquido que se procesa (q, ρ, C_p), del coeficiente global de transferencia de calor (U) y

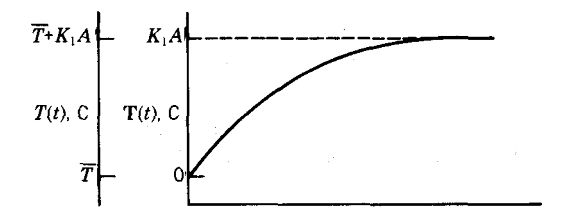


Figura 33. Respuesta de un proceso de primer orden al cambio en escalón de la función de forzamiento-ganancia de proceso.

del **área** de transferencia de calor (A); si cambia cualquiera de estos factores, la personalidad del proceso cambia y repercute sobre la ganancia. Al igual que la constante de tiempo, en este ejemplo particular las ganancias son constantes, sobre todo el rango de operación.

En este ejemplo existen dos ganancias: K_1, que relaciona la temperatura de salida con la temperatura de entrada; y K_2, que relaciona la temperatura de salida **con** la del ambiente. Las unidades de la ganancia deben ser las unidades de la variable de salida, divididas entre las unidades de la función de forzamiento o variable de entrada, lo cual se puede apreciar en la ecuación (3-28).

En la ecuación (3-23) se aprecia que sólo existe una constante de tiempo en el proceso; es decir, el tiempo que se. necesita para que la temperatura alcance un cierto porcentaje de su cambio total, debido a un cambio en la temperatura de entrada, es igual al tiempo que se necesita para que alcance el mismo porcentaje cuando es la temperatura ambiente la que cambia. Este caso no siempre es cierto, en el presente ejemplo existe más de una ganancia, hay una por cada función de forzamiento; en algunos procesos puede haber más de una constante de tiempo, probablemente una por cada función forzada. Conforme se avance en el estudio se verán algunos ejemplos de esto.

Durante el **análisis** del proceso, siempre es importante detenerse en algún punto para verificar si hay errores en el desarrollo. Un punto conveniente se encuentra generalmente después del desarrollo de la ecuación (3-23); se puede realizar una verificación rápida mediante el examen de los signos de las ecuaciones, para comprobar si tienen sentido en el mundo real; en dicha ecuación ambas ganancias son positivas, lo cual indica que si la temperatura de entrada se incrementa, la temperatura de salida también aumenta; lo cual tiene sentido en este proceso. La ecuación (3-23) también muestra que si la temperatura ambiente aumenta, la de salida también se incrementa; esto tiene sentido porque, al aumentar la temperatura ambiente, decrece la tasa de pérdidas de calor del tanque y, por tanto, aumenta la temperatura del contenido del tanque. Con esta verificación rápida se

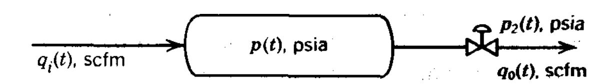


Figura 3-4. Recipiente con gas.

aumenta la confianza y se puede continuar el análisis con la renovada expectativa del posible éxito.

3-2. PROCESO DE UN GAS

Considérese el recipiente de gas que se muestra en la figura 3-4, el recipiente actúa como amortiguador o tanque de compensación en un proceso. Se supone que el proceso se desarrolla de manera isotérmica, a una temperatura T, y que el flujo a través de la válvula de salida se expresa mediante

$$q_o(t) = \frac{\Delta p(t)}{R_v} = \frac{p(t) - p_2(t)}{R_v} \qquad (3\text{-}29)$$

donde R_v = resistencia al flujo en la válvula, psi/scfm. Se tiene interés en conocer la manera en que la presión en el tanque responde a los cambios en el flujo de entrada, $q_i(t)$, y en la presión de salida de la válvula, $p_2(t)$.

Para este proceso la relación que se requiere la da un balance de masa de estado dinámico:

$$\rho q_i(t) - \rho q_o(t) = \frac{dm(t)}{dt} \qquad (3\text{-}30)$$

1 ecuación, 2 incógnitas ($qo(t)$, $m(t)$)

donde:

$m(t)$ = masa del gas en el tanque, lb
ρ = densidad del gas en condiciones estándar de 14.7 psia y 60°F, lb/pies^3.

Si la presión en el tanque es baja, la relación entre la masa del gas y la presión se establece con la ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p(t) = \frac{RT}{VM} m(t) \qquad (3\text{-}31)$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas ($p(t)$)

donde:

T = temperatura absoluta en el tanque, °R
V = volumen del tanque, pies^3
M = peso molecular del gas
R = constante de los gases perfectos = $10.73 \dfrac{\text{pies}^3\text{-psia}}{\text{lb mol-°R}}$

A partir de la expresión que representa el flujo a través de la válvula de salida, ecuación (3-29), se obtiene otra ecuación:

$$q_o(t) = \frac{p(t) - p_2(t)}{R_v} \tag{3-29}$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas

Con la substitución de las ecuaciones (3-29) y (3-31) en la ecuación (3-30) se tiene

$$\rho q_i(t) - \rho \frac{[p(t) - p_2(t)]}{R_v} = \frac{VM}{RT}\frac{dp(t)}{dt} \tag{3-32}$$

Para obtener las variables de desviación y la función de transferencia se sigue el mismo desarrollo que en el ejemplo precedente. La escritura del balance de masa de estado estacionario de la siguiente expresión:

$$\rho\bar{q}_i - \rho\bar{q}_o = 0$$

$$\rho\bar{q}_i - \rho\frac{(\bar{p} - \bar{p}_2)}{R_v} = 0$$

Se substrae la ecuación (3-33) de la (3-32) para obtener

$$\rho(q_i(t) - \bar{q}_i) \quad \frac{\rho}{R_v}\,[(p(t) - \bar{p}) - p_2(t) - \bar{p}_2)] = \frac{VM}{RT}\frac{d(p(t) - \bar{p})}{dt} \tag{3-34}$$

Las variables de desviación se definen como

$$Q(t) = q_i(t) - \bar{q}_i$$
$$P(t) = p(t) - \bar{p}$$

Y

$$P_2(t) = p_2(t) - \bar{p}_2$$

Al substituir estas variables de desviación en la ecuación (3-34) y reordenar la ecuación algebraicamente, se tiene

$$\tau\frac{dP(t)}{dt} + \mathrm{P(r)} = K_1Q_i(t) + P_2(t) \tag{3-35}$$

donde:

$$\tau = \frac{VM R_v}{RT\rho}, \quad \text{minutos}$$

$$K_1 = R_v, \quad \text{psia/scfm}$$

Se obtiene la transformada de **Laplace,** lo que da la relación entre la respuesta o variable de salida $P(t)$ y las funciones forzadas $Q_i(t)$ y $P_2(t)$:

$$P(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1} Q_i(s) + \frac{1}{\tau s + 1} P_2(s) \tag{3-36}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de transferencia entre $P(s)$ y $Q_i(s)$

$$\frac{P(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \tag{3-37}$$

y entre $P(s)$ y $P_2(s)$:

$$\frac{P(s)}{P_2(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{3-38}$$

Ambas funciones de transferencia son de primer arden.

A estas alturas se empieza a crear las condiciones para la respuesta completa de cualquier sistema de primer orden; por ejemplo, mediante el **análisis** de la ecuación (3-37) se sabe que si el flujo de entrada al tanque cambia en + 10 scfm, la presión en el tanque cambiará en un total de $10K_1$ psi, lo cual es verdad si ninguna otra perturbación afecta al proceso; también se sabe que un cambio de 0.632 $(10K_1)$ en la presión tiene lugar en una constante de tiempo, τ, como se ilustra gráficamente en la figura 3-5. Recuérdese

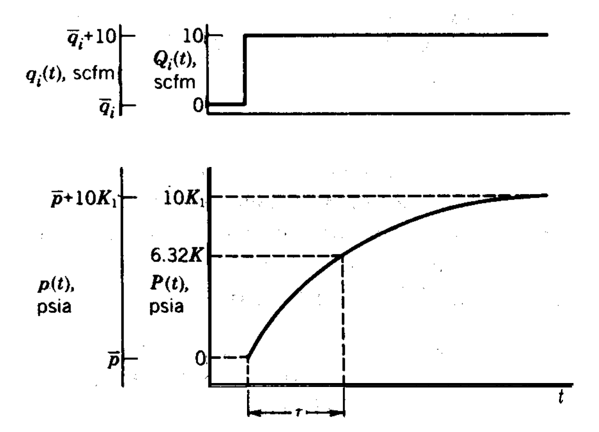


Figura 3-5. Respuesta de la presión al cambio escalón del flujo de entrada del gas.

que K_1 es la ganancia que $Q_i(t)$ tiene sobre P(t) y que τ proporciona la velocidad de respuesta de P(t) una vez que responde al cambio en $Q_i(t)$.

De manera similar, mediante la observación de la ecuación (3-38) se ve que, cuando la presión de salida de la válvula cambia en -2 psi, el cambio total en la presión del tanque es de -2 psi, la ganancia de $P_2(t)$ sobre P(t) es de $+1$ psi/psi. Si la presión de salida decrece, entonces habrá una mayor caída de presión en la sección de la válvula, lo que da como resultado una salida mayor del tanque y, en consecuencia, una reducción en la presión en el tanque. También se sabe que el 63.2% del cambio total de presión, o $0.632(-2)$ psi, tiene lugar en τ minutos.

3-3. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES

Funciones de transferencia

El concepto función de transferencia es uno de los más importantes en el estudio de la dinámica de proceso y del control automático de proceso, por lo que es recomendable considerar aquí algunas de sus propiedades y características.

La función de transferencia ya se definió como la relación de la transformada de Laplace de la variable de salida sobre la transformada de Laplace de la variable de entrada.

La función de transferencia se representa generalmente por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + 1)}{(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1)} \tag{3-39}$$

donde:

$G(s)$ = representación general de una función de transferencia
$Y(s)$ = transformada de Laplace de la variable de salida
$X(s)$ = transformada de Laplace de la función de forzamiento o variable de entrada
K, $a$es y $b$es = constantes.

En la ecuación (3-39) se muestra la mejor manera de escribir la función de transferencia; cuando se escribe de esta manera, K representa la ganancia del sistema y tiene como unidades las de $Y(s)$ sobre las unidades de X(s). Las otras constantes, las a y las b, tienen como unidades (tiempo)^i, donde i es la potencia de la variable de Laplace, s, que se asocia con la constante particular, lo que da como resultado un término sin dimensiones dentro del paréntesis, ya que la unidad de s es 1/tiempo.

Nota: En general, la unidad de s es el recíproco de la unidad de la variable independiente que se usa en la definicón de la transformada de Laplace, ecuación (2-1). En la dinámica y control del proceso la variable independiente es el tiempo y, en consecuencia, la unidad de s es 1/tiempo.

Nótese que el coeficiente de s^0 es 1.

La función de transferencia ***define** completamente* las características de estado estacionario y dinámico, es decir, la respuesta total de un sistema que se describe mediante una *ecuación diferencial lineal.* **Ésta** es característica del sistema, y sus términos determinan si el sistema es estable o inestable y si su respuesta a una entrada no oscilatoria es oscilatoria o no. Se dice que el sistema o proceso es estable cuando su salida se mantiene limitada (finita) para una entrada limitada. En los capítulos 6 y 7 se trata con más detalle el tema de la estabilidad de los sistemas de proceso.

Las siguientes son algunas propiedades importantes de las funciones de transferencia:

1. En las funciones de transferencia de los sistemas **físicos** reales, la potencia más alta da s en el numerador nunca es mayor a la del denominador; en otras palabras, $n \geq m$.
2. La función de transferencia relaciona las transformadas de las variables de entrada con las de salida, a partir de algún estado inicial estacionario; de lo contrario, las condiciones iniciales que no son cero originan términos adicionales en la transformada de la variable de salida.
3. Para los sistemas estables, la relación de estado estacionario entre el cambio en la variable de entrada y el cambio en la variable de salida se obtiene con

$$\lim_{s\to 0} G(s)$$

Lo cual se deriva del teorema del valor final que se presentó en el capítulo 2:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sG(s)X(s) \\
&= \left[\lim_{s\to 0} G(s)\right]\left[\lim_{s\to 0} sX(s)\right] \\
&= \left[\lim_{s\to 0} G(s)\right] \lim_{t\to\infty} x(t)
\end{aligned}$$

Esto significa que el cambio en la variable de salida, después de un tiempo muy largo, si esta limitado, se obtiene al multiplicar la función de transferencia con $s = 0$ veces el valor final del cambio en la entrada.

Diagramas de bloques

La representación gráfica de las funciones de transferencia por medio de diagramas de bloques es una herramienta muy útil en el control de proceso. James Watt introdujo por primera vez estos diagramas de bloques cuando aplicó el concepto de control por **retroalimentación** a la máquina de vapor, como se mencionó en el capitulo 1. La máquina de

vapor constaba de varios acoplamientos y otros dispositivos mecánicos lo suficientemente complejos como que Watt decidiera ilustrar gráficamente en su esquema de control la interacción de todos esos dispositivos. En esta sección se presenta una introducción a los diagramas y al álgebra de bloques.

En general, los diagramas de bloques constan de cuatro elementos básicos: flechas, puntos de sumatoria, puntos de derivación y bloques; en la figura 3-6 se ilustran estos elementos, de cuya combinación se forman todos los diagramas de bloques. Las flechas indican, en general, el flujo de información; representan las variables del proceso o las señales de control; cada punta de flecha indica la dirección del flujo de información. Los ***puntos de sumatoria*** representan la suma algebraica de las flechas que entran ($E(s) = R(s) - C(s)$). El ***punto de bifurcación*** es la posición sobre una flecha, en la cual la información sale y va de manera concurrente a otros puntos de sumatoria o bloques. Los ***bloques*** representan la operación matemática, en forma de función de transferencia, por ejemplo, $G_c(s)$, que se realiza sobre la señal de entrada (flecha) para producir la señal de salida. Las flechas y los bloques de la figura 3-6 representan la siguiente expresión matemática:

$$M(s) = G_C(s)E(s) = G_C(s)(R(s) - C(s))$$

Cualquier diagrama de bloques se puede tratar o manejar de manera algebraica; en la tabla 3-1 se muestran algunas reglas del álgebra de los diagramas a bloques, las cuales son importantes siempre que se requiere simplificar los diagramas de bloques.

A continuación se verán algunos ejemplos del álgebra de los diagramas de bloques.

Ejemplo 3-1. Dibújese el diagrama a bloques para las ecuaciones (3-11) y (3-23).

La ecuación (3-11) aparece en la figura 3-7; la ecuación (3-23) se puede dibujar de dos maneras diferentes, como se muestra en la figura 3-8.

En los diagramas a bloques de la ecuación (3-23) se ilustra gráficamente que la respuesta total del sistema se obtiene mediante la adición algebraica de la respuesta a que da origen el cambio en la temperatura de entrada y la respuesta debida al cambio en la temperatura ambiente. ***Esta propiedad de la suma algebraica de las respuestas debidas a varias entradas para obtener la respuesta final es particular de los sistemas lineales y se conoce como principio de superposición.*** Este principio también sirve como base para definir los sistemas lineales; esto es, se dice que un sistema es lineal si obedece al principio de superposición.

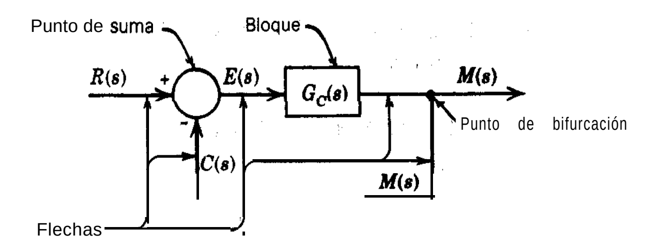


Figura 3-6. Elementos de un diagrama de bloques.

Tabla 3-1 Reglas del álgebra de los diagramas de bloques

1. $Y = A - B - C$

2. $Y = G_1G_2A$

3. $Y = G_1(A - B)$

4. $Y = (G_1 + G_2)A$

5. $Y = G_1A + G_2B$

Ejemplo 3-2. Determínese la función de transferencia que relaciona Y(s) con $X_1(s)$ y $X_2(s)$, a partir del diagrama de bloques de la figura 3-9*a*; es decir, obténgase

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} \quad \text{y} \quad \frac{Y(s)}{X_2(s)}$$

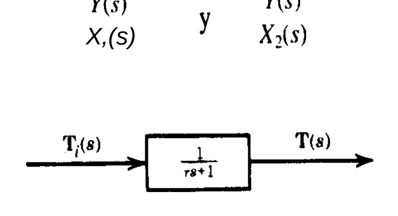


Figura 3-7. Diagrama de bloques de la ecuación (3-11).

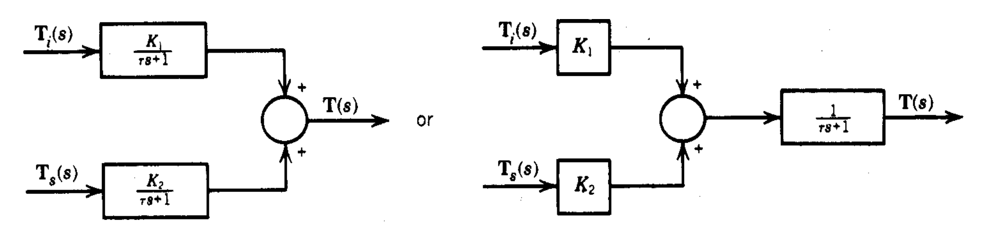


Figura 3-8. Diagrama de bloques para la ecuación (3-23).

El diagrama de la figura 3-9*a* se puede reducir al de la figura 3-9*b* mediante la regla 4; después se puede reducir aún más, al diagrama de la figura 3-9*c*, con la aplicación de la regla 2. Entonces

$$Y(s) = G_3(G_1 - G_2)X_1(s) + (G_4 - 1)X_2(s)$$

a partir de la cual se pueden determinar las dos funciones de transferencia que se desean:

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_3(G_1 - G_2)$$

$$\frac{Y(s)}{X_2(s)} = G_4 - 1$$

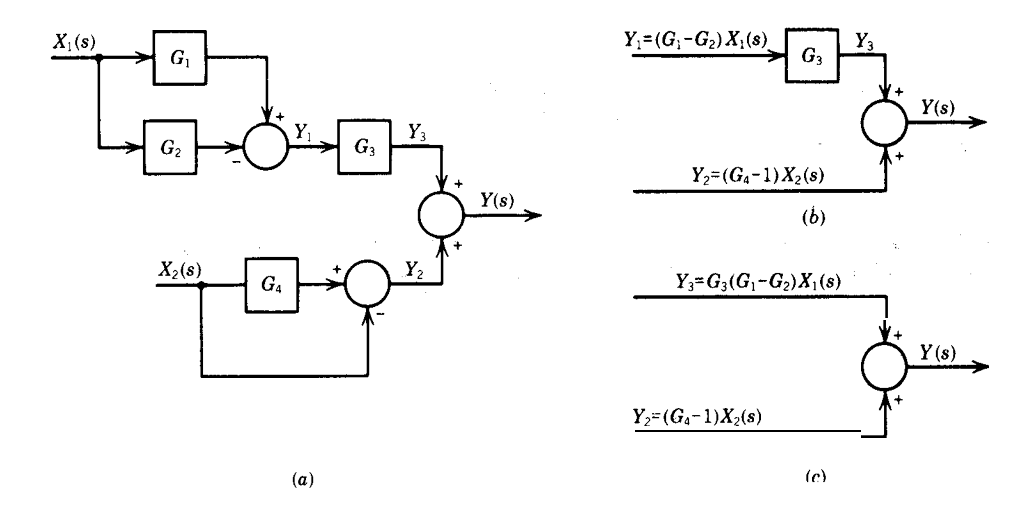


Figura 3-9. Álgebra de los diagramas de bloques.

Con este ejemplo se ilustra el procedimiento para reducir un diagrama de bloques a una función de transferencia; tal reducción es necesaria en el estudio del control de proceso, como se verá en los capítulos 6, 7 y 8, en los cuales se desarrollarán numerosos ejemplos de diagramas de bloques de sistemas de control por retroalimentación, en cascada y por acción precalculada. A continuación se estudia la reducción de algunos de dichos diagramas a funciones de transferencia.

Ejemplo 3-3. En la figura 3-10 se ilustra el diagrama a bloques del sistema típico de control por retroalimentación. A partir de este diagrama se debe determinar

$$\frac{C(s)}{L(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C(s)}{C^{\text{fija}}(s)}$$

Mediante la aplicación de las reglas 2, 3 y 5 se encuentra que

$$C(s) = G_C G_2 G_3 G_4 E(s) + G_5 G_4 L(s) \tag{3-40}$$

También, al aplicar la regla 5 se obtiene

$$E(s) = G_1 C^{\text{fija}}(s) - G_6 C(s) \tag{3-41}$$

De la substitución de la ecuación (3-41) en la (3-40) resulta

$$C(s) = G_1 G_C G_2 G_3 G_4 C^{\text{fija}}(s) - G_C G_2 G_3 G_4 G_6 C(s) + G_5 G_4 L(s)$$

y, después de algún manejo algebraico, se tiene

$$C(s) = \frac{G_1 G_C G_2 G_3 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} C^{\text{fija}}(s) + \frac{G_5 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} L(s) \tag{3-42}$$

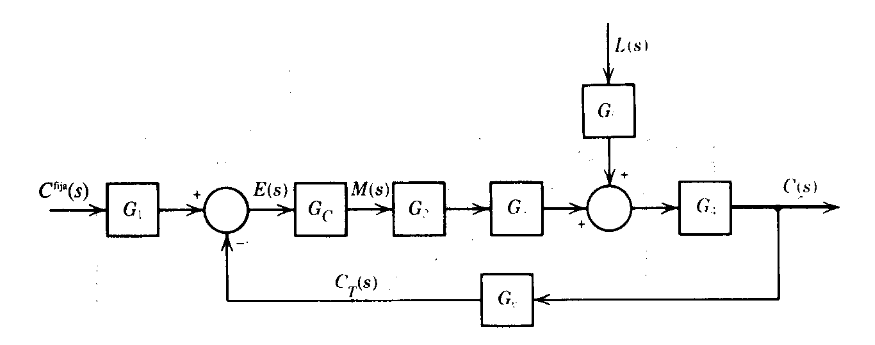


Figura 3-10. Diagrama de bloques de un sistema de control por retroalimentación.

Ahora se obtiene las funciones individuales de transferencia a partir de la ecuación (3-42):

$$\frac{C(s)}{C^{\text{fija}}(s)} = \frac{G_1 G_C G_2 G_3 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} \tag{3-43}$$

y

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_5 G_4}{1 + G_C G_2 G_3 G_4 G_6} \tag{3-44}$$

En el ejemplo 3-3 se muestra cómo reducir a funciones de transferencia el diagrama de bloques simple de un circuito de retroalimentación de control. Este tipo de diagramas de bloques y de funciones de transferencia serán útiles en los capítulos 6 y 7, cuando se aborde el control por retroalimentación.

Las funciones de transferencia de las ecuaciones (3-43) y (344) se conocen como "funciones de transferencia de circuito cerrado", la razón del uso de este término se torna evidente en el capítulo 6. Al observar la ecuación (3-43) es notorio que el numerador es el producto de todas las funciones de transferencia en la trayectoria hacia adelante entre las dos variables que relaciona la función de transferencia $C^{\text{fija}}(s)$ y $C(s)$; el denominador de esta ecuación es uno (1) más el producto de todas las funciones en el circuito de control. En la figura 3-11 se muestra el mismo diagrama de bloques de la figura 3-10, pero se indica cuál es el significado del circuito de control. Un análisis de la ecuación (3-44) muestra que el numerador es nuevamente el producto de las funciones de transferencia en la trayectoria hacia adelante entre $L(s)$ y C(s); el denominador es el mismo de la ecuación (3-43).

Con el apoyo de las ecuaciones (3-43) y (3-44) se puede generalizar la forma de la función de transferencia de circuito cerrado que se obtiene a partir de diagramas similares al de la figura 3-10.

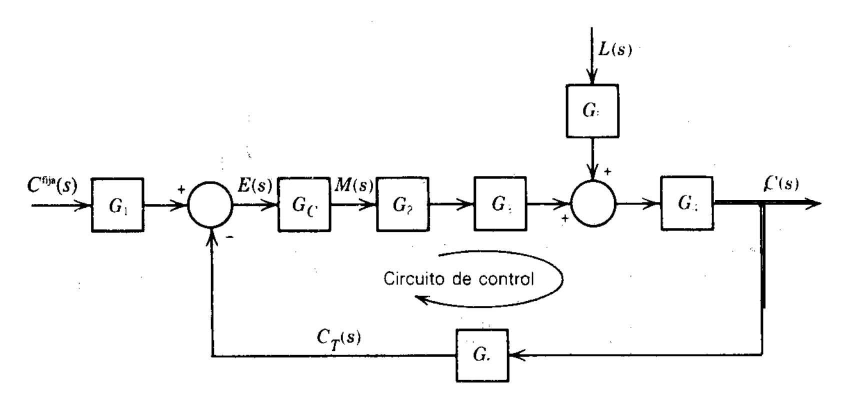


Figura 3-11. Diagrama de bloques para ilustrar el circuito de control.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=1}^{L}\left[\prod_{j=1}^{J} G_j\right]_l}{1 + \sum_{k=1}^{K}\left[\prod_{i=1}^{I} G_i\right]_k} \tag{3-45}$$

donde:

L = cantidad de trayectorias hacia adelante entre $X(s)$ y $Y(s)$
J = cantidad de funciones de transferencia en cada trayectoria hacia adelante entre X(s) y $Y(s)$
G_j = función de transferencia en cada trayectoria hacia adelante
K = cantidad de circuitos combinados en el diagrama a bloques
I = cantidad de funciones de transferencia en cada circuito
G_i = función de transferencia en cada circuito

El **término** del numerador de la **ecuación** (3-45) indica que se multiplican juntas las J funciones de transferencia, G_j, en cada trayectoria hacia adelante, y entonces se suman las L trayectorias hacia adelante. El denominador es 1 (uno) más la sumatoria de los productos de las I funciones de transferencia, G_i, en cada circuito, para los K circuitos.

Ejemplo 3-4. Considérese otro diagrama a bloques típico, como el de la figura 3-12; en el capítulo 8 se muestra que con este diagrama de bloques se describe un sistema de control en cascada. Determínense las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C(s)}{L(s)}$$

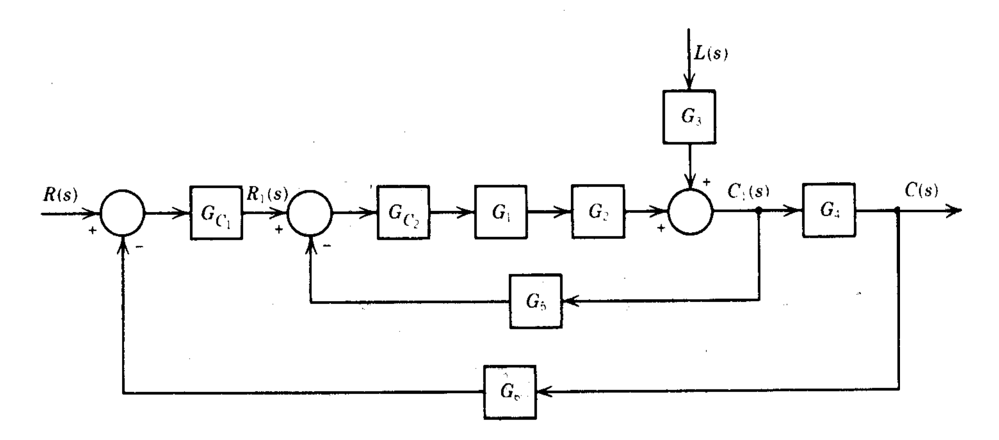


Figura 3-12. Diagrama de bloques de un sistema de control en cascada.

Se puede pensar que el diagrama a bloques de la figura 3-12 esta compuesto de dos sistema de circuito cerrado, uno dentro del otro (en la práctica esto es exactamente **10** que sucede). Por lo tanto, el primer paso es reducir el circuito interno; en la figura 3-13 se muestra este circuito por separado. Mediante la ecuación (3-45) se pueden determinar las siguientes dos funciones de transferencia para este circuito interno:

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{C_2}G_1G_2}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5} \tag{3-46}$$

$$\frac{C_1(s)}{L(s)} = \frac{G_3}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5} \tag{3-47}$$

Al substituir en el diagrama de bloques original estas dos funciones de transferencia, ecuaciones (3-46) y **(3-47),** se obtiene un nuevo diagrama de bloques reducido, como se ilustra en la figura 3-14. Con dicho diagrama de bloques y la ecuación (3-45) se pueden determinar las funciones de transferencia que se desean.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5}}{1 + \dfrac{G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4G_6}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5}} = \frac{G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5 + G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4G_6} \tag{3-48}$$

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{\dfrac{G_3G_4}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5}}{1 + \dfrac{G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4G_6}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5}} = \frac{G_3G_4}{1 + G_{C_2}G_1G_2G_5 + G_{C_1}G_{C_2}G_1G_2G_4G_6}$$

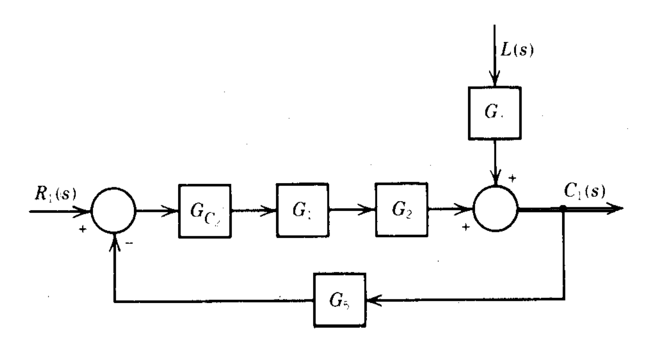


Figura 3-13. Diagrama de bloques del circuito interno.

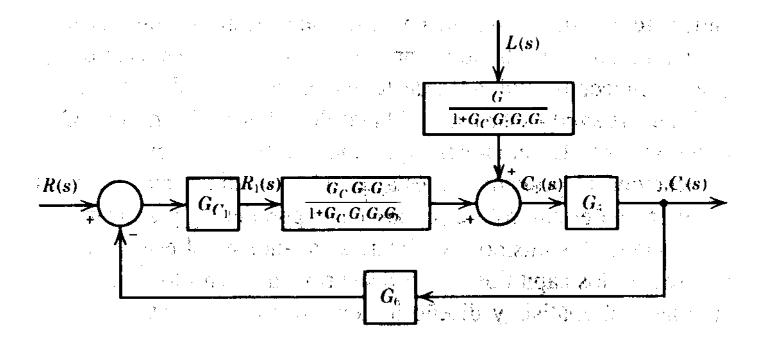


Figura 3-14. Diagrama de bloques reducido.

Ejemplo 3-5. A partir del diagrama de bloques de la figura 3-15, determínense las funciones de transferencia $C(s)/R(s)$ y $C(s)/L(s)$.

La primera función de transferencia que se requiere, $C(s)/R(s)$, se puede determinar fácilmente, ya que sólo existe una trayectoria hacia adelante entre las dos variables implicadas.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C G_1 G_2 G_3}{1 + G_C G_1 G_2 G_3 G_6}$$

Para obtener la segunda función de transferencia es necesario percatarse de que existen dos trayectorias hacia adelante entre $L(s)$ y $C(s)$. Mediante el uso de la ecuación (3-45) se obtiene

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{(G_4 - G_5 G_1 G_2) G_3}{1 + G_C G_1 G_2 G_3 G_6}$$

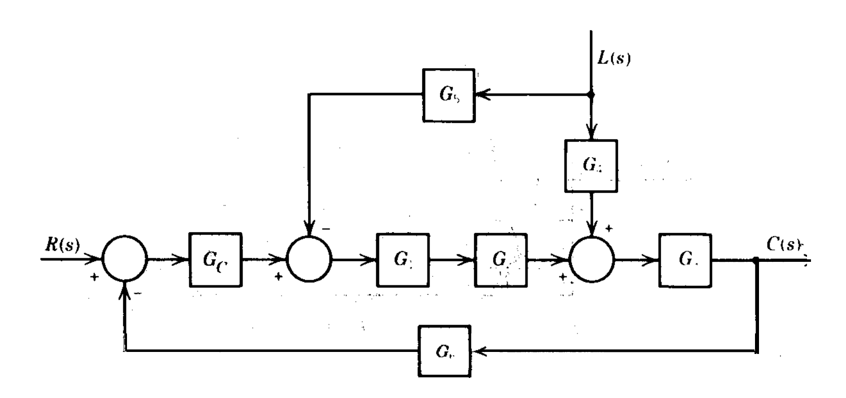


Figura 3-15. Diagrama de bloques de un sistema de control por acción precalculada.

Una recomendación útil es escribir cerca de cada flecha las unidades de la variable de proceso o señal de control a la que representa la flecha; si se hace esto, entonces es bastante simple reconocer las unidades de la ganancia en un bloque, las cuales son las unidades de la flecha de salida sobre las unidades de la flecha de entrada. Con este procedimiento también se evita la sumatoria algebraica de flechas con diferentes unidades.

Como se mencionó al principio de esta sección, los diagramas de bloques son una herramienta muy útil en el control de proceso; se aprenderá y practicará más acerca de la lógica y el trazado de los mismos conforme se avance en el estudio de la dinámica y control de proceso. En los capítulos 6, 7 y 8 se utilizan mucho los diagramas de bloques como auxiliares para el análisis y diseño de los sistemas de control.

3-4. TIEMPO MUERTO

Considérese el proceso que se muestra en la figura 3-16, que es esencialmente el mismo de la figura 3-1, la diferencia consiste en que, en este caso, lo que interesa es conocer cómo responde $T_1(t)$ a los cambios en la temperatura de entrada y ambiente.

Se hacen las siguientes suposiciones acerca del conducto de salida entre el tanque y el punto 1: Primera, el conducto está bien aislado; segunda, el flujo del líquido a través del conducto es altamente turbulento (flujo de acoplamiento), de tal manera que básicamente no hay mezcla de retorno en el líquido.

Bajo estas suposiciones, la respuesta de $T_1(t)$ a los disturbios $T_1(t)$ será la misma que $T(t)$, con la excepción de que tiene un retardo de, cierto intervalo de tiempo, es decir, existe un lapso finito entre la respuesta de í”(t) y la respuesta de $T_1(t)$, lo cual se ilustra; gráficamente en la figura 3-17, para un cambio en escalón de la temperatura de entrada $T_i(t)$. El intervalo entre el momento en que el disturbio entra al proceso y el tiempo en que la temperatura $T_1(t)$ empieza a responder *se* conoce como *tiempo muerto,* retardo de tiempo o retardo de transporte y se representa mediante el término t_0.

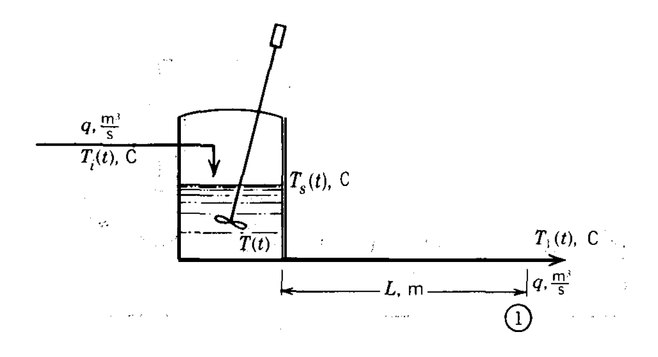


Figura 3-16. Proceso térmico.

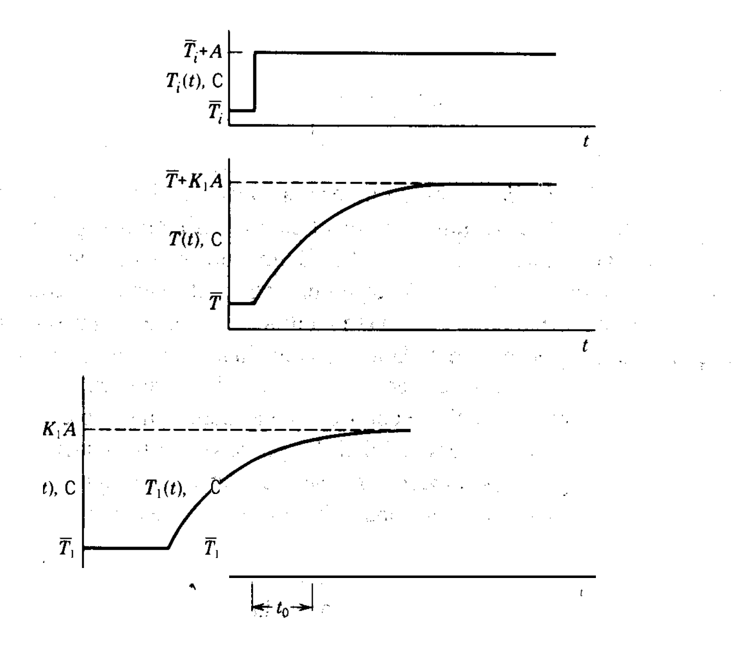


Figura 3-17. Respuesta del proceso térmico a un-cambio escalón en la temperatura de entrada.

En este ejemplo en particular, el tiempo muerto puede calcularse de la siguiente manera:

$$t_0 = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{L}{q/A_p} = \frac{A_pL}{q} \tag{3-49}$$

donde:

t_0 = tiempo muerto, segundos
A_p = área transversal del conducto, m^2
L = longitud del conducto, m

El tiempo muerto es parte integral del proceso y, consecuentemente, se debe tomar en cuenta en las funciones de transferencia que relacionan $T_1(t)$ con $T_i(t)$ y Z"(t). La ecuación (2-9) expresa que la transformada de Laplace de una función con retardo es igual al producto de la transformada de Laplace de la función, sin retardo, por el término e^{-t_0s}. El término e^{-t_0s} es la transformada de Laplace del puro tiempo muerto y, por tanto, si lo que interesa es la respuesta de $T_1(t)$ a los cambios en $T_i(t)$ y T'(t), se deben multiplicar las funciones de transferencia, ecuaciones (3-24) y (3-25), por e^{-t_0s} o

$$\frac{T_1(s)}{T_i(s)} = \frac{K_1e^{-t_0s}}{\tau s + 1} \tag{3-50}$$

Y

$$\frac{T_1(s)}{T_s(s)} = \frac{K_2 e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \tag{3-51}$$

En este ejemplo se desarrolla el tiempo muerto a causa del tiempo que toma que el líquido se mueva desde la salida del tanque hasta el punto 1. Sm embargo, en la **mayoría** de los procesos el tiempo muerto no se define tan fácilmente, generalmente es inherente y se distribuye a lo largo del proceso, es decir, en el tanque, el reactor, la columna, etc.; en **tales** casos, el valor numérico no se **evalúa tan** fácilmente como en el presente ejemplo, sino que se requiere un modelo muy detallado o una evaluación empírica. En el capítulo 6 se ilustra la manera de efectuar la evaluación empírica.

En este punto se debe reconocer que el tiempo muerto es otro parámetro que ayuda en la definición de la personalidad del proceso. En la ecuación (3-49) se aprecia que t_0 depende de algunas propiedades físicas y **características** operativas del proceso, como son K y τ. Si cambia cualquier condición del proceso, esa variación se puede reflejar en un cambio de t_0.

Antes de **concluir** esta sección es necesario mencionar que lapresencia de una cantidad significativa de tiempo muerto en un proceso, es la ***peor*** cosa que le puede ocurrir a un sistema de control; como se verá en los capítulos 6 y 7, el tiempo muerto afecta severamente el funcionamiento de un sistema de control.

3-5. NIVEL EN UN PROCESO

Considérese el proceso que se muestra en la figura 3-18, en éste se tiene interés en conocer cómo responde el nivel, h(t), del líquido en el tanque a los cambios en el flujo de entrada, $q_i(t)$, y a los cambios en la apertura de la válvula de salida, $vp(t)$.

Como se verá en el capítulo 5, el flujo de líquido a través de una **válvula** esta dado por

$$q(t) = C_v(vp(t))\sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G}}$$

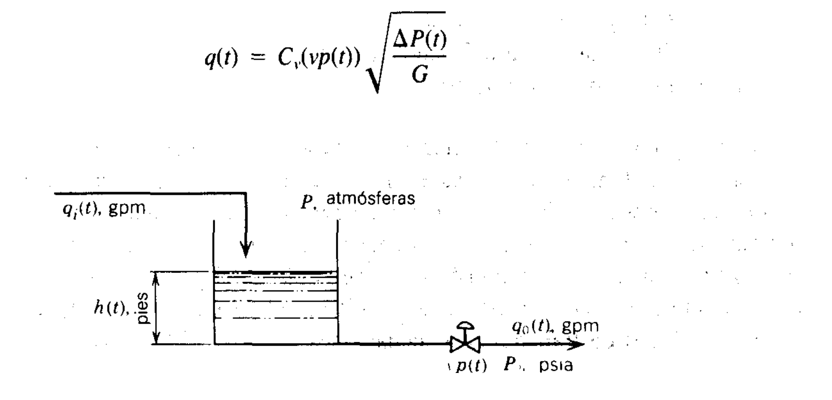


Figura 3-18. Nivel del proceso.

donde:

$q(t)$ = flujo, gpm
C_v = coeficiente de la válvula, gpm/(psi)$^{1/2}$
$vp(t)$ = posición de la válvula. Este término representa la fracción de apertura de la válvula; si su valor es 0, eso indica que la válvula esta cerrada; si su valor es 1, indica que la válvula está completamente abierta.
$\Delta P(t)$ = caída de presión a través de la válvula, psi
G = gravedad específica del líquido que fluye a través de la válvula, sin dimensiones .

Para este proceso, la caída de presión a través de la válvula esta dada por

$$\Delta P(t) = P + \frac{\rho g h(t)}{144 g_c} - P_2$$

donde:

P = presión sobre el líquido, psia
ρ = densidad del líquido, lbm/pies^3
g = aceleración debida a la gravedad, 32.2 pies/seg^2
g_c = factor de conversión, 32.2 lbm-pies/lbf-seg^2
h(t) = nivel en el tanque, pies
P_2 = presión de salida de la válvula hacia adelante, psia

En esta ecuación se supone que las pérdidas por fricci6n.a lo largo del conducto que va del tanque a la válvula son despreciables.

La relación que se desea es posible obtenerla a partir de un balance de masa de estado dinámico alrededor del tanque:

$$\frac{\rho q_i(t)}{7.48} - \frac{\rho q_o(t)}{7.48} = \frac{dm(t)}{dt}$$

o

$$\frac{\rho q_i(t)}{7.48} - \frac{\rho q_o(t)}{7.48} = A\rho\frac{dh(t)}{dt}$$

donde:

A = área transversal del tanque; pies^2
7.48 = factor de conversión de gal a pies^3

Si se supone que la densidad de entrada es igual a la densidad de salida, se tiene

$$q_i(t) - q_o(t) = 7.48A\frac{dh(t)}{dt} \tag{3-52}$$

1 ecuación, 2 incógnitas $(q_o(t), h(t))$

Ahora se tiene una ecuación con dos incógnitas y, por tanto, se debe encontrar otra ecuación independiente para describir el proceso; la de la **válvula** proporciona la otra ecuación que se requiere:

$$q_o(t) = C_v(vp(t))\sqrt{\frac{\left(P + \frac{\rho g h(t)}{144 g_c} - P_2\right)}{G}} \tag{3-53}$$

2 ecuaciones, 2 incógnitas

Con este sistema de ecuaciones, (3-52) y **(3-53),** se describe al proceso. Para simplificar esta descripción se puede substituir la ecuación (3-53) en la (3-52):

$$q_i(t) - C_v(vp(t))\sqrt{\frac{\left(P + \frac{\rho g h(t)}{144 g_c} - P_2\right)}{G}} = 7.48A\frac{dh(t)}{dt} \tag{3-54}$$

No es posible resolver esta ecuación de manera analítica, a causa de la naturaleza no lineal del segundo termino en el lado izquierdo de **la misma.** La **única** forma de resolverla analíticamente es linealizando el **término** no lineal; la otra única manera de resolverla es mediante **métodos numéricos** (solución por computadora).

En el capítulo 2 se describió la manera de linealizar los **términos** no lineales mediante la utilización de la expansión de series de Taylor. A continuación se aplica esta técnica para linealizar el **término** no lineal de la ecuación (3-54). Puesto que este **término** se debe **linealizar** respecto a h y vp, la **linealización** se debe hacer alrededor de los valores $\bar{h}$ y $\overline{vp}$, que son los valores nominales de estado estacionario:

$$q_o(t) \simeq \bar{q}_o + \left.\frac{\partial q_o}{\partial vp}\right|_{ss}(vp(t) - \overline{vp}) + \left.\frac{\partial q_o}{\partial h}\right|_{ss}(h(t) - \bar{h})$$

o

$$q_o(t) \simeq \bar{q}_o + C_v\sqrt{\frac{P + \frac{\rho g \bar{h}}{144 g_c} - P_2}{G}}(vp(t) - \overline{vp})$$
$$+ \frac{C_v \rho g \overline{vp}}{288 g_c G}\left[\frac{P + \frac{\rho g \bar{h}}{144 g_c} - P_2}{G}\right]^{-1/2}(h(t) - \bar{h})$$

Para simplificar la notación, sea

$$C_1 = C_v \sqrt{\frac{P + \dfrac{\rho g \bar{h}}{144 g_c} - P_2}{G}} \tag{3-55}$$

$$C_2 = \frac{C_v \rho g \overline{vp}}{288 G g_c}\left[\frac{P + \dfrac{\rho g \bar{h}}{144 g_c} - P_2}{G}\right]^{-1/2} \tag{3-56}$$

de manera que

$$q_o(t) \simeq \bar{q}_o + C_1(vp(t) - \overline{vp}) + C_2(h(t) - \bar{h}) \tag{3-57}$$

Al substituir esta última ecuación en la ecuación **(3-54)**, se obtiene una ecuación diferencial lineal:

$$q_i(t) - \bar{q}_o - C_1(vp(t) - \overline{vp}) - C_2(h(t) - \bar{h}) = 7.48A\frac{dh(t)}{dt} \tag{3-58}$$

No se debe perder de vista el hecho de que, como se explicó en el capítulo 2, ésta es una versión linealizada de la ecuación (3-54). Como se explicó en la sección 2-2, con la ecuación (3-58) se pueden obtener soluciones precisas alrededor del punto de **linealización**, $\bar{h}$ y $\overline{vp}$; **fuera** de un cierto rango alrededor de este punto, termina la linealización, lo cual da lugar a resultados erróneos.

Ahora que se tiene una ecuación diferencial lineal, se pueden obtener las funciones de transferencia que se desean, para lo cual se continúa con el proceso anterior. Al escribir el balance de masa de estado estacionario alrededor del tanque se ve que

$$\rho\bar{q}_i - \rho\bar{q}_o = 0$$

o

$$\bar{q}_i - \bar{q}_o = 0$$

Al substraer esta ecuación de la (3-58) Se obtiene

$$(q_i(t) - \bar{q}_i) - C_1(vp(t) - \overline{vp}) - C_2(h(t) - \bar{h}) = 7.48A\frac{d(h(t) - \bar{h})}{dt}$$

Y se definen las siguientes variables de desviación:

$$Q_i(t) = q_i(t) - 4,$$
$$VP(t) = vp(t) - \overline{vp}$$
$$H(t) = h(t) - \bar{h}$$

Se substituyen estas variables de desviación en la ecuación diferencial linealizada

$$Q_i(t) - C_1 VP(t) - C_2 H(t) = 7.48A \frac{dH(t)}{dt} \qquad (3\text{-}59)$$

y, al reordenar esta ecuación algebraicamente, se tiene

$$\tau \frac{dH(t)}{dt} + H(t) = K_1 Q_i(t) - K_2 VP(t)$$

donde:

7 = $7.48A/C_2$, minutos
K_1 = $1/C_2$, pies/gpm
K_2 = C_1/C_2, pies/posición de la válvula

Finalmente se obtiene la transformada de Laplace

$$H(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1} Q_i(s) - \frac{K_2}{\tau s + 1} VP(s)$$

a partir de la cual se obtienen las dos funciones de transferencia

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \qquad (3\text{-}60)$$

Y

$$\frac{H(s)}{VP(s)} = \frac{-K_2}{\tau s + 1} \qquad (3\text{-}61)$$

El lector debe comprobar por sí mismo que las unidades de la constante de tiempo y las ganancias son las correctas; también debe recordar el significado de estos tres parámetros; K_1 es la ganancia o sensibilidad de $Q_i(t)$, en relación a H(t), lo cual da la cantidad de cambio del nivel en el tanque por unidad de cambio de flujo de entrada al tanque. El cambio tiene lugar mientras se mantiene una apertura constante en la válvula de salida; K_2 proporciona la, cantidad de cambio de nivel en el tanque por unidad de cambio en la posición de la válvula. Nótese que el signo de la ganancia es negativo, lo cual indica que,

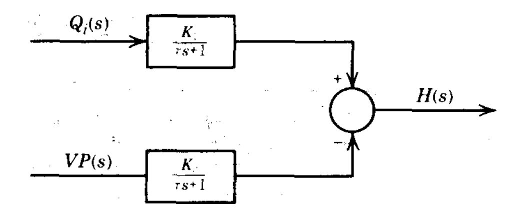


Figura 3-19. Diagrama de bloques del nivel en un proceso.

conforme la posición de la **válvula** cambia positivamente y se abre la misma, el nivel cambia negativamente o cae, lo cual tiene sentido físicamente.

En la figura 3-19 se muestra el diagrama de bloques de este proceso. En este ejemplo se eligió hacer la linealización del término no lineal alrededor de los valores $\bar{h}$ y $\overline{vp}$, los cuales son los valores nominales de estado estacionario y forman parte de las expresiones de las ganancias y la constante de tiempo; si se elige un valor diferente del estado estacionario para la **linealización,** supóngase $\bar{h}_1$ y $\overline{vp}_1$, los valores numéricos de las ganancias y la constante de tiempo son diferentes. ***Esto indica la no linealidad del proceso,*** los parámetros que describen la ' 'personalidad" del proceso son funciones del nivel de operación o condiciones de operación, lo cual difiere de lo que ocurre en los sistemas lineales, en los cuales estos parámetros son constantes, sobre todo el rango de operación. ***El hecho de que la mayoría de los procesos sean no lineales por naturaleza es muy importante en el control de proceso;*** mientras más alineal es un proceso, más difícil es su control. Por el momento es importante comprender el significado de las alinealidades, de dónde provienen y en qué forma afectan la personalidad del proceso.

3-6. REACTOR QUÍMICO

El reactor químico es el ejemplo típico de un proceso altamente no lineal. Considérese el reactor que se muestra en la figura 3-20. El reactor es un recipiente en el que ocurre la "muy conocida" y 'altamente exotérmica reacción $A \rightarrow B$; para eliminar el calor de la reacción, se rodea al reactor con un forro en el que se obtiene vapor saturado a partir de líquido saturado. Se puede suponer que la temperatura del forro, T_s, *es* constante, que el forro está bien aislado, que los reactivos y los productos son líquidos y, sus densidades y capacidades' caloríficas no varían mucho con la temperatura o la composición.

La tasa de reacción esta dada por la siguiente expresión:

$$r_A(t) = k_0 e^{-E/RT(t)} c_A(t), \quad \frac{\text{lb mol producidos de } A}{\text{pies}^3\text{-min}}$$

El factor de frecuencia? k_0, y la energía de activación, E, son constantes específicas para cada reacción; Se considera que el calor de reacción es constante y se expresa por ΔHr en Btu/lb mol de *A,* después de reaccionar.

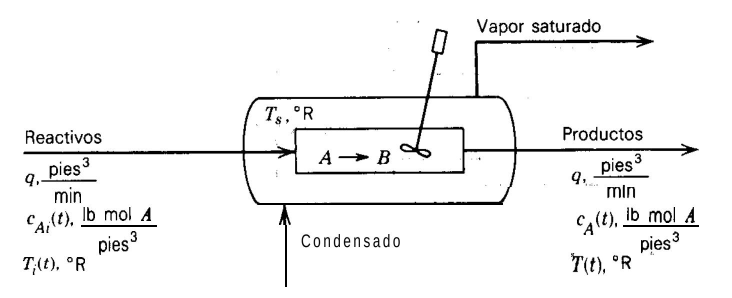


Figura 3-20. Reactor químico.

Se tiene interés en conocer el efecto de los cambios en la concentración de entrada de A, $C_{Ai}(t)$, y de la temperatura de entrada, $T_i(t)$, sobre la concentración de salida de A, $C_A(t)$.

Al escribir el balance molar de estado dinámico para el reactor, se tiene

$$qc_{Ai}(t) - Vr_A(t) - qc_A(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \tag{3-62}$$

1 ecuación, 2 incógnitas ($C_A(t)$, $r_A(t)$)

donde V = volumen del reactor, pies³.

De la tasa de reacción se obtiene otra relación:

$$r_A(t) = k_0 e^{-E/RT(t)} c_A(t) \tag{3-63}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas ($T(t)$)

Aún falta una ecuación independiente para describir completamente este proceso, la relación debe involucrar a la temperatura de reacción. La relación que se requiere es un balance de energia para el reactor:

$$q\rho C_p T_i(t) - Vr_A(t)(\Delta H_r) - UA(T(t) - T_s) - q\rho C_p T(t) = V\rho C_v \frac{dT(t)}{dt} \tag{3-64}$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas

donde

ρ = densidad de los productos y los reactivos, se supone constante, lbm/pies³

C_p = capacitad calorífica a presión constante de los productos y los reactivos, se supone constante, Btu/lbm-°R

C_v = capacidad calorífica a volumen constante, se supone constante, Btu/lbm-°R

U = coeficiente global de transferencia de calor, se supone c ıstante Btu/°R-pies^2-min
A = área de transferencia de calor, pies^2
AH, = calor de reacción, se supone constante, —Btu/lb mol de reacción de A
T_s = temperatura del vapor saturado, °R

Las ecuaciones (3-62), (3-63) y (3-64) describen el reactor químico. Este sistema de ecuaciones es completamente alineal, principalmente la ecuación (3-63) y, nuevamente, la solución de las mismas se' puede obtener mediante métodos numéricos o mediante la linealización del término no lineal, de manera que se pueda obtener una solución analítica aproximada. A continuación se usa el último método para determinar las funciones de transferencia que se desean.

Al linealizar la ecuación (3-63) alrededor de las condiciones de operación $\bar{T}$ y $\bar{c}_A$, se tiene

$$r_A(t) = \bar{r}_A + C_1\mathbf{T}(t) + C_2C_A(t) \qquad (3\text{-}65)$$

donde:

$$\bar{r}_A = k_0e^{-E/R\bar{T}}\bar{c}_A$$

$$C_1 = \left.\frac{\partial r_A(t)}{\partial T(t)}\right|_{ss} = \frac{k_0E\bar{c}_A}{R\bar{T}^2}e^{-E/R\bar{T}}$$

$$C_2 = \left.\frac{\partial r_A(t)}{\partial C_A(t)}\right|_{ss} = k_0e^{-E/R\bar{T}}$$

Y

$$T(t) = T(t) \quad \bar{T}$$

$$C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A$$

Al substituir la ecuación (3-65) en las ecuaciones (3-62) y (3-64), se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales con dos incógnitas:

$$qc_{Ai}(t) - V\bar{r}_A - VC_1\mathbf{T}(t) - VC_2C_A(t) - qc_A(t) = V\frac{dc_A(t)}{dt} \qquad (3\text{-}66)$$

Y

$$q\rho C_pT_i(t) - V(\Delta H_r)\bar{r}_A - V(\Delta H_r)C_1\mathbf{T}(t) - V(\Delta H_r)C_2C_A(t) \qquad (3\text{-}67)$$

$$- UA(T(t) - T_s) - q\rho C_pT(t) = V\rho C_v\frac{dT(t)}{dt}$$

Se usa el método descrito en los ejemplos anteriores para obtener las dos ecuaciones diferenciales en términos de las variables de desviación:

$$qC_{Ai}(t) - VC_1\mathbf{T}(t) \quad VC_2C_A(t) - qC_A(t) = V\frac{dC_A(t)}{dt} \tag{3-68}$$

Y

$$q\rho C_p\mathbf{T}_i(t) - V(\Delta H_r)C_1\mathbf{T}(t) - V(\Delta H_r)C_2C_A(t) - UA\mathbf{T}(t) - q\rho C_p\mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \tag{3-69}$$

donde:

$$C_{Ai}(t) = c_{Ai}(t) - \bar{c}_{Ai}$$
$$\mathbf{T}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$

Al reordenar las ecuaciones (3-68) y (3-69) algebraicamente, se tiene

$$\tau_1 \frac{dC_A(t)}{dt} + C_A(t) = K_1C_{Ai}(t) - K_2\mathbf{T}(t) \tag{3-70}$$

$$\tau_2 \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathrm{T}(t) = K_3\mathbf{T}_i(t) \quad K_4C_A(t) \tag{3-71}$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{V}{VC_2 + q}, \quad \text{minutos}$$

$$K_1 = \frac{4}{VC_2 + q}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_2 = \frac{VC_1}{VC_2 + q}, \quad \frac{\text{lb mol de } A}{\text{pies}^3\text{-}^{\circ}\text{R}}$$

$$\tau_2 = \frac{V\rho C_v}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \quad \text{minutos}$$

$$K_3 = \frac{q\rho C_p}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_4 = \frac{V(\Delta H_r)C_2}{V(\Delta H_r)C_1 + UA + q\rho C_p}, \quad \frac{^{\circ}\text{R-pies}^3}{\text{lb mol de } A}$$

De la obtención de la transformada de **Laplace** de las ecuaciones **(3-70)** y **(3-71),** se tiene

$$C_A(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} C_{Ai}(s) - \frac{K_2}{\tau_1 s + 1} T(s) \quad (3\text{-}72)$$

Y

$$T(s) = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1} T_i(s) - \frac{K_4}{\tau_2 s + 1} C_A(s) \quad (3\text{-}73)$$

En la figura 3-21 se ilustra la representación de bloques de este proceso.

En este proceso de reacción se tiene una nueva característica que no se vio antes. Se trata del primer ejemplo en que existe interacción entre dos variables; se dice que-estas dos variables, la concentración de salida, $C_A(t)$, y la temperatura de salida, T(r), están "acopladas" y cualquier perturbación que afecte a una, efecta a la otra. Por ejemplo, si cambia la temperatura de entrada de los. reactivos, esto afecta a la tempertura de salida, a través de la función de transferencia

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{K_3}{\tau_2 s + 1}$$

Pero si la temperatura de salida cambia, esto afecta también a la concentración de salida, a través de la función de transferencia

$$\frac{C_A(s)}{T(s)} = \frac{K_2}{\tau_1 s + 1}$$

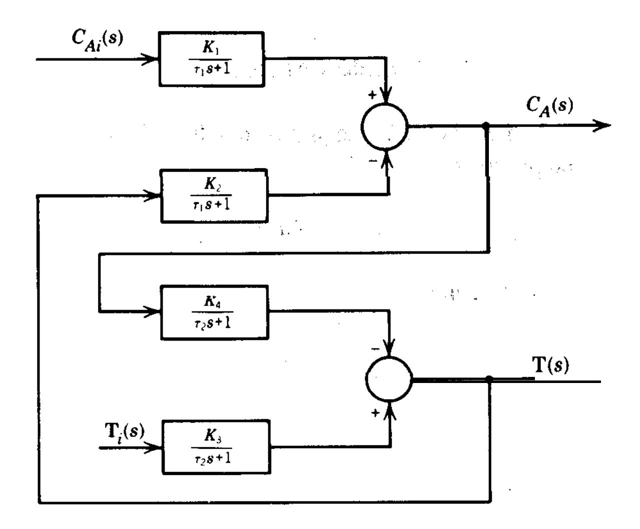


Figura 3-21. Diagrama de bloques de un reactor químico.

Los procesos en que ocurre esto se conocen como interactivos, y el control de ambas variables representa un desafio muy interesante para el ingeniero de proceso o control.

Como en el ejemplo anterior, en éste se debe notar que las ganancias y la constante de tiempo dependen del punto de linealización y, en consecuencia, no son constantes sobre todo el rango, debido a la característica no lineal del proceso.

Antes de concluir este ejemplo, el lector debe verificar las unidades y los signos de las ganancias y las constantes de tiempo, ya que, como se mencionó en un ejemplo anterior, esto puede ayudar en la revisión del desarrollo del modelo antes de llegar a la solución.

3-7. RESPUESTA DEL PROCESO DE PRIMER ORDEN A DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES DE FORZAMIENTO

Ya se vio que la función de transferencia de un proceso de primer orden sin tiempo muerto es de la forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

donde:

$Y(s)$ = transformada de la variable de salida
$X(s)$ = transformada de la función de forzamiento o variable de entrada

En esta sección se estudiará la respuesta de este tipo de proceso a diferentes tipos de funciones de forzamiento, que son las más comunes en el estudio del control automático de proceso.

Función escalón

Un cambio en escalón de A unidades de magnitud en la función de forzamiento se expresa en el dominio del tiempo como

$$X(t) = Au(t) \tag{3-74}$$

y en el dominio de Laplace como

$$X(s) = \frac{A}{s}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{KA}{s(\tau s + 1)}$$

Aquí utilizan los métodos expuestos en el capítulo 2 para regresar de nuevo esta función al dominio del tiempo:

$$Y(t) = KA(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3-75}$$

En la figura 3-22 se ilustran gráficamente la función de forzamiento y la variable de respuesta; es notorio que la mayor pendiente de la curva de respuesta se presenta en el comienzo de la respuesta, que es la respuesta típica de todos los procesos de primer orden a un cambio escalón en la función de forzamiento.

Función rampa

En el dominio del tiempo, la función rampa' se representa como

$$X(t) = Atu(t) \tag{3-76}$$

y en el dominio de Laplace, como

$$X(s) = \frac{A}{s^2}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{KA}{s^2(\tau s + 1)}$$

Una vez más se utilizan los métodos que se describieron en el capítulo 2, para poner de nuevo esta función en el dominio del tiempo:

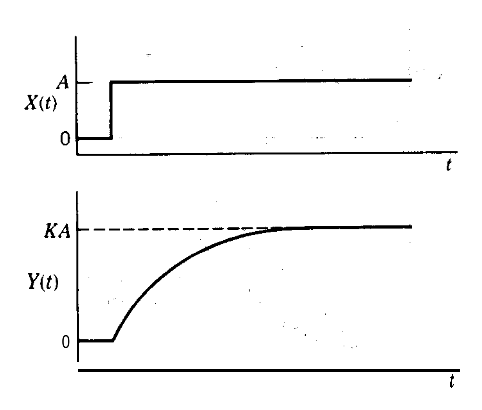


Figura 3-22. Respuesta de un proceso de primer orden a un cambio escalón en la función de forzamiento.

$$Y(t) = KA(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau) \tag{3-77}$$

En la figura 3-23 se ilustran gráficamente la función de forzamiento y la variable de respuesta; conforme se incrementa el tiempo, los transitorios desaparecen, $e^{-t/\tau}$ se vuelve despreciable y la respuesta se convierte también en una rampa, esto es

$$Y(t)\big|_{t\to\infty} = KA(t - \tau) \tag{3-78}$$

Función senoidal

Supóngase que la función de forzamiento del proceso es una función seno, tal que

$$X(r) = A \text{ sen } \omega t\, u(t) \tag{3-79}$$

Esto, en el dominio de Laplace, es

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{KA\omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)}$$

s^2+1

Al regresar esta función al dominio del tiempo, se obtiene

$$Y(t) = \frac{KA\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \text{sen}(\omega t + \theta) \tag{3-80}$$

τ^2+1 sen $t+\theta$.

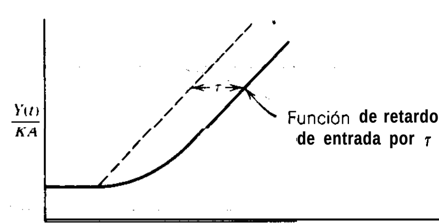


Figura 3-23. Respuesta de un proceso de primer orden a la función forzada en rampa.

donde:

$$\theta = \tan^{-1}(-\omega\tau) \qquad (3\text{-}81)$$

El ángulo θ se conoce como ángulo de fase. Conforme se incrementa el tiempo, el término $e^{-t/\tau}$ se vuelve despreciable y la respuesta alcanza una oscilación estacionaria que se expresa con

$$Y(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{KA}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad (3\text{-}82)$$

Esta oscilación estacionaria se conoce como frecuencia de respuesta del sistema. Es interesante notar que la amplitud de esta función es igual a la amplitud de la función de forzamiento, multiplicada por la ganancia del proceso, pero atenuada por el factor $1/\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}$. La razón amplitud entre $Y(t)|_{t\to\infty}$ y la amplitud de X(f), $K/\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}$, se define como la razón de amplitud; tanto la razón de amplitud como el ángulo de fase son funciones de la frecuencia de la función de 'entrada, ω, y el estudio de la manera en que varían conforme ω varía, es una parte importante del control automático de proceso que se cubre en el capítulo 7.

En la figura 3-24 se ilüstran la función de forzamiento y las variables. de respuesta cuando se desvanecen los fenómenos transitorios.

Existen otras dos funciones de forzamiento importantes: la pulso y la impulso; el estudio de la respuesta de los procesos de primer orden a estas funciones se plantea en los problemas al final del capítulo.

3-8. RESUMEN

En este capítulo se vio el desarrollo de modelos matemáticos simples de los procesos que se describen mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. El punto de partida para

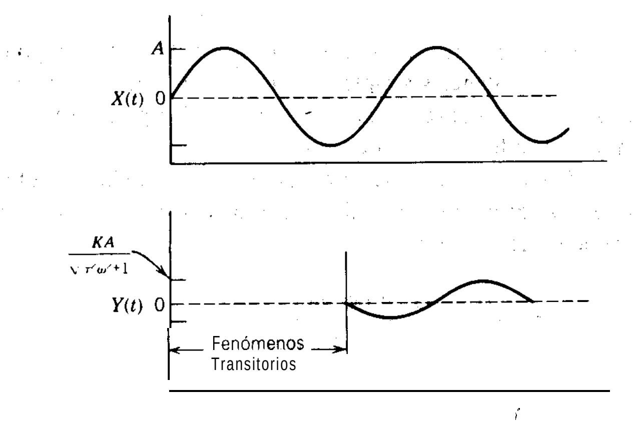


Figura 3-24. Respuesta de un proceso de primer orden a una función forzada de onda senoidal.

estos modelos es generalmente una ecuación de balance de una cantidad de conservación -masa o energía. El procedimiento consiste en desarrollar primeramente todas las ecuaciones que describen al proceso, como se muestra en la sección 3-6 para el reactor químico; en ese ejemplo en particular, se usan tres ecuaciones para describir el proceso. En dicho desarrollo se deben notar dos puntos importantes. Primero, para describir cualquier proceso se debe tener la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, razón por, la que se resaltaban las incógnitas en cada ecuación, ya que esto ayuda a tener en mente la cantidad de ecuaciones necesarias para describir el proceso y desarrollar el modelo; tal método de escribir las ecuaciones y las incógnitas se denominará "método descriptivo"*. Segundo, el método de solución depende de la naturaleza lineal o alineal de las ecuaciones, de lo que se requiere y del grado de precisión necesario. Si, el sistema de ecuaciones es lineal, la solución se puede obtener analíticamente mediante transformada de Laplace o cualquier otra técnica clásica; si alguna de las ecuaciones no es lineal, entonces la mejor técnica para obtener una solución bastante aproximada es la aplicación de métodos numéricos, lo cual significa generalmente el empleo de computadora; la otra técnica de que se dispone es la linealización de la ecuación no lineal para obtener una solución analítica; generalmente la solución que se obtiene de este modo únicamente es precisa sobre una pequeña región alrededor del punto de linealización. La técnica de linealización permite obtener una función de transferencia para el proceso.

En este capítulo se presentaron y explicaron otros conceptos. La función de transferencia se definió como la relación entre la transformada de Laplace de la variable de entrada y la. transformada de Laplace de la variable de salida; asimismo' se explicó' el significado de la función de transferencia, que describe completamente las características de estado estacionario y dinámico de las dos variables, las cuales se usan en forma de desviación.

Las funciones de transferencia que se desarrollaron y estudiaron en este capítulo son de la forma general

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \tag{3-83}$$

y se conocen como funciones de transferencia de primer orden más tiempo muerto, retardos de primer orden o capacitancias simples. Esta función de transferencia contiene tres parámetros: la ganancia K, la constante de tiempo τ y el tiempo muerto t_0. La comprensión de estos parámetros es fundamental en el estudio del control de proceso. Con la ganancia, K, o sensibilidad se especifica la cantidad de cambio de la variable de salida por unidad de cambio en la variable de entrada y, como se vio anteriormente, K se puede definir matemáticamente como sigue:

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{\Delta \text{ variable de salida}}{\Delta \text{ variable de entrada}} \tag{3-84}$$

* Este término lo desarrolló el Dr. J. C. Busot durante sus cursos de termodinámica en la Universidad del Sur de Florida.

La constante de tiempo, τ, esta en relación con la velocidad de respuesta del proceso, ***una vez que el proceso empieza a responder*** a la función de forzamiento. A partir de la ecuación (3-12) se demostró que la constante de tiempo es el tiempo requerido para alcanzar el 63.2 % del cambio total, AY, cuanto más **lenta** sea la respuesta del proceso a una entrada, tanto mayor será el valor de τ. El tiempo muerto, t_0, es el intervalo de tiempo entre la aparición de la función de forzamiento y el momento en que el proceso o la variable de respuesta comienza a responder; como se mencionó, el tiempo muerto es lo peor que puede suceder en cualquier sistema de control.

Es importante recordar que los parámetros: K, τ y t_0 definen la ''personalidad''del proceso y están en función de los parámetros físicos del proceso. También se demostró que en un sistema lineal estos parámetros son constantes; sobre tódo el rango de operación del proceso, y que para los procesos no lineales estos parámetros son funciones de la condición de operación; en consecuencia, no son constantes; sobre todo el rango de operación del proceso. En este capítulo se mostró cómo obtener dichos parámetros a partir de las ecuaciones de balance. En el capítulo 6 se muestra cómo se evalúan a partir de los datos del proceso.

Finalmente, se concluye el **capítulo** con' el estudio de la respuesta de los procesos de primer orden a diferentes tipos de funciones forzadas, lo cual **será** útil posteriormente en el estudio del control de proceso.

PROBLEMAS

3-1. Considérese el proceso de mezclado que se ilustra en la figura 3-25, donde se supone que la densidad de la corriente de entrada y la de salida son muy similares y que las tasas de flujo F_1 y F_2 son constantes. Obténganse las funciones de transferencia que relacionan la concentración a la salida con cada concentración a la entrada; se deben indicar las unidades de todas las ganancias y las constantes de tiempo.

3-2. Considérese el reactor **isotérmico que** se 'muestra en la figura 3-26, donde la tasa de reacción se expresa mediante ,

$$r_A(t) = kC_A(t), \text{ mol de } A/\text{pies}^3\text{-min}$$

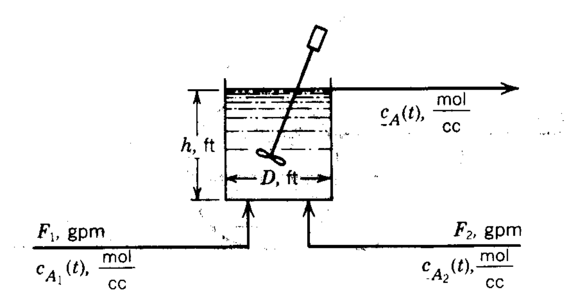


Figura 3-25. Diagrama **para el** problema 3-1.

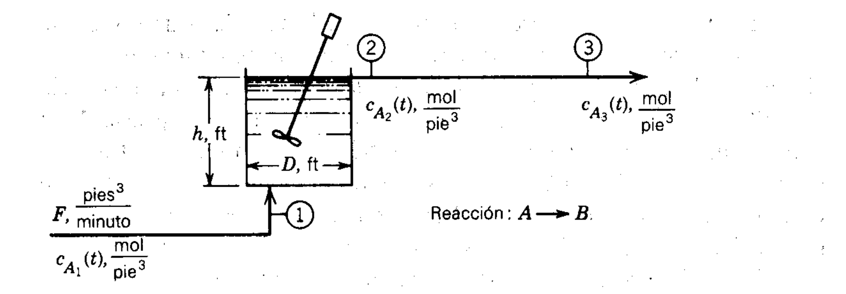


Figura 3-26. Diagrama para el problema 3-2.

donde k es una constante.

Se supone que la densidad y todas las otras propiedades físicas de los productos y los reactivos son semejantes, también se puede suponer que el régimen de flujo entre los puntos 2 y 3 es muy turbulento (flujo de acoplamiento), con lo que se minimiza la mezcla hacia atrás.

Obténganse las funciones de transferencia que relacionan:

a. La concentración de A en 2 con la de A en 1.
b. La concentración de A en 3 con la de A en 2.
c. La concentración de A en 3 con la de A en 1.

3-3. Considérese el proceso mostrado en la figura 3-27, en el cual el tanque es esférico con un radio de 4 pies; el flujo nominal de 'entrada y de salida del tanque es de 30,000 lbm/hr; la densidad del líquido es de 70 lbm/pies^3; y el nivel de estado estacionario es de 5 pies. El volumen de una esfera es $4\pi r^3/3$, y la relación entre volumen y altura se expresa mediante

$$V(t) = V_T\left[\frac{h^2(t)(3r - h(t))}{4r^3}\right]$$

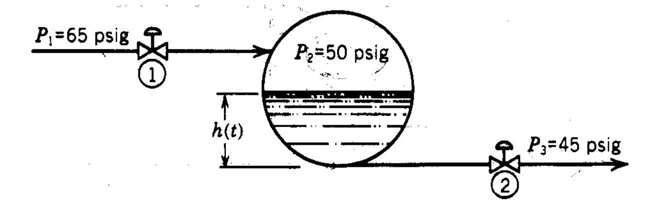


Figura 3-27. Diagrama para el problema 3-3.

El flujo a través de las válvulas es

$$w(t) = 500\, C_v\, vp(t) \sqrt{G_f \Delta p}$$

donde:

r = radio de la esfera, pies
V(t) = volumen del líquido en el tanque, pies^3
V_T = volumen total del tanque, pies^3
h(t) = altura del líquido en el tanque, pies
$\omega(t)$ = tasa de flujo, lbm/hr
C_v = coeficiente de la válvula, gpm/psi$^{1/2}$
$C_{v1} = 20.2$ y $C_{v2} = 28.0$
Δp = caída de. presión a través de la válvula, psi,
G_f = gravedad específica del. fluido
$vp(t)$ = posición de la válvula, fracción de apertura de la válvula

La presión sobre'el nivel del líquido se mantiene al valor constante de 50 psig. Obténganse' las funciones de transferencia que relacionan el nivel del líquido en el tanque, con los cambios de posiciones de las válvulas 1 y 2. También se deben graficar las ganancias y las constantes de tiempo contra los diferentes niveles de operación cuando se mantiene constante la posición de las válvulas.

3-4. Considérese el tanque de calentamiento que se muestra en la figura 3-28. El fluido que se procesa se calienta en el tanque mediante un agente calefactor que fluye a través de los tubos; la tasa de transferencia de calor, $q(t)$, al fluido que se procesa se relaciona con la señal neumática, $m(t)$, mediante la expresión:

$$q(t) = a + b(m(t) - 9)$$

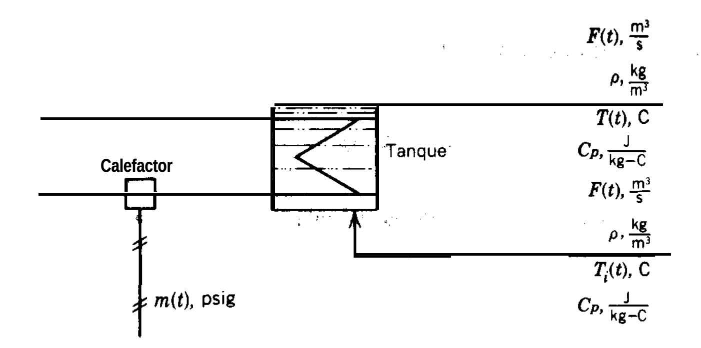


Figura 3-28. Diagrama para el problema 3-4.

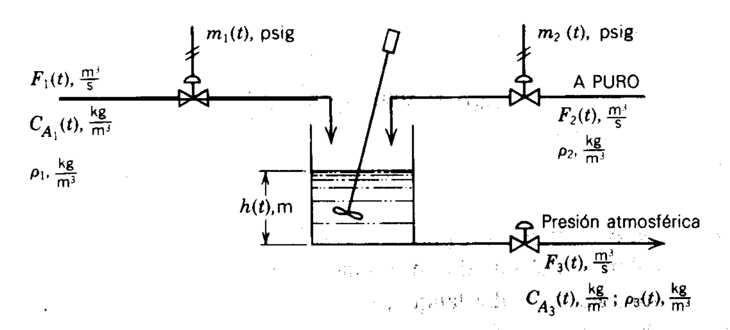


Figura 3-29. Diagrama para el problema 3-5.

Se puede suponer que el proceso es adiabático, que el fluido se mezcla bien en el tanque y que la capacidad calorífica y la densidad del fluido son constantes. Obténganse las funciones de transferencia que relacionan la temperatura de salida del fluido con la de entrada, $T_i(t)$, la tasa de flujo del proceso, $F(t)$, y la señal neumática, m(t). Se debe dibujar también el diagrama de bloques completo para este proceso.

3-5. Considérese el proceso de mezclado que se muestra en la figura 3-29. La finalidad de este proceso es combixiar una corriente baja en-contenido del componente A con otra corriente de A puro; la densidad de la corriente 1, ρ_1, se puede considerar constante, ya que la cantidad de A en esta corriente es pequeña. Naturalmente, la densidad de la corriente de salida es una función de la concentración y se expresa mediante

$$\rho_3(t) = a_3 + b_3 C_{A3}(t)$$

El flujo a través de la válvula 1 está 'dado por

$$F_1(t) = C_{v_1} vp_1(t) \sqrt{\frac{\Delta p_1}{G_1}}$$

El flujo a través de la válvula 2 está dado por

$$F_2(t) = C_{v_2} vp_2(t) \sqrt{\frac{\Delta p_2}{G_2}}$$

Finalmente, el flujo a través de la válvula 3 está dado 'por

$$F_3(t) = C_{v_3} \sqrt{\frac{\Delta p_3(t)}{G_3(t)}}$$

La relación entre la posición de la válvula y la señal. neumática se expresa con

$$vp_1(t) = a_1 + b_1(m_1(t) - d_1)$$

Y

$$vp_2(t) = a_2 + b_2(m_2(t) - d_2)$$

donde:

$a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2, a_3, b_3$ = constantes conocidas.

C_{v1}, C_{v2}, C_{v3} = coeficientes de las válvulas 1, 2 y 3 respectivamente, $m^3/(s\text{-}psi^{1/2})$

$vp_1(t), vp_2(t)$ = posición de las válvulas 1 y 2 respectivamente, fracción sin dimensiones

Δp_1, Δp_2 = caída de presión a través de las válvulas 1 y 2, respectivamente, la cual es constante, psi

$\Delta p_3(t)$ = caída de presión, a través de la válvula 3, psi

G_1, G_2 = gravedad especifica de las corrientes 1 y 2, respectivamente, la cual es constante y sin dimensiones

$G_3(t)$ = gravedad especifica de la corriente 3, sin dimensiones

Se debe desarrollar el diagrama de bloques para este proceso; en él deben aparecer todas las funciones de transferencia y la forma en que las funciones de transferencia $m_1(t)$, $m_2(t)$ y $C_{A1}(t)$ afectan a las variables de respuesta h(t) y $C_{A3}(t)$.

3-6. Determínese la función de transferencia $C(s)/R(s)$ para el sistema que se muestra en la figura 3-30.

3-7. Determínese la función de transferencia $C(s)/L(s)$ para el sistema que se muestra la figura 3-31.

3-8. Determínese la función de transferencia $C(s)/R(s)$ para el sistema que se muestra en la figura 3-32.

3-9. Obténgase la respuesta de un proceso que se describe mediante la función de transferencia de primer orden, más tiempo muerto, a la función de forzamiento que se ilustra en la figura 3-33.

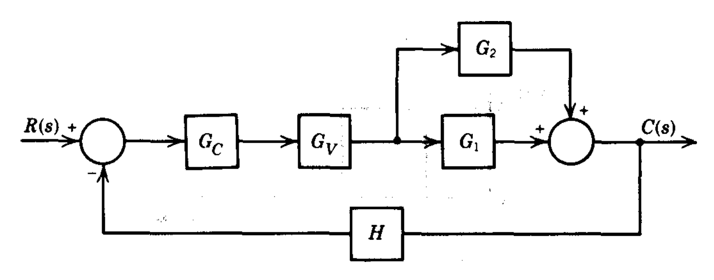


Figura 3-30. Diagrama para el problema 3%.

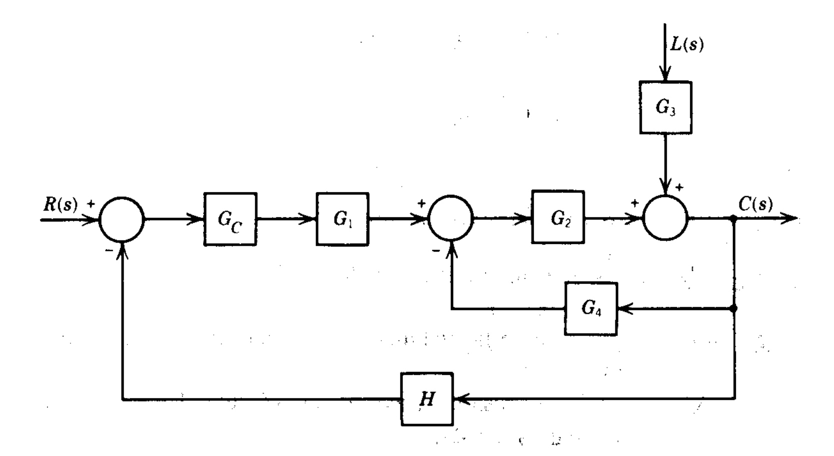
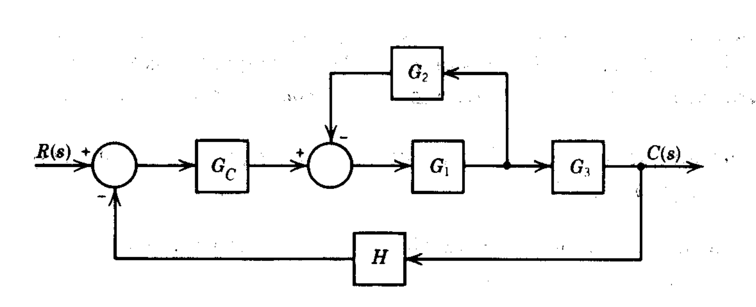


Figura **3-31.** Diagrama para el problema 3-7.



Piura 3-32. Diagrama para el problema 3-8.

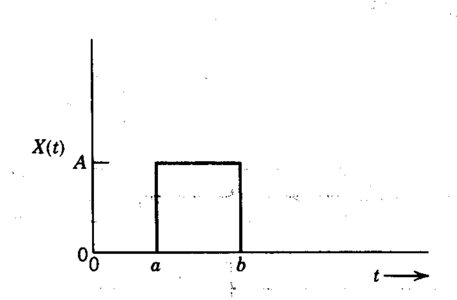


Figura 3-33. Gráfica para el **problema** 3-9.

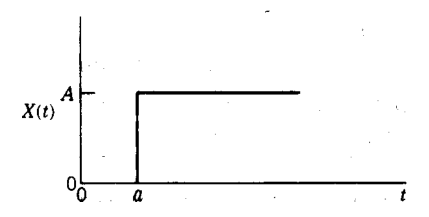


Figura 3-34. Gráfica para el problema 3-10.

3-10. Supóngase que con la siguiente ecuación se describe un cierto proceso:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3e^{-0.5s}}{5s + 0.2}$$

a. Obténgase la ganancia de estado estacionario, la constante de tiempo y el tiempo muerto para este proceso.
b. La condición inicial de la variable y es $y(0) = 2$. ¿Cuál es el valor final de y(t) para la función de forzamiento que se muestra en la figura 3-34?

3-11. Considérese el reactor químico que se muestra en la figura 3-35; en éste tiene lugar una reacción endotérmica del tipo $A + 2B \rightarrow C$. La tasa de incidencia de A, en kmol/m^3-s, se expresa mediante

$$r_A(t) = -k_0 e^{-E/RT(t)} C_A(t) C_B(t)$$

donde:

$r_A(t)$ = tasa de reacción, kmol/m^3-s
k_0 = factor de frecuencia, constante, m^3/kmol-s
E = energía de activación, constante, cal/gmol
R = constante de los gases, 1.987 cal/gmol-K

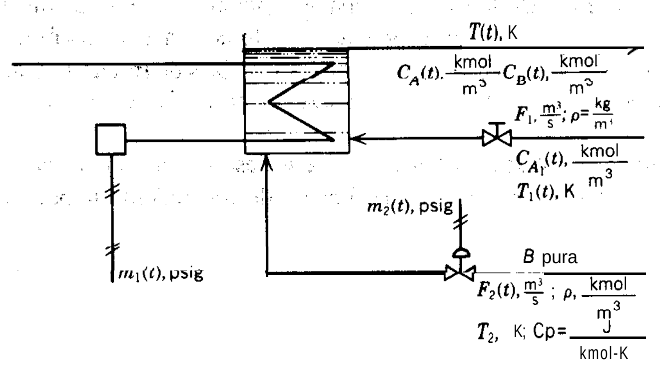


Figura 335. Diagrama para el problema 3-11.

$T(t)$ = temperatura en el reactor, K
$C_A(t)$ = concentración de A en el reactor, kmol/m^3
$C_B(t)$ = concentración de B en el reactor, kmol/m^3
AH, = calor de reacción, J/kmol

La entrada de calor al reactor se relaciona con la señal neumática que llega al calefactor mediante

$$q(t) = r + s(m_1(t) - 9)$$

donde:

$q(t)$ = entrada de calor al reactor, J/s
s, r = constantes

El flujo de B puro a través de la válvula está dado por,

$$F_2(t) = C_{v2} vp_2(t) \sqrt{\frac{\Delta p_2}{G_2}}$$

donde:

C_{v2} = coeficiente de la válvula, constante, m^3/s-psi$^{1/2}$
Δp_2 = caída de presión a través de la válvula, constante, psi
G_2 = gravedad específica de B, constante, sin dimensiones
$vp_2(t)$ = posición de la válvula, es una fracción

Se puede suponer que la operación es adiabática y que las propiedades físicas de los reactivos y los productos son similares. Se supone que la tasa de flujo F_1 es constante.

Se debe desarrollar el diagrama de bloques con todas las funciones de transferencia, para mostrar gráficamente las interacciones de las funciones de forzamiento $m_1(t)$, $m_2(t)$, $C_{A1}(t)$ y $T_1(t)$ con las variables de respuesta $C_A(t)$, $C_B(t)$ y $T(t)$. Se deben anotar las unidades de todas las ganancias y constantes de tiempo.

3-12. Obténgase la respuesta del proceso que se describe mediante una función de transferencia de primer orden a una función de forzamientci impulso.

CAPÍTULO

4

Sistemas dinámicos de orden superior

En el capítulo anterior se presentaron varios' ejemplos de procesos que pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En este capítulo el interés de la exposición se centra en los procesos que se describen mediante ecuaciones diferenciales de orden superior; en general, los objetivos que se persiguen en este capítulo son bastante cercanos a los del anterior. Se presentan los modelos matemáticos para sistemas más complejos y se explica el significado de los parámetros que describen las característica6 de esos procesos.

4-1. TANQUES EN SERIE-SISTEMA NO INTERACTIVO

Los sistemas de orden superior pueden ser'interactivos o no; en este capítulo se presentan ejemplos de ambos tipos, mediante la descripción de algunos procesos reales. También se explica el significado de los términos interactivo y no interactivo.

El ejemplo típico de un sistema no interactivo es el sistema de tanques que se muestra en la figura 4-1; se deben determinar las funciones de transferencia que relacionan el nivel del segundo tanque con el flujo de entrada al primer tanque, $q_i(t)$, y el flujo de la bomba, $q_o(t)$.

En este ejemplo todos los tanques están abiertos a la atmósfera y el proceso es isotérmico. La apertura de las válvulas permanece constante y el flujo de líquido a través de las válvulas se expresa mediante

$$q(t) = \frac{C_V}{7.48}\sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G}} = \frac{C_V}{7.48}\sqrt{\frac{\rho g h(t)}{144\, g_c G}} = C_V' \sqrt{h(t)}$$

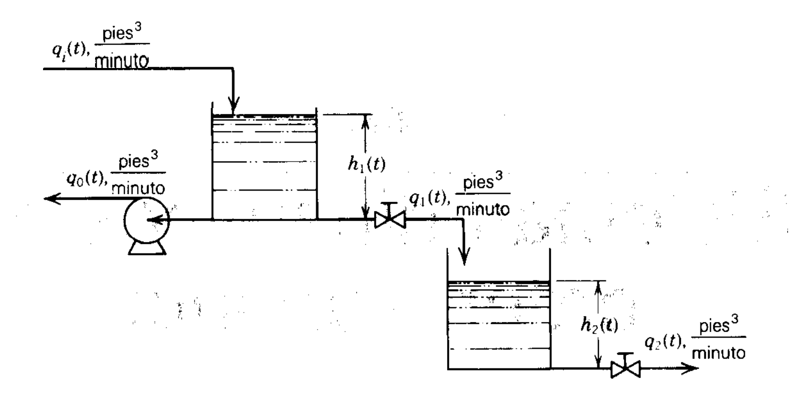


Figura 4-1. Tanques en serie-sistema no interactivo.

donde:

C_V = coeficiente de la válvula, $\frac{\text{gal/min}}{\text{psi}}$

7.48 = factor de conversión de gal a pies^3

Al escribir el balance de masa de estado dinámico para el primer tanque se tiene

$$\rho q_i(t) - \rho q_1(t) - \rho q_0(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \tag{4-1}$$

1 ecuación, 2 incógnitas $(q_1(t), h_1(t))$

donde:

ρ = densidad del líquido, lbm/pies^3

A_1 = área transversal del tanque 1, pies^2

De la expresión de la válvula se obtiene otra ecuación:

$$q_1(t) = C'_{V_1} \sqrt{h_1(t)} \tag{4-2}$$

2 ecuaciones, 2 incógnitas

Con las ecuaciones (4-1) y (4-2) se describe el primer tanque; ahora se procede con el segundo tanque.

El balance de estado dinámico para el segundo tanque'da

$$\rho q_1(t) - \rho q_2(t) = \rho A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \tag{4-3}$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas $(q_2(t), h_2(t))$

Nuevamente se obtiene otra ecuación a partir de la expresión de la válvula:

$$q_2(t) = C'_{V_2} \sqrt{h_2(t)} \tag{4-4}$$

4 ecuaciones, 4 incógnitas

Con las ecuaciones (4-1) hasta (4-4) se describe el proceso. Debido a que las ecuaciones (4-2) y (4-4) no son lineales, la solución más exacta se obtiene mediante simulación por computadora; sin embargo, puesto que se desea determinar las funciones de transferencia, se deben linealizar las ecuaciones antes de proceder de un modo similar al que se utilizó en el capítulo 3.

De las substituciones de la ecuación (4-2) en la (4-1), de las ecuaciones (4-2) y (4-4) en la (4-3), y la división de cada ecuación resultante entre la densidad, se obtiene

$$q_i(t) - C'_{v1} \sqrt{h_1(t)} - q_0(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \tag{4-5}$$

Y

$$C'_{v1} \sqrt{h_1(t)} - C'_{v2} \sqrt{h_2(t)} = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \tag{4-6}$$

De la ecuación (4-5), después de linealizar y definir las variables de desviación, se tiene

$$Q_i(t) - C_1 H_1(t) - Q_o(t) = A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} \tag{4-7}$$

donde:

$$C_1 = \left.\frac{\partial q_1(t)}{\partial h_1(t)}\right|_{ss} = \frac{1}{2} C'_{v1} (\bar{h}_1)^{-1/2}$$

y las variables de desviación

$$Q_i(t) = q_i(t) - \bar{q}_i$$
$$Q_o(t) = q_o(t) - \bar{q}_o$$
$$H_1(t) = h_1(t) - \bar{h}_1$$

De la ecuación (4-6) se tiene

$$C_1 H_1(t) - C_2 H_2(t) = A_2 \frac{dH_2(t)}{dt} \tag{4-8}$$

donde :

$$C_2 = \left.\frac{\partial q_2(t)}{\partial h_2(t)}\right|_{ss} = \frac{1}{2} C'_{v2} (\bar{h}_2)^{-1/2}$$

Y

$$H_2(t) = h_2(t) - \bar{h}_2$$

De reordenar las ecuaciones (4-7) y **(4-8),** se tiene

$$\tau_1 \frac{dH_1(t)}{dt} + H_1(t) = K_1 Q_i(t) - K_1 Q_o(t) \qquad (4\text{-}9)$$

Y

$$\tau_2 \frac{dH_2(t)}{dt} + H_2(t) = K_2 H_1(t) \qquad (4\text{-}10)$$

donde:

$\tau_1 = \frac{A_1}{C_1}$, minutos

$\tau_2 = \frac{A_2}{C_2}$, minutos

$K_1 = \frac{1}{C_1}$, pies-min/pies^3

$K_2 = \frac{C_1}{C_2}$, sin dimensiones

De obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones (4-9) y (4-10) y reordenar, se obtiene

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_i(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} Q_o(s) \qquad (4\text{-}11)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s) \qquad (4\text{-}12)$$

Con la ecuación (4-11) se relaciona el nivel del primer tanque con los flujos de entrada y salida; mediante la (4-12) se relaciona el nivel del segundo con el del primero.

Para determinar las funciones de transferencia que se desean, se substituye la ecuación (4-11) en la (4-12)

$$H_2(s) = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} (Q_i(s) - Q_o(s)) \qquad (4\text{-}13)$$

o sea que las funciones de transferencia individuales son:

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \qquad (4\text{-}14)$$

Y

$$\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{-K_1K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{4-15}$$

A estas alturas el lector ya se habrá dado cuenta de que las unidades de K_1 K_2 son pies-min/pies^3, y que las de τ_1 y τ_2 son minutos; la pregunta es: ¿tienen sentido los signos de las ecuaciones (4-14) y (4-15)?

Las funciones de transferencia que expresan las ecuaciones (4-14) y (4-15) se conocen como ***funciones de transferencia de segundo orden o retardos de segundo orden,*** y a partir de su desarrollo es bastante simple ver que se "forman" con dos funciones de transferencia de primer orden en serie.

Como se muestra en la figura 4-2, el diagrama de bloques de este sistema se puede representar de diferentes formas. El diagrama de bloques de la figura 4-2*a* se desarrolló mediante el "encadenamiento" de las ecuaciones (4-11) y (4-12); en el diagrama se muestra que el flujo de entrada y salida afecta inicialmente el nivel en el primer tanque, $H_1(s)$; por lo tanto, el cambio en este nivel afecta al nivel del segundo tanque, $H_2(s)$. En las figuras 4-2*b* y 4-2*c* se muestran otros diagramas más compactos. A pesar de que en el diagrama de bloques de la figura 4-2*a* se tiene la mejor descripción de cómo ocurren realmente las cosas, los tres diagramas se usan sin ninguna preferencia.

En la figura 4-3 se muestra una forma de extender el proceso mostrado en la figura 4-1 mediante la adición de otro tanque; para este nuevo proceso se determinarán las funciones de transferencia que relacionan el nivel del tercer tanque con el flujo de entrada en el primer tanque y el flujo de la bomba.

Puesto que ya se obtuvieron los modelos para los dos primeros tanques, con las ecuaciones (4-1) a (4-4), ahora se hará el modelo del tercer tanque. De escribir el balance de masa de estado dinámico para el tercer tanque, resulta

$$\rho q_2(t) - \rho q_3(t) = \rho A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \tag{4-16}$$

5 ecuaciones, 6 incógnitas $(q_3(t),\ h_3(t))$

De la expresión de la válvula se obtiene la otra ecuación que se requiere y es la siguiente:

$$q_3(t) = C'_{V_3} \sqrt{h_3(t)} \tag{4-17}$$

6 ecuaciones, 6 incógnitas

Con las ecuaciones (4-1), (4-2), (4-3), (4-4), (4-16) y (4-17) se tiene el modelo para el nuevo proceso (ver figura 4-3).

Al substituir las ecuaciones (4-4) y (4-17) en la ecuación (4-16) y dividir la ecuación resultante entre la densidad, se obtiene

$Q_i(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$

$Q_0(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$

$\frac{K_1}{\tau_1 s+1}$ $H_1(s)$, pies $\frac{K_2}{\tau_2 s+1}$ $H_2(s)$, pies

(a)

$Q_i(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$

$Q_0(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$

$\frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ $H_2(s)$, pies

(b)

$Q_i(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$ $\frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

$Q_0(s), \frac{\text{pies}^3}{\text{minuto}}$ $\frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

$H_2(s)$, pies

(c)

Figura 4-2. Diagrama de bloques de dos tanques no interactivos en serie.

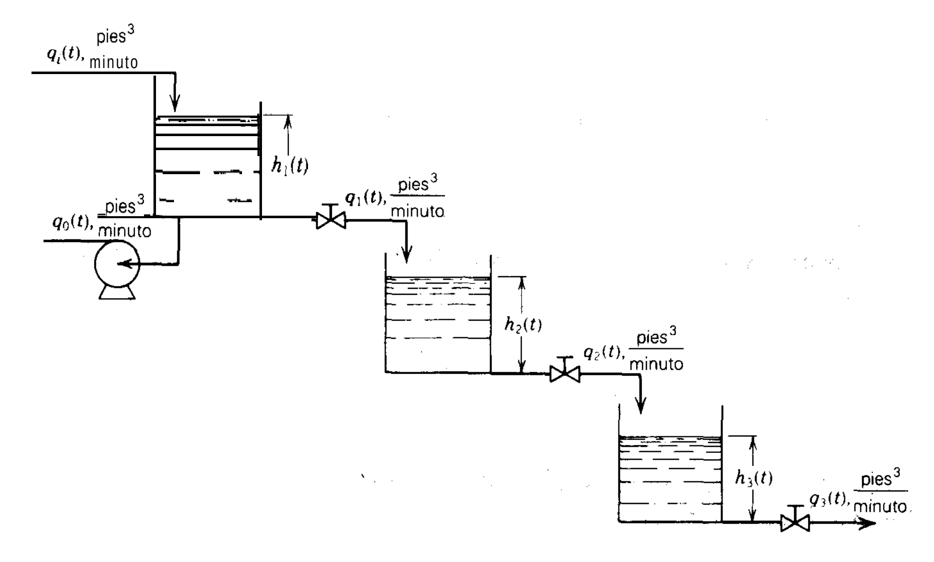


Figura 4-3. Tanques en serie-sistema no interactivo.

$$C'_{v2}\sqrt{h_2(t)} - C'_{v3}\sqrt{h_3(t)} = A_3\frac{dh_3(t)}{dt} \tag{4-18}$$

de la cual se tiene

$$C_2H_2(t) - C_3H_3(t) = A_3\frac{dH_3(t)}{dt} \tag{4-19}$$

donde:

$$C_3 = \left.\frac{\partial q_3(t)}{\partial h_3(t)}\right|_{ss} = \frac{1}{2}C'_{v3}(\bar{h}_3)^{-1/2}$$

y la variable de desviación es $H_3(t) = h_3(t) - \bar{h}_3$.

Al reordenar la ecuación (4-19) y obtener la transformada de **Laplace,** se tiene

$$H_3(s) = \frac{K_3}{\tau_3 s + 1}H_2(s) \tag{4-20}$$

donde:

$$\tau_3 = \frac{A_3}{C_3}, \quad \text{minutos}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{C_3}, \quad \text{sin dimensiones}$$

Finalmente, la substitución de la ecuación (4-13) en la (4-20) da

$$H_3(s) = \frac{K_1K_2K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}(Q_i(s) - Q_o(s)) \tag{4-21}$$

de la cual se determinan las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{K_1K_2K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \tag{4-22}$$

$$\frac{H_3(s)}{Q_o(s)} = \frac{-K_1K_2K_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \tag{4-23}$$

Estas dos funciones de transferencia se denominan ***funciones de transferencia de tercer orden o retardos de tercer orden.*** En la figura 4-4 se ilustran tres diferentes maneras de representar la ecuación (4-21) mediante diagramas de bloques.

La figura 4-4*a* es particularmente interesante, porque ilustra la manera en que las funciones de forzamiento $Q_1(s)$ y $Q_0(s)$ afectan a los diferentes niveles.

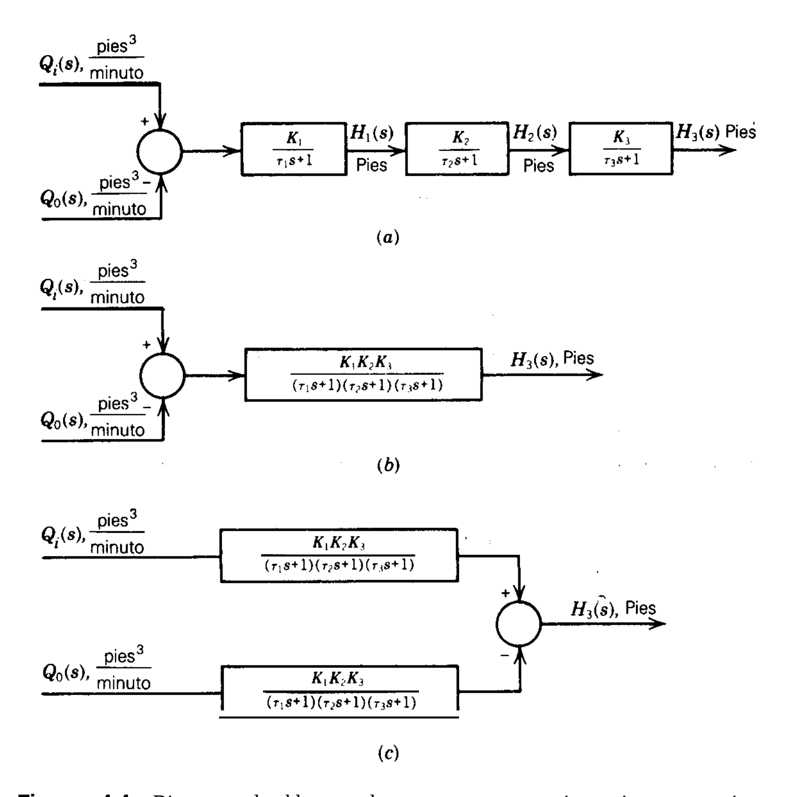


Figura 4-4. Diagrama de bloques de tres tanques no interactivos en serie.

Nótese que estas funciones de transferencia se obtienen mediante la multiplicación de funciones de transferencia de primer orden; es decir

$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{H_1(s)}{Q_i(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_1(s)} \cdot \frac{H_3(s)}{H_2(s)}$$

Éste es el caso de los sistemas no interactivos en serie, cuyo enunciado se puede generalizar como sigue

$$G_i(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) \tag{4-24}$$

donde:

n = cantidad de sistemas no interactivos en serie
$G(s)$ = función de transferencia que relaciona la salida del último sistema, el sistema n, con la entrada del primer sistema
$G_i(s)$ = función de transferencia individual para cada sistema

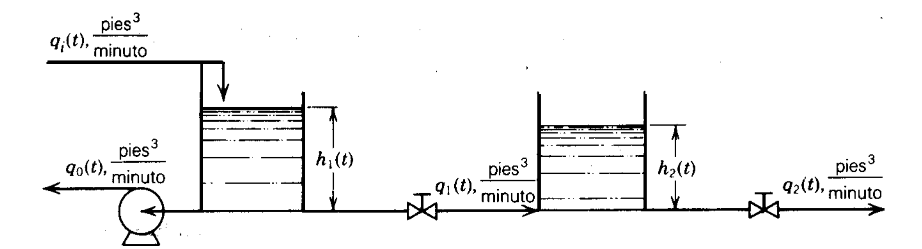


Figura 4-5. Tanques en serie-sistema interactivo.

Los procesos que se muestran en las figuras 4-1 y 4-5 se conocen como sistemas no interactivos, porque no hay interacción completa entre las variables. El nivel del primer tanque afecta al del segundo; pero el nivel de éste no afecta al del primero; lo mismo es verdad para los niveles del segundo y tercer tanques. En las siguientes secciones se presentan ejemplos de sistemas interactivos.

Finalmente, es importante reconocer otro punto más, el sistema de ecuaciones con que se describen los procesos vistos hasta ahora, en este capítulo, es más complejo, ya que implica más ecuaciones que los presentados en el capítulo 3. La forma en que se analizaron los ejemplos anteriores fue: ***primero***, escribir el modelo y el sistema de ecuaciones con que se describe el proceso; y, posteriormente, decidir la manera en que se resolverá dicho modelo. El primer paso siempre es el desarrollo del modelo, al cual sigue la solución del mismo.

4-2. TANQUES EN SERIE-SISTEMA INTERACTIVO

Si se redistribuyen los tanques de la figura 4-1, el resultado es un sistema interactivo como el mostrado en la figura 4-5.

La interacción entre los tanques se demuestra claramente a partir de la ecuación de flujo de la válvula, $q_1(t)$, es decir

$$q_1(t) = \frac{C_{V_1}}{7.48}\sqrt{\frac{\Delta P(t)}{G}} = \frac{C_{V_1}}{7.48}\sqrt{\frac{\rho g(h_1(t) - h_2(t))}{144\, g_c G}}$$
$$= C'_{V_1}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$$

En esta ecuación se aprecia que el flujo entre los dos tanques depende del nivel en ***ambos;*** el uno afecta al otro.

Ahora se determinarán las mismas dos funciones de transferencia que en el caso del sistema no interactivo

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} \quad \text{y} \quad \frac{Hz(s)}{Q_o(s)}$$

Se comienza por escribir el balance de masa de estado dinámico para el primer tanque, mismo que se expresa mediante la siguiente ecuación

$$\rho q_i(t) - \rho q_1(t) - \rho q_o(t) = \rho A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \tag{4-1}$$

1 ecuación, 2 incógnitas $(q_1(t),\ h_1(t))$

De la expresión para la válvula se obtiene la siguiente ecuación:

$$q_1(t) = C'_{V_1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \tag{4-25}$$

2 ecuaciones 3 incógnitas $(h_2(t))$

Aún se necesita otra ecuación independiente; el balance de masa de estado dinámico para el segundo tanque ayuda para obtenerla; ésta es la ecuación (4-3).

$$\rho q_1(t) - \rho q_2(t) = \rho A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \tag{4-3}$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas $(q_2(t))$

El flujo a través de la última válvula se expresa mediante la ecuación (4-4)

$$q_2(t) = C'_{V_2} \sqrt{h_2(t)} \tag{4-4}$$

4 ecuaciones, 4 incógnitas

Ahora se tiene la misma cantidad de ecuaciones independientes que de incógnitas, lo cual describe al proceso, es decir, se tiene el modelo; ahora sigue la solución.

Se substituye la ecuación (4-25) en la (4-1) y se divide la ecuación resultante entre la densidad, para obtener

$$q_i(t) - C'_{v1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - q_o(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$$

De la cual se obtiene

$$Q_i(t) - C_4 H_1(t) + C_4 H_2(t) - Q_o(t) = A_1 \frac{dH_1(t)}{dt} \tag{4-26}$$

donde:

$$C_4 = \left.\frac{\partial q_1(t)}{\partial h_1(t)}\right|_{ss} = -\left.\frac{\partial q_1(t)}{\partial h_2(t)}\right|_{ss} = \frac{1}{2} C'_{v1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^{-1/2}$$

Al reordenar la ecuación (4-26) y obtener la transformada de Laplace

$$H_1(s) = \frac{K_4}{\tau_4 s + 1} Q_i(s) + \frac{1}{\tau_4 s + 1} H_2(s) - \frac{K_4}{\tau_4 s + 1} Q_o(s) \tag{4-27}$$

donde:

$$K_4 = \frac{1}{C_4}, \text{ pies-min/pies}^3$$

$$\tau_4 = \frac{A_1}{C_4}, \quad \text{minutos}$$

Se sigue el mismo procedimiento para el segundo tanque y se obtiene

$$H_2(s) = \frac{K_5}{\tau_5 s + 1} H_1(s) \tag{4-28}$$

donde:

$$K_5 = \frac{C_4}{C_4 + C_2}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$\tau_5 = \frac{A_2}{C_4 + C_2}, \quad \text{minutos}$$

Finalmente, la substitución de la ecuación (4-27) en la (4-28) da por resultado

$$H_2(s) = \frac{K_4 K_5}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1)}(Q_i(s) - Q_o(s))$$

$$+ \frac{K_5}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1)} H_2(s)$$

$$H_2(s) = \frac{K_4 K_5}{\tau_4 \tau_5 s^2 + (\tau_4 + \tau_5)s + (1 - K_5)}(Q_i(s) - Q_o(s))$$

$$H_2(s) = \frac{\dfrac{K_4 K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5}\right) s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5}\right) s + 1} (Q_i(s) - Q_o(s)) \tag{4-29}$$

A partir de la cual se obtienen las funciones de transferencia que se desean; es decir

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{\dfrac{K_4K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4\tau_5}{1 - K_5}\right) s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5}\right) s + 1} \tag{4-30}$$

Y

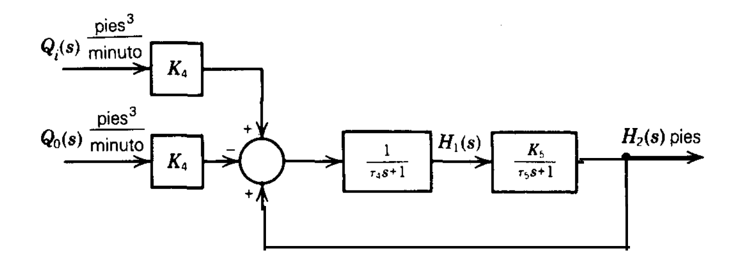
$$\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{-\dfrac{K_4K_5}{1 - K_5}}{\left(\dfrac{\tau_4\tau_5}{1 - K_5}\right) s^2 + \left(\dfrac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5}\right) s + 1} \tag{4-31}$$

Las funciones de transferencia mostradas aquí son de segundo orden. Los diagramas de bloques para este proceso interactivo se muestran en la figura 4-6.

Son varias cosas las que se pueden aprender de la comparación de las funciones de transferencia para los sistemas interactivos y no interactivos. Al comparar las ecuaciones (4-14) y (4-30) se observa que las ganancias, o sensibilidades, son diferentes en los dos casos; **también** las constantes de tiempo son diferentes; aún más, para el caso interactivo, la constante de tiempo mayor es más grande que en el caso no interactivo, lo cual da como resultado que el sistema responda más lentamente.

Para probar esta última declaración considérese el caso en que ambas constantes de tiempo individuales son iguales, esto es

$$\tau_4 = \tau_5 = \tau$$



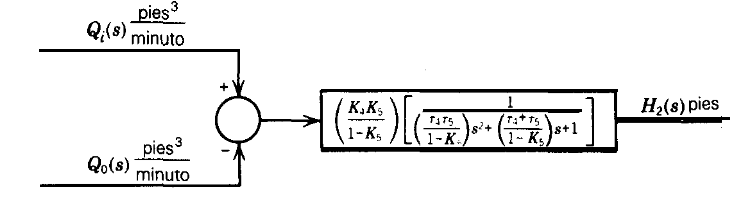


Figura 4-6. Diagrama de bloques de un sistema interactivo de dos tanques.

y para que esto sea cierto

$$A_2 = 2A_1$$
$$C_2 = C_4$$

Entonces $K_5 = 0.5$.

Con esta información, la ecuación (4-31) se convierte en

$$\frac{H_2(s)}{Q_o(s)} = \frac{\dfrac{-K_4K_5}{(\tau s + 1)^2}}{1 - \dfrac{K_5}{(\tau s + 1)^2}} = \frac{-K_4K_5}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + (1 - K_5)}$$

Las raíces del denominador son

$$\text{Raíces} = \frac{-(1 + \sqrt{K_5})}{\tau} \qquad \frac{-(1 - \sqrt{K_5})}{\tau}$$

de lo cual se obtienen dos constantes de tiempo "efectivas" para este sistema interactivo

$$\tau_{4ef} = \frac{\tau}{1 + \sqrt{K_5}} = \frac{\tau}{1.707} = 0.58\tau$$

$$\tau_{5ef} = \frac{\tau}{1 - \sqrt{K_5}} = \frac{\tau}{0.293} = 3.417$$

y la relación entre dichas constantes de tiempo "efectivas" es

$$\frac{\tau_{5ef}}{\tau_{4ef}} = 5.8$$

¡a pesar de que $\tau_4 = \tau_5$! Esto demuestra claramente que la constante de tiempo mayor de un sistema interactivo es más grande que la de un sistema no interactivo.

Otro hecho acerca de los sistemas interactivos es que las constantes de tiempo "efectivas" son reales; para probar tal declaración se iguala el denominador de la ecuación (4-31) a cero:

$$\left(\frac{\tau_4\tau_5}{1 - K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_4\tau_5}{1 - K_5}\right) s + 1 = 0$$

Con base en la definición de τ_4, τ_5 y K_5, se tiene

$$\left(\frac{A_1A_2}{C_2C_4}\right)s^2 + \left(\frac{A_1(C_2 + C_4) + A_2C_4}{C_2C_4}\right) s + 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación se obtienen mediante el uso de la expresión cuadrática y, para que éstas sean reales, debe ser cierto lo siguiente:

$$b^2 - 4ac = \frac{[A_1(C_2 + C_4) + A_2C_4]^2}{C_2^2C_4^2} - \frac{4A_1A_2}{C_2C_4} > 0$$

o

$$(A_1C_2 - A_2C_4)^2 + A_1C_4\,(A_1C_2 + A_1C_4 + 2A_2C_4) > 0$$

y puesto que todas las constantes son positivas, la desigualdad es siempre verdadera; por lo tanto, se puede decir que las constantes de tiempo de los sistemas interactivos son siempre reales. Esto es importante cuando se estudia la respuesta de tales sistemas a diferentes funciones forzadas.

La gran mayoría de los procesos se describen mediante funciones de transferencia de orden superior. En la industria se encuentran tanto procesos interactivos como no interactivos; de los dos, el interactivo es el más común. En las siguientes secciones se presentan más ejemplos de procesos interactivos.

4-3. PROCESO TÉRMICO

Considérese la unidad que se muestra en la figura 4-7, cuyo objetivo es enfriar un fluido caliente que se procesa; el medio de enfriamiento, agua, pasa a través de una camisa. Para este proceso se supone que el agua, en la camisa de enfriamiento, y el fluido, en el tanque, están bien mezclados y que la densidad y capacidad calorífica de ambos no cambia significativamente con la temperatura. Debido a que el fluido procesado sale del tanque por desborde, el nivel y el área de transferencia de calor en el tanque son constantes. Finalmente, se puede suponer también que el tanque está bien aislado.

Se deben determinar las funciones de transferencia que relacionan la temperatura de salida del fluido que se procesa, Z'(t), con la temperatura de entrada del agua de enfria-

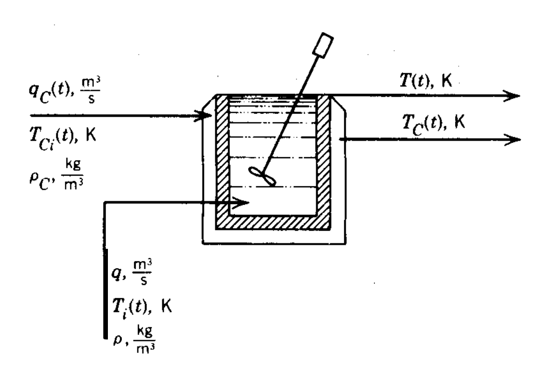


Figura 4-7. Enfriamiento de un fluido caliente de proceso.

miento, $T_{C_i}(t)$, la tasa de flujo del agua de enfriamiento, $q_C(t)$ y la temperatura de entrada del fluido que se procesa, I;:(t).

Un balance de energía de estado dinámico para el fluido que se procesa es

$$q\rho C_p T_i(t) - UA[T(t) - T_C(t)] - q\rho C_p T(t) = V\rho C_V \frac{dT(t)}{dt} \quad (4\text{-}32)$$

1 ecuación, 2 incógnitas (T(t), $T_C(t)$)

donde:

U = coeficiente global de transferencia de calor, se supone constante, J/m^2-K-s
A = área de transferencia de calor, m^2
V = volumen del tanque, m^3
C_p, C_V = capacidades caloríficas del fluido que se procesa. J/kg-K

Aún se necesita otra ecuación independiente, que se obtiene a partir del balance de energía de estado dinámico en la camisa de enfriamiento:

$$q_C(t)\rho_C C_{pC} T_{C_i}(t) + UA[T(t) - T_C(t)] - q_C(t)\,\rho_C C_{pC} T_C(t) \quad (4\text{-}33)$$

$$= V_C \rho_C C_{VC} \frac{dT_C(t)}{dt}$$

2 ecuaciones, 2 incógnitas

donde:

C_{p_C}, C_{V_C} = capacidades caloríficas del agua de enfriamiento, J/kg-K
V_C = volumen de la camisa de enfriamiento, m^3

Las funciones de transferencia requeridas se pueden obtener a partir de las ecuaciones (4-32) y (4-33); sin embargo, antes de hacerlo se debe linealizar la **ecución (4-33)**, cuyos términos no lineales son específicamente el primero y último del miembro izquierdo; la ecuación (4-32) ya es lineal.

Se sigue el procedimiento expuesto anteriormente de las ecuaciones (4-32) y (4-33) y se obtiene

$$q\rho C_p \mathbf{T}(t) - UA[\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_C(t)] - q\rho C_p \mathbf{T}(t) = V\rho C_v \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \quad (4\text{-}34)$$

Y

$$C_1 Q_C(t) + C_2 \mathbf{T}_{Ci}(t) + UA\,[\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_C(t)] - C_3 Q_C(t) - C_2 \mathbf{T}_C(t) = V_C \rho_C C_{vc} \frac{d\mathbf{T}_C(t)}{dt} \quad (4\text{-}35)$$

donde:

$$C_1 = \rho_C C_{p_C} \bar{T}_{C_i}, \quad \text{J/m}^3$$
$$C_2 = \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}, \quad \text{J/s - K}$$
$$C_3 = \rho_C C_{p_C} \bar{T}_C, \quad \text{J/m}^3$$

y las variables de desviación son

$$T_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i$$
$$T(t) = T(t) - \bar{T}$$
$$\mathbf{T}_C(t) = T_C(t) - \bar{T}_C$$
$$Q_C(t) = q_C(t) - \bar{q}_C$$
$$\mathbf{T}_{C_i}(t) = T_{C_i}(t) - \bar{T}_{C_i}$$

Al ordenar la ecuación (4-34) y obtener la transformada de **Laplace**, se obtiene

$$T(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}[K_1 \mathbf{T}_i(s) + K_2 \mathbf{T}_c(s)] \tag{4-36}$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{V\rho C_V}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{segundos}$$
$$K_1 = \frac{q\rho C_p}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{sin dimensiones}$$
$$K_2 = \frac{UA}{UA + q\rho C_p}, \quad \text{sin dimensiones}$$

De manera semejante, de la ecuación (4-35) se obtiene

$$\mathbf{T}_c(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}[K_3 \mathbf{T}_{ci}(s) - K_4 Q_c(s) + K_5 \mathbf{T}(s)] \tag{4-37}$$

donde:

$$\tau_2 = \frac{V_C \rho_C C_{V_C}}{C_2 + UA}, \quad \text{segundos}$$

$$K_3 = \frac{C_2}{C_2 + UA}, \quad \text{siq dimensiones}$$

$$K_4 = \frac{C_3 - C_1}{C_2 + UA}, \qquad \text{K/m}^3\text{-s}$$

$$K_5 = \frac{UA}{C_2 + UA}, \qquad \text{sin dimensiones}$$

Por la substitución de la ecuación (4-37) en la (4-36), y después de algún manejo algebraico, se determinan las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \left(\frac{K_1}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{\tau_2 s + 1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right] \tag{4-38}$$

$$\frac{T(s)}{Tc_i(s)} = \left(\frac{K_2K_3}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right] \tag{4-39}$$

$$\frac{T(s)}{Q_C(s)} = \left(\frac{-K_4K_2}{1 - K_2K_5}\right)\left[\frac{1}{\left(\frac{\tau_1\tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 - K_2K_5}\right)s + 1}\right] \tag{4-40}$$

En la figura 4-8 se muestra el diagrama de bloques para este sistema, el cual se obtiene mediante el encadenamiento de las ecuaciones (4-36) y (4-37)

Se puede apreciar que estas tres funciones de transferencia, ecuaciones (4-38), (4-39) y (4-40), son de segundo orden. La ecuación (4-38) es un poco diferente de las otras dos; específicamente, ésta tiene el término $(\tau_2 s + 1)$ en el numerador. Tal tipo de función de transferencia se trata más adelante en este capítulo, por el momento es importante comprender el significado de las tres funciones de segundo orden mencionadas aquí. Por ejemplo, considérese la temperatura de entrada del agua de enfriamiento. Si $T_{C_i}(t)$ cambia, esto afecta primero a la temperatura de la camisa y después a la del fluido

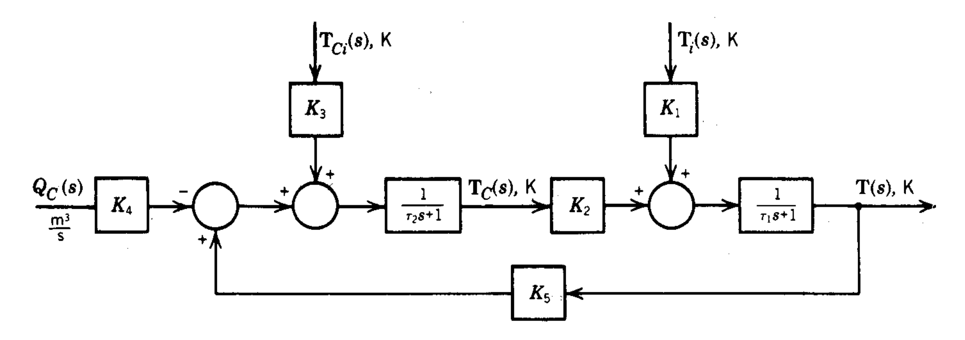


Figura 4-8. Diagrama de bloques del proceso térmico de la figura 4-7.

que se procesa; aquí hay dos sistemas de primer orden en serie. El mismo comportamiento dinámico también es valido para un cambio en el flujo del agua de enfriamiento, como se puede apreciar en las funciones de transferencia, ecuaciones (4-39) y (4-40), cuyos términos dinámicos son exactamente los mismos. La primera función de transferencia, ecuación (4-38), indica que la dinámica del cambio en la temperatura de entrada del fluido procesado, $T_i(t)$, sobre T(t) es diferente de la de las otras dos perturbaciones y, como se mencionó anteriormente, dichas diferencias se explican más adelante en este capítulo.

En este ejemplo se utilizó la expresión de tasa de transferencia de calor $UA[T(t) - T_C(t)]$, pero al hacerlo se despreció la dinámica de las paredes del tanque, ya que se supuso que, tan pronto como cambia la temperatura del agua de enfriamiento, el fluido procesado experimenta un cambio en la transferencia de calor, sin embargo, esto no es así. Cuando se modifica la temperatura del agua de enfriamiento, también cambia la transferencia de calor en las paredes del tanque y, consecuentemente, empieza a variar la temperatura de las paredes; es entonces cuando cambia la transferencia de calor de las paredes al líquido que se procesa. Por tanto, la pared del tanque representa otra capacitancia en el sistema, y la magnitud de ésta depende, entre otras cosas, del espesor, densidad, capacidad calorífica y otras propiedades físicas del material con que se construye la pared.

Al tomar en cuenta la pared, se tiene un mejor entendimiento de dicha capacitancia. Se puede suponer que ambas superficies de la pared del tanque, la que esta cerca del líquido que se procesa y la que esta cerca del agua de enfriamiento, tienen la misma temperatura; tal suposición es buena cuando la pared no es muy gruesa y tiene una gran conductividad térmica.

Entonces, el balance de energía en el fluido que se procesa cambia a

$$q\rho C_p T_i(t) - h_i A_i(T(t) - T_m(t)) \quad q\rho C_p T(t) = V\rho C_V \frac{dT(t)}{dt} \tag{4-41}$$

1 ecuación, 2 incógnitas $(T(t), T_M(t))$

donde:

h_i = coeficiente de transferencia calorífica de la cara interna, se supone constante, J/m^2-s-K
A_i = área interna de transferencia de calor, m^2
$T_m(t)$ = temperatura de la pared de metal, K

Al proceder con un balance de energía de estado dinámico para la pared del tanque, se puede escribir

$$h_i A_i(T(t) - T_m(t)) - h_o A_o(T_m(t) - T_C(t)) = V_m \rho_m C_{V_m} \frac{dT_m(t)}{dt} \tag{4-42}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas $(T_C(t))$

donde:

h_o = coeficiente de transferencia de calor de la cara externa, se supone constante, J/m^2-s-K
A_o = área externa de transferencia de calor, m^2
V_m = volumen de la pared de metal, m^3
ρ_m = densidad de la pared de metal, kg/m^3
C_{V_m} = capacidad calorífica del metal de la pared, J/kg-K

Finalmente, con un balance de energía de estado dinámico para el agua de enfriamiento se obtiene la otra ecuación que se necesita:

$$q_C(t)\rho_C C_{p_C} T_{C_i}(t) + h_o A_o (T_m(t) - T_C(t)) - q_C(t)\rho_C C_{p_C} T_C(t) = V_C \rho_C C_{V_C} \frac{dT_C(t)}{dt} \tag{4-43}$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas

Aquí se requirieron tres ecuaciones diferenciales para describir completamente el sistema. Para desarrollar la siguiente función de transferencia a partir de la ecuación (4-41) se utiliza el procedimiento que ya se aprendió:

$$T(s) = \frac{K_6}{\tau_3 s + 1} \mathbf{T}_i(s) + \frac{K_7}{\tau_3 s + 1} \mathbf{T}_m(s) \tag{4-44}$$

En la figura 4-9 se muestra el diagrama de bloques que representa esta ecuación.

De la ecuación (4-42) se obtiene

$$\mathbf{T}_m(s) = \frac{K_8}{\tau_4 s + 1} \mathbf{T}(s) + \frac{K_9}{\tau_4 s + 1} \mathbf{T}_C(s) \tag{4-45}$$

y, finalmente, a partir de la ecuación (4-43), se tiene

$$\mathbf{T}_C(s) = \frac{K_{10}}{\tau_5 s + 1} \mathbf{T}_{C_i}(s) + \frac{K_{11}}{\tau_5 s + 1} \mathbf{T}_m(s) \quad \frac{K_{12}}{\tau_5 s + 1} Q_C(s) \tag{4-46}$$

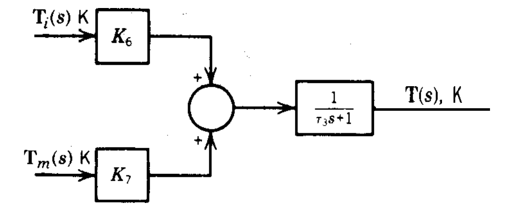


Figura 4-9. Representación en forma de diagrama de bloques de la ecuación (4-44).

donde:

$$\mathbf{T}_m(t) = T_m(t) - \bar{T}_m$$

$$\tau_3 = \frac{V\rho C_p}{q\rho C_p + h_i A_i}, \quad \text{segundos} \qquad K_6 = \frac{q\rho C_p}{q\rho C_p + h_i A_i}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_7 = \frac{h_i A_i}{q\rho C_p + h_i A_i}, \quad \text{sin dimensiones} \qquad \tau_4 = \frac{V_m \rho_m C_{p_m}}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{segundos}$$

$$K_8 = \frac{h_i A_i}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{sin dimensiones} \qquad K_9 = \frac{h_o A_o}{h_i A_i + h_o A_o}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$\tau_5 = \frac{V_C \rho_C C_{p_C}}{h_o A_o + \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}}, \quad \text{segundos} \qquad K_{10} = \frac{\bar{q}_C \rho_C C_{p_C}}{h_o A_o + \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}}, \quad \text{sin dimensiones}$$

$$K_{11} = \frac{h_o A_o}{h_o A_o + \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}}, \quad \text{sin dimensiones} \qquad K_{12} = \frac{\rho_C C_{p_C}(\bar{T}_C - \bar{T}_{C_i})}{h_o A_o + \bar{q}_C \rho_C C_{p_C}}, \quad \frac{K}{m^3/s}$$

El encadenamiento de las ecuaciones (4-45) y (4-46) con la (4-44) da por resultado el diagrama de bloques que se muestra en la figura 4-10.

Para determinar las funciones de transferencia requeridas se substituye la ecuación **(4-46)** en la (4-45):

$$\mathbf{T}_m(s) = \frac{K_8}{\tau_4 s + 1}\mathbf{T}(s) + \frac{K_9}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1)}(K_{10}\mathbf{T}_{C_i}(s) + K_{11}\mathbf{T}_m(s) - K_{12}Q_C(s))$$

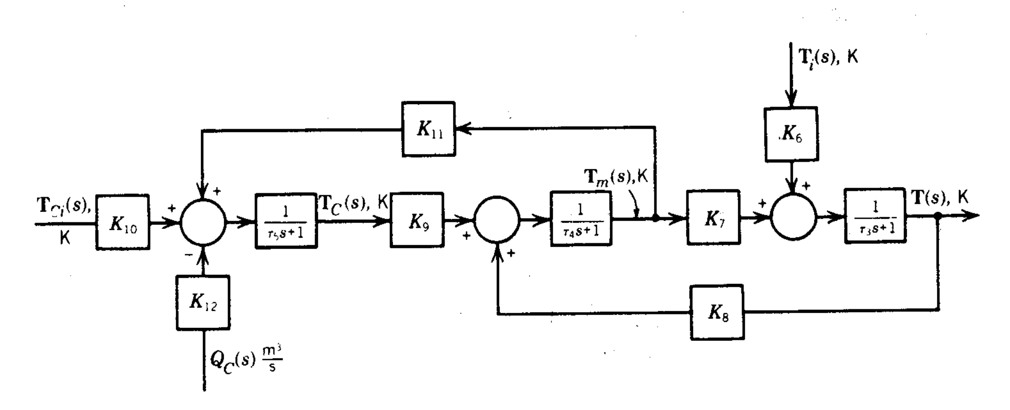


Figura 4-10. Diagrama de bloques del proceso **térmico**.

o

$$\mathbf{T}_m(s) = \frac{K_8(\tau_5 s + 1)}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1) - K_9 K_{11}} \mathbf{T}(s) + \frac{1}{(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1) - K_9 K_{11}} (K_9 K_{10} \mathbf{T}_{C_i}(s) - K_9 K_{12} Q_C(s))$$

De la substitución de esta última ecuación en la (4-44), se tiene

$$\mathbf{T}(s) = \frac{K_6}{\tau_3 s + 1} \mathbf{T}_i(s) + \frac{K_7 K_8 (\tau_5 s + 1)}{(\tau_3 s + 1)\left[(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1) - K_9 K_{11}\right]} \mathbf{T}(s) + \frac{K_7 K_9}{(\tau_3 s + 1)\left[(\tau_4 s + 1)(\tau_5 s + 1) - K_9 K_{11}\right]} (K_{10} \mathbf{T}_{C_i}(s) - K_{12} Q_C(s))$$

y, después de trabajar algebraicamente, se tiene

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{K_6(1 - K_9 K_{11})}{1 - K_9 K_{11} - K_7 K_8}\right) \left[\frac{\tau_6^2 s^2 + \tau_7 s + 1}{\tau_8^3 s^3 + \tau_9^2 s^2 + \tau_{10} s + 1}\right] \mathbf{T}_i(s) + \left(\frac{K_7 K_9}{1 - K_9 K_{11} - K_7 K_8}\right) \left[\frac{1}{\tau_8^3 s^3 + \tau_9^2 s^2 + \tau_{10} s + 1}\right] (K_{10} \mathbf{T}_{C_i}(s) - K_{12} Q_C(s)) \tag{4-47}$$

donde:

$$\tau_6 = \left(\frac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_9 K_{11}}\right)^{1/2}, \quad \text{segundos}$$

$$\tau_7 = \frac{\tau_4 - \tau_5}{1 - K_9 K_{11}} \quad \text{segundos}$$

$$\tau_8 = \left(\frac{\tau_3 \tau_4 \tau_5}{1 - K_9 K_{11} - K_7 K_8}\right)^{1/3}, \quad \text{segundos}$$

$$\tau_9 = \left(\frac{\tau_4 \tau_5 + \tau_3 \tau_4 + \tau_3 \tau_5}{1 - K_9 K_{11} - K_7 K_8}\right)^{1/2}, \quad \text{segundos}$$

$$\tau_{10} = \frac{\tau_3(1 - K_9 K_{11}) + \tau_4 + \tau_5 - K_7 K_8 K_5)}{1 - K_9 K_{11} - K_7 K_8}, \quad \text{segundos}$$

A partir de la ecuación (4-47) se obtienen las funciones de transferencia que se desean:

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{K_6(1 - K_9K_{11})}{1 - K_9K_{11} - K_7K_8}\left[\frac{\tau_6^2 s^2 + \tau_7 s + 1}{\tau_8^3 s^3 + \tau_9^2 s^2 + \tau_{10} s + 1}\right] \tag{4-48}$$

$$\frac{T(s)}{T_{ci}(s)} = \left(\frac{K_7K_9K_{10}}{1 - K_9K_{11} - K_7K_8}\right)\left[\frac{1}{\tau_8^3 s^3 + \tau_9^2 s^2 + \tau_{10} s + 1}\right] \tag{4-49}$$

$$\frac{T(s)}{Q_C(s)} = \left(\frac{-K_7K_9K_{12}}{1 - K_9K_{11} - K_7K_8}\right)\left[\frac{1}{\tau_8^3 s^3 + \tau_9^2 s^2 + \tau_{10} s + 1}\right] \tag{4-50}$$

Las funciones de transferencia que se expresan mediante las ecuaciones (4-49) y (4-50) son de tercer orden; es decir, el denominador es un polinomio de tercer orden en s. En el diagrama de bloques de la figura 4-10 se aprecia gráficamente que, si la temperatura de entrada del agua de enfriamiento cambia, lo primero que se afecta es la temperatura del agua en la camisa de enfriamiento, $T_C(t)$; por lo tanto, esta temperatura afecta, a su vez, a la de la pared de metal, $T_m(t)$; y, finalmente, esta temperatura influye en la del fluido que se procesa, T(t). Aquí hay tres sistemas de primer orden en serie. Las funciones de transferencia son análogas a las expresadas mediante las ecuaciones (4-39) y (4-40); la función de transferencia de la ecuación (4-48), también de tercer orden, es un poco diferente a las ecuaciones (4-49) y (4-50) y semejante a la ecuación (4-38).

Este proceso térmico es otro ejemplo de un proceso interactivo; la interacción se desarrolla mediante la expresión de la tasa de transferencia de calor: $UA[T(t)\ \ T_C(t)]$ en las ecuaciones (4-32) y (4-33); y $h_iA_i[T(t) -$ T,(t)] y $h_oA_o[T_m(t) - T_C(t)]$, en las ecuaciones (4-41), (4-42) y (4-43). En el diagrama de bloques de las figuras 4-8 y 4-10 se muestra esta interacción gráficamente.

4-4. RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR A DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES DE FORZAMIENTO

Hasta aquí se desarrollaron dos tipos de funciones de transferencia de orden superior:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_i s + 1)} \tag{4-51}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_{ld_j} s + 1)}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_{lg_i} s + 1)} \tag{4-52}$$

donde $n>m$.

En esta sección se presenta la respuesta de estos sistemas de orden superior a diferentes tipos de funciones de forzamiento, específicamente a las funciones escalón y senoidal; a partir de estos estudios se pueden hacer algunas generalizaciones acerca de las respuestas.

Función escalón

Primero se muestra la respuesta de los sistemas que se describen mediante la ecuación (4-5 1). Generalmente, una función de transferencia de segundo orden se escribe de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{K}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1} \qquad (4\text{-}53)$$

o

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} \qquad (4\text{-}54)$$

donde:

τ = constante de tiempo característica, tiempo
ξ = tasa de amortiguamiento, sin dimensiones

las relaciones entre los parámetros de las dos formas son

$$\tau = \sqrt{\tau_1\tau_2} \qquad (4\text{-}55)$$

Y

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}} \qquad (4\text{-}56)$$

La respuesta de una función de transferencia de segundo orden a un cambio escalón de magnitud unitaria en la función de forzamiento, X(s) = $1/s$, se obtiene como sigue. A partir de la ecuación (4-54)

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} = \frac{K r_1 r_2}{s(s - r_1)(s - r_2)} \qquad (4\text{-}57)$$

donde:

$$r_1 = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \qquad (4\text{-}58)$$

$$r_2 = -\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \qquad (4\text{-}59)$$

De las dos últimas ecuaciones se infiere que la respuesta de este sistema depende del valor de la razón de amortiguamiento, ξ.

Para un valor de ξ c 1, las raíces r_1 y r_2, son complejas, y la respuesta que se obtiene del sistema, mediante el procedimiento que se estudió en el capítulo 2, se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$Y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi t/\tau} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{t}{\tau} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right] \qquad (4\text{-}60)$$

La respuesta de este tipo de sistema se ilustra gráficamente en la figura 4-11; como se puede ver, la respuesta es oscilatoria y, por tanto, se dice que los *sistemas* de este tipo son *subamortiguados* (bajoamortiguados).

Para un valor de $\xi = 1$, las raíces son reales e iguales; la respuesta se expresa mediante

$$Y(t) = K\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right] \qquad (4\text{-}61)$$

En la figura 4-11 se ilustra la respuesta de este sistema, la cual es la aproximación más rápida al valor final, sin sobrepasarlo, y, en consecuencia, no hay oscilación. Los *sistemas* en que $\xi = 1$ se denominan *cn'ticamente amortiguados.*

Para un valor de $\xi > 1$ las raíces son reales y diferentes, la respuesta del sistema la da

$$Y(t) = K\left[1 - 0.5e^{-\frac{\xi t}{\tau}}\left[e^{\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}}\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right) + e^{\frac{-\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}}\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right)\right]\right] \qquad (4\text{-}62)$$

La respuesta de este tipo de sistema también se muestra en la figura 4-11. La respuesta jamás sobrepasa al valor final y su aproximación es más lenta que en los sistemas críticamente amortiguados. Se dice que este tipo de *sistema* está *sobreamortiguado.*

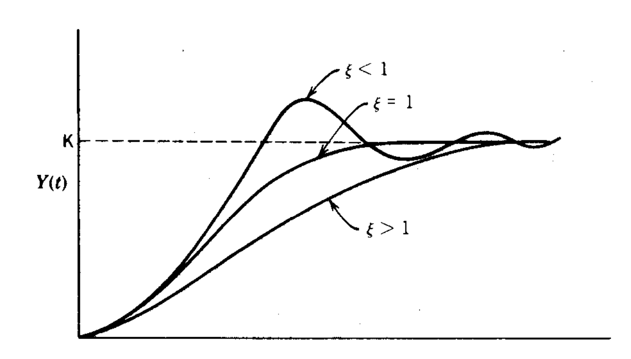


Figura 4-11. Respuesta de un sistema de segundo orden a un cambio escalón unitario en la función de forzamiento.

Los tres tipos de sistemas de segundo orden son muy importantes en el estudio del control automático de proceso. Las respuestas de los sistemas de control son semejantes a alguna de las arriba indicadas. La respuesta de circuito abierto de la mayoría de los procesos industriales es similar a la críticamente amortiguada o a la sobreamortiguada; esto es, generalmente no oscilan, sin embargo, puede haber oscilación cuando se cierra el circuito. La respuesta de los sistemas con circuito cerrado se aborda en el capítulo 6.

Es importante reconocer las diferencias entre la respuesta de los sistemas de segundo orden y la de los de primer orden, cuando se les somete a cambios escalón en la función de forzamiento. La diferencia más notable es que, en los sistemas de segundo orden, la pendiente mayor no se presenta al inicio de la respuesta, sino tiempo después; en los sistemas de primer orden, como se demostró en el capítulo anterior, la mayor pendiente ocurre al principio de la respuesta. Otra diferencia es que los sistemas de primer orden no oscilan; mientras que en los de segundo orden sí puede haber oscilación.

Como se ve en la figura 4-11, la cantidad de amortiguamiento en un sistema de segundo orden se expresa mediante la razón de amortiguamiento, y ésta, así como la constante de tiempo característica, τ, depende de los parámetros físicos del proceso. Si cualquiera de los parámetros físicos cambia, el cambio se refleja en una variación en ξ, en τ, o en ambas.

El análisis de la respuesta del sistema subamortiguado es de particular interés en el estudio del control automático de proceso, esto se debe al hecho de que, como se mencionó anteriormente, la respuesta de la mayoría de los circuitos cerrados es semejante a la respuesta subamortiguada. A causa de esta semejanza, se deben definir algunos términos importantes en relación con la respuesta subamortiguada; tales términos se definen a continuación, con referencia a la figura 4-12.

Sobrepaso. El "sobrepaso" "es la cantidad en que la respuesta excede el valor final de estado estacionario; generalmente se expresa como la relación de *B/A*

$$\frac{B}{A} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-63}$$

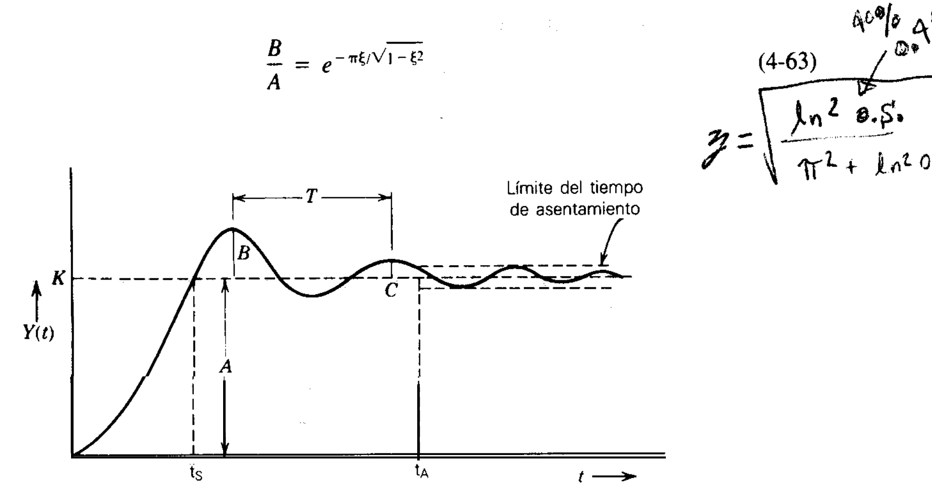


Figura 4-12. Respuesta de un proceso subamortiguado de segundo orden.

Razón de asentamiento. La razón de asentamiento se define como

$$\frac{C}{B} = e^{-2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-64}$$

Éste es un término importante, ya que sirve como criterio para establecer la respuesta satisfactoria de los sistemas de control.

Tiempo de elevación, t_R. Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez el valor final.

Tiempo de asentamiento, t_S. Es el tiempo que tarda la respuesta en llegar a ciertos límites preestablecidos del valor final y permanecer dentro de ellos. Dichos límites son arbitrarios; los valores típicos son $\pm$ 5 % ó $\pm$ 3 %.

Período de oscilación, T. El período de oscilación se expresa mediante

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \text{tiempo/ciclo} \tag{4-65}$$

Otro término relacionado con el período de oscilación es la frecuencia cíclica, f, que se define como sigue:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\tau}, \quad \text{ciclos/tiempo} \tag{4-66}$$

Otros dos términos son el período natural de oscilación y la frecuencia cíclica natural, cuando $\xi = 0$; se definen como

$$T_n = 2\pi\tau \tag{4-67}$$

y

$$f_n = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{4-68}$$

Frecuentemente también se usa la siguiente expresión para una función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\dfrac{s^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_n}s + 1} \tag{4-69}$$

El término ω_n se conoce como frecuencia natural. Al comparar la ecuación (4-69) con la (4-54), se ve fácilmente que

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \tag{4-70}$$

La frecuencia en radianes, ω, se relaciona con la frecuencia cíclica, f, mediante

$$\omega = 21Tf \qquad (4\text{-}7\ 1)$$

y, por substitución de la ecuación (4-66) en la (4-719, se relaciona la frecuencia en radianes con la frecuencia natural:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\tau} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{4-72}$$

Toda la exposición anterior se aplica a sistemas de segundo orden. Para los sistemas de tercer orden o de orden superior, cuyas constantes de tiempo son reales y distintas, la respuesta a un cambio escalón de magnitud unitaria la da la ecuación (4-73), como se muestra en la figura 4-13.

$$Y(t) = K\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i^{n-1} e^{-t/\tau_i}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\tau_i - \tau_j)}\right] \tag{4-73}$$

En el capítulo 2 se presentó el método general para la solución de otros tipos de constantes de tiempo.

Probablemente la característica más importante de las respuestas que se muestran en la figura 4- 13 es que parecen muy similares a la respuesta de un sistema de segundo orden sobreamortiguado con alguna cantidad de tiempo muerto. Conforme aumenta el orden del sistema, también aumenta el tiempo muerto aparente, lo cual es importante en el estudio del control automático de proceso, porque la mayoría de los procesos industriales se componen de una cierta cantidad de sistemas de primer orden en serie. Además, a causa de

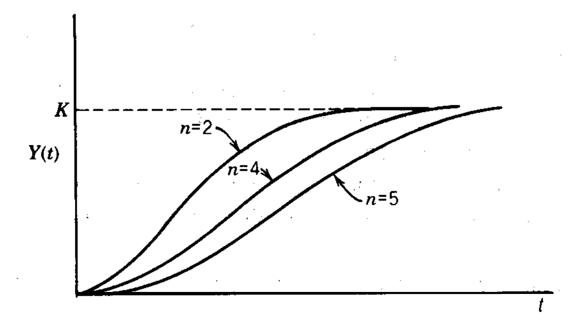


Figura 4-13. Respuesta de los sistemas sobreamortiguados de orden superior a un cambio escalón en la función de forzamiento.

la similitud, la respuesta de un sistema de tercer orden, o de cualquier otro de orden superior, se puede aproximar mediante la respuesta de un sistema de segundo orden más tiempo muerto. Lo anterior se representa matemáticamente como sigue:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_i s + 1)} \approx \frac{K e^{-t_0 s}}{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)} \tag{4-74}$$

Matemáticamente esta aproximación es muy buena.

Hasta aquí se ha tratado la respuesta de los procesos que se describen mediante la ecuación (4-51). Ahora se tratará la respuesta a un cambio escalón de magnitud unitaria en la función de forzamiento, $X(s) = 1/s$, de los procesos que se describen mediante la ecuación (4-52). En general, la respuesta para sistemas con raíces reales y distintas se representa mediante la siguiente ecuación:

$$Y(t) = K\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{m}(\tau_{lg_i} - \tau_{ld_j})\tau_{lg_i}^{n-m-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(\tau_{lg_i} - \tau_{ld_j})} e^{-t/\tau_{lg_i}}\right] \tag{4-75}$$

Para lograr una mejor comprensión del término $(\tau_{ld}\, s + 1)$, compárese la respuesta de los dos procesos siguientes:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s(\tau_{lg_1} s + 1)(\tau_{lg_2} s + 1)(\tau_{lg_3} s + 1)} \tag{4-76}$$

Y

$$Y_2(s) = \frac{(\tau_{ld} s + 1)}{s(\tau_{lg_1} s + 1)(\tau_{lg_2} s + 1)(\tau_{lg_3} s + 1)} \tag{4-77}$$

En la figura 4-14 se comparan las respuestas; la respuesta para $\tau_{ld} = 0$ corresponde a la ecuación (4-76). El efecto del término $(\tau_{ld} s + 1)$ es "acelerar" la respuesta del proceso, lo cual es opuesto al efecto del término $1/(\tau_{lg} s + 1)$; en el capítulo 3 se hizo referencia al término $1/(\tau_{lg} s + 1)$ como ***retardo de primer orden y,*** en consecuencia, al término $(\tau_{ld}\, s + 1)$ ***se*** le conoce como ***adelanto de primer orden;*** por tal motivo se utiliza la notación τ_{lg} para indicar un "retardo" en la constante de tiempo; y τ_{ld}, para indicar un "adelanto". Nótese que, cuando τ_{ld} se hace igual a τ_{lg}, la función de transferencia con que se describe la relación entre Y(s) y X(s) se vuelve inferior en un orden, cuando no tiene el término de adelanto.

Un caso interesante e importante es el de la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau_{ld} s + 1}{\tau_{lg} s + 1} \tag{4-78}$$

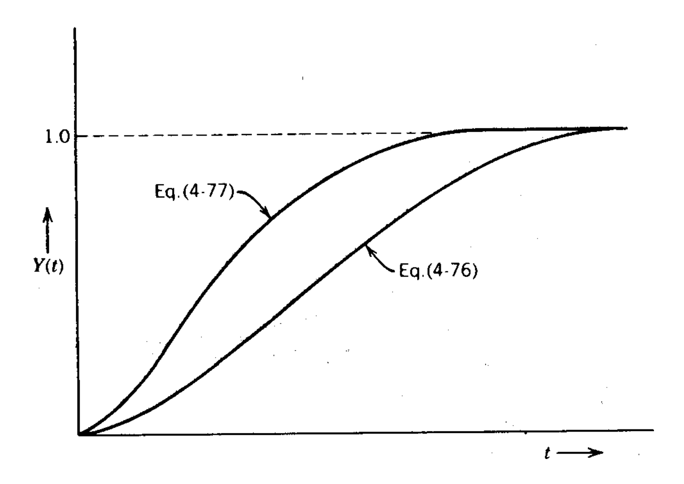


Figura 4-14. Comparación de las respuestas de las ecuaciones (4-76) y (4-77).

Esta función de transferencia se denomina adelantohetardo; la expresión con que se describe la respuesta de Y(t) a un cambio con magnitud de un escalón unitario en la función de forzamiento es, de la ecuación (4-75):

$$Y(r) = 1 + \frac{\tau_{ld} - \tau_{lg}}{\tau_{lg}} e^{-t/\tau_{lg}} \tag{4-79}$$

En la figura 4-15 se muestra gráficamente la respuesta para el caso en que $\tau_{lg} = 1$ con diferentes relaciones τ_{ld}/τ_{lg}. Es importante reconocer tres puntos acerca de la respuesta de un adelantohetardo. El primero y más importante es la cantidad inicial de respuesta, que depende de la relación τ_{ld}/τ_{lg}; la respuesta inicial es igual a τ_{ld}/τ_{lg} veces la magnitud del cambio escalón. Segundo, la cantidad final de cambio en la salida del adelantohetardo es igual a la magnitud del cambio escalón en la entrada. Tercero, la razón exponencial de asentamiento o incremento en la salida es únicamente función de la constante de tiempo de "retardo", τ_{lg}. Como se verá en el capítulo 8, los sistemas de adelantohetardo son importantes para la implementación de las técnicas de control con acción precalculada.

Función senoidal

La expresión de Laplace para una función de forzamiento de onda senoidal es

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Entonces, la respuesta de un sistema de segundo orden a este tipo de función de forzamiento se expresa mediante

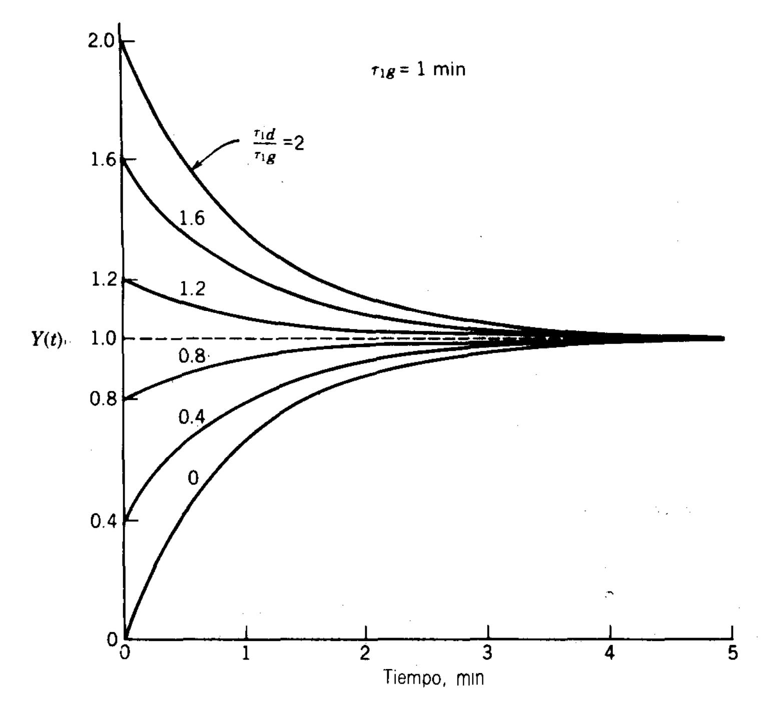


Figura 4-15. Respuesta de la unidad **adelanto/retardo** a un cambio escalón unitario en la función de forzamiento.

$$Y(s) = \frac{KA\omega}{(s^2 + \omega^2)(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)}$$

Al regresar al dominio del tiempo se tiene

$$Y(t) = e^{-\xi t/\tau}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2}\,\frac{t}{\tau}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{1 - \xi^2}\,\frac{t}{\tau}\right)\right) + \frac{KA}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{4-80}$$

donde :

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\tau}{1 - (\omega\tau)^2}\right) \tag{4-81}$$

C_1, C_2 = constantes a evaluar

Conforme el tiempo aumenta, el término $e^{-\xi t/\tau}$ se vuelve despreciable y la respuesta alcanza una oscilación estacionaria que se expresa **mediante**

$$Y(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{K\quad A}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \theta) \tag{4-82}$$

Como se verá en el capítulo 7, tal respuesta se vuelve importante en el estudio del control automático de proceso. La oscilación estacionaria se conoce como respuesta en frecuencia del sistema, cuya amplitud es igual a la ganancia del sistema multiplicada por la amplitud de la función forzada y la atenúa el factor

$$\frac{}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

Como se definió en la sección 3-7, la relación de amplitud para este sistema es

$$\frac{K}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2] + (2\xi\omega\tau)^2}}$$

Tanto la relación de amplitud como el retardo de fase, θ, son funciones de ω, frecuencia de la función de forzada. En el capítulo 7'se examina **también** la respuesta en frecuencia de otros sistemas de orden superior.

4-5. RESUMEN

En este capítulo se presentó el desarrollo de los modelos matemáticos con que se describe el comportamiento de los procesos de orden superior. Los procesos que se expusieron son más complejos que los del capítulo 3 y, en consecuencia, los modelos son también más complejos. En particular, se desarrollaron funciones de transferencia de segundo y tercer orden; los ejemplos que se utilizaron representan casos de procesos interactivos y no interactivos. También se presentaron las respuestas de estos sistemas de orden superior a un cambio escalón y senoidal en las funciones de forzamiento; asimismo se describieron e hicieron notar las diferencias entre estas respuestas y las de los sistemas de primer orden; probablemente la diferencia más importante sea la respuesta a un cambio escalón en la función de forzamiento; por el contrario para los sistemas de primer orden, la pendiente inicial de la respuesta es la más pronunciada de la curva completa, de respuesta; para los sistemas de orden superior éste no es el caso, ya que la pendiente más pronunciada ocurre más tarde en la curva de respuesta.

Los sistemas de orden superior presentados en este capítulo se obtuvieron porque se componen de sistemas de primer orden en serie, es decir, dichos sistemas no son intrínsecamente de orden superior. La mayoría de los procesos industriales son como los expuestos aquí; si existen algunos procesos intrínsecamente de orden superior, son pocos y bastante aislados. Los ejemplos típicos de sistemas intrínsecos de segundo orden que se presentan en los textos de control son elementos de medición tales como los sensores de presión de tubo de Bourdon y los manómetros de mercurio, los cuales son parte del circuito total de control y, sin embargo, las más'de las veces su dinámica no es significativa, en compa-

ración con el proceso mismo, por tal motivo no se consideran aquí y se remite al lector a las referencias **bibliográficas** 1 y 2 para consultas al respecto.

Puesto que la mayoría de los procesos industriales se compone de procesos de primer orden en serie, su respuesta dinámica de circuito abierto es sobreamortiguada, pero una vez que se cierra el circuito de control, mediante la instalación de un controlador en la retroalimentación su respuesta se puede convertir en subamortiguada; este caso se estudia en el capítulo 6.

BIBLIOGRAFÍA

1. Close, C. M. y D. K. Frederich, ***Modeling and Analysis of Dynamic Systems***, Houghton Mifflin, Boston, 1978.
2. Tyner, M. y F. P. May, ***Process Engineering Control,*** Ronald Press, Nueva York, 1968.

PROBLEMAS

4-1. Considérese el proceso que se muestra en la figura 4- 16, la tasa de flujo de líquido, w, a través de los tanques tiene un valor constante de 250 **lbm/min**. Se puede suponer que la densidad del líquido se mantiene constante a 50 **lbm/pie^3**, al igual que la capacidad calorífica, la cual posee un valor de 1.3 **Btu/lbm – °F**; el volumen de cada tanque es de 10 **pies^3**. Las pérdidas de calor al ambiente son despreciables.

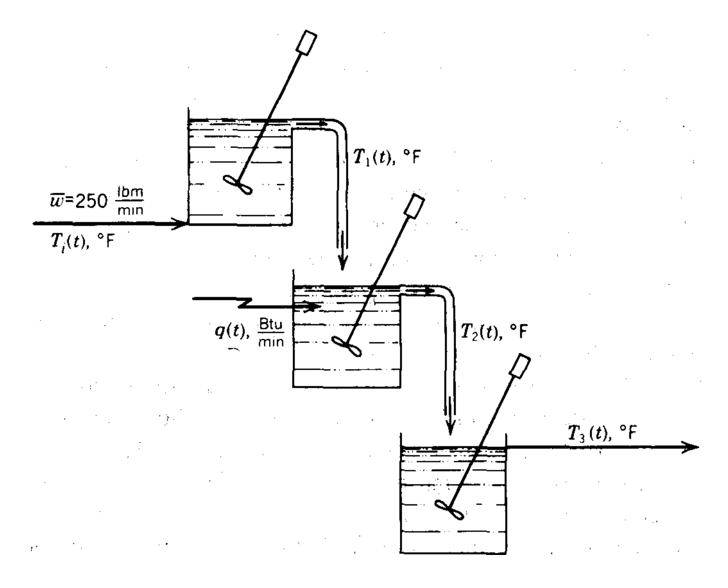


Figura 4-16. Diagrama para el problema 4-1.

Se debe dibujar el diagrama de bloques donde se muestre la manera en que los cambios de la temperatura de entrada $T_i(t)$ y $q(t)$ afectan a $T_3(t)$. Es necesario también anotar los valores numéricos y las unidades de cada parámetro en todas las funciones de transferencia.

4-2. Considérese el proceso que se muestra en la figura 4-17, acerca del cual se sabe lo siguiente:

a) La densidad de todas las corrientes es aproximadamente igual.
b) El flujo a través de la bomba, con velocidad constante, se expresa mediante

$$q(t) = A(1 + B(p_1(t) - p_2(t))^2), \quad m^3/s$$

donde A y B son constantes.
c) El conducto entre los puntos 2 y 3 es más bien largo, con longitud de L, *m*. El flujo a través de este conducto es altamente turbulento (flujo de acoplamiento); el diámetro del mismo es de D, *m*; la caída de presión entre los dos puntos es bastante constante y vale Δ_p kPa.
d) Se puede suponer que los efectos de energía que se asocian a la reacción $(A \rightarrow B)$ son despreciables; en consecuencia, la reacción ocurre a una temperatura constante. La tasa de reacción se expresa mediante

$$r_A(t) = kC_A(t), \quad \frac{kgm}{m^3 - s}$$

e) El flujo a través de la válvula de salida lo da

$$q(t) = C_V vp(t)\sqrt{h_2(t)}$$

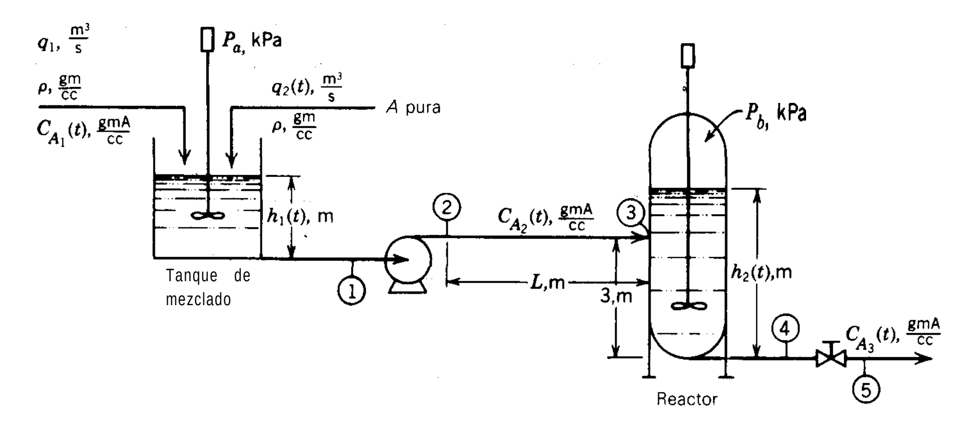


Figura 4-17. Diagrama para el problema 4-2.

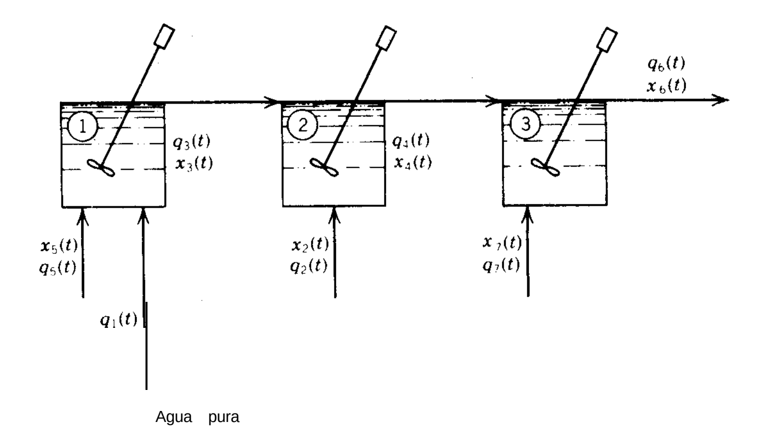


Figura 4-18. Diagrama para el problema 4-3.

Obténgase el diagrama de bloques donde se muestre el efecto de las funciones forzadas $q_2(t)$, $vp(t)$ y $C_{A1}(t)$ sobre las variables de respuesta $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $C_{A3}(t)$.

4-3. Considérese el proceso que se muestra en la figura 4-18, en el que se mezclan diferentes corrientes. Las corrientes 5, 2 y 7 son soluciones de agua con el componente *A;* la corriente 1 es de agua pura. En la tabla 8-4 aparecen los valores de estado estacionario para cada corriente. Se deben determinar las siguientes funciones de transferencia con valores numéricos:

$$\frac{X_6(s)}{X_5(s)}, \quad \frac{X_6(s)}{X_2(s)} \quad \text{Y} \quad \frac{X_6(s)}{Q_1(s)}$$

4-4. Considérese el proceso que se muestra en la figura 4-19; a uno de los tanques entra una corriente de gas, $q_2(t)$, donde se mezcla con otra corriente, $q_1(t)$, la cual es *A* puro; de este tanque la mezcla gaseosa fluye a un separador en donde el componente

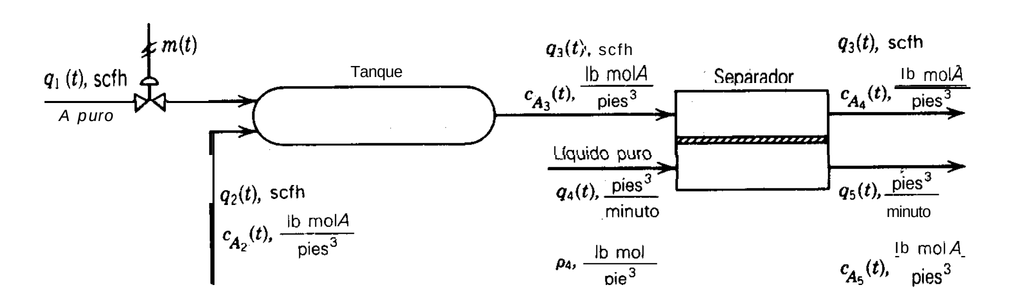


Figura 4-19. Diagrama para el problema 4-4.

A se difunde, a través de una membrana semipermeable, a un líquido puro. Se puede suponer lo siguiente:

a) La caída de presión a través de la válvula es constante, y el flujo de A puro a través de esta válvula se expresa mediante

$$q_1(t) = k_v vp(t)$$

donde $q_1(t)$ esta en **scfh,** es decir ***standard cubic feet per hour*** (o pies cúbicos por hora). La posición de la válvula, $vp(t)$, se relaciona con la señal neumática, $m(t)$, mediante la siguiente expresión:

$$vp(t) = \frac{1}{12}(m(t) - 3)$$

b) El flujo volumétrico de salida, $q_3(t)$, del tanque es igual a la suma de los flujos de entrada; el gas se comporta como un fluido incompresible.
c) El gas en el interior del tanque esta bien mezclado.
d) Se supone que el gas en el separador esta bien mezclado, lo mismo se supone para el líquido.
e) La tasa de transferencia de masa a través de la membrana semipermeable la da

$$N_A(t) = A_X K_A[c_{A4}(t) - c_{A5}(t)]$$

donde:

$N_A(t)$ = tasa de transferencia de masa, lb mol$A$/h
A_X = área transversal de la membrana, pies^2
K_A = coeficientes de transferencia global de masa, pies/h

f) La cantidad de componente A que se difunde en el líquido no afecta significativamente al flujo volumétrico de gas y, por lo tanto, se puede considerar que el flujo que sale del separador es igual al que entra.
g) La cantidad de componente A que se difunde en el líquido sí afecta al flujo volumétrico; la densidad del flujo de líquido que sale del separador se expresa mediante

$$\rho_5(t) = \rho_4 + k_5 c_{A5}(t), \quad \text{lb moles/pies}^3$$

Se debe hacer lo siguiente:

1. Escribir el modelo matemático del tanque.
2. Escribir el modelo matemático del separador.
3. Dibujar el diagrama de bloques donde se muestren las variables de salida $C_{A4}(t)$ y $C_{A5}(t)$ con la manera en que las afectan $m(t)$, $q_2(t)$ y $C_{A2}(t)$. También se deben obtener las funciones de transferencia.

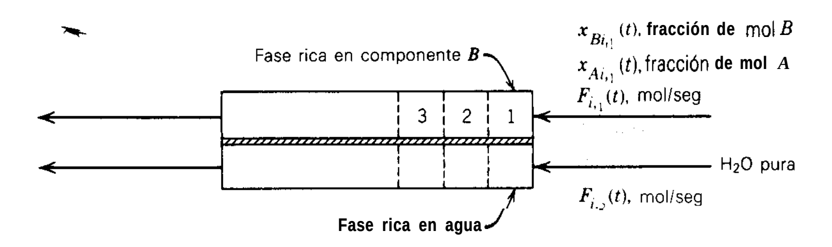


Figura 4-20. Diagrama para el problema **4-5**.

4-5. Considerese la unidad de extracción que se ilustra en la figura 4-20; el objeto de la unidad es remover el componente ***A*** de un compuesto rico en *B*. La transferencia de ***A*** a un medio acuoso se realiza a través de una membrana semipermeable; en este proceso la concentración de *A* es una función de la posición a lo largo de la unidad y del tiempo y, por tanto, la ecuación con que se describe la concentración es una ecuación diferencial parcial (EDP) de longitud y tiempo. Los sistemas que se describen mediante EDP se conocen como "sistemas distribuidos"; en el capítulo 9 se presentan más sistemas de este tipo. Una manera común de proceder con las EDP es dividir la unidad en secciones o "estanques" y suponer que en cada "estanque" la mezcla es buena; mediante las líneas punteadas se muestra la división en "estanques' '. Mediante dicho método se encuentra que las diferenciales de longitud, dL, se pueden aproximar mediante ΔL; mientras más pequeños son los "estanques", mejor es la aproximación.

La transferencia de masa del componente *A* es

$$N_A(t) = Sk_A[x_{A_{n,1}}(t) - x^*_{A_{n,2}}(t)]$$

donde:

$N_A(t)$ = moles de *A* que se transfieren por segundo

S = superficie de la membrana a través de la cual tiene lugar la transferencia, m^2.

k_A = coeficiente de transferencia, constante, mol A/m^2-s

$x_{An,1}(t)$ = fracción de mol de *A* en la fase líquida 1 (fase rica en componente B); el subíndice se refiere al número de "estanque':.

$x^*_{An,2}(t)$ = fracción de mol de *A* en la fase líquida 2 (fase rica en agua), la cual debe estar en equilibrio con $x_{An,1}(t)$.

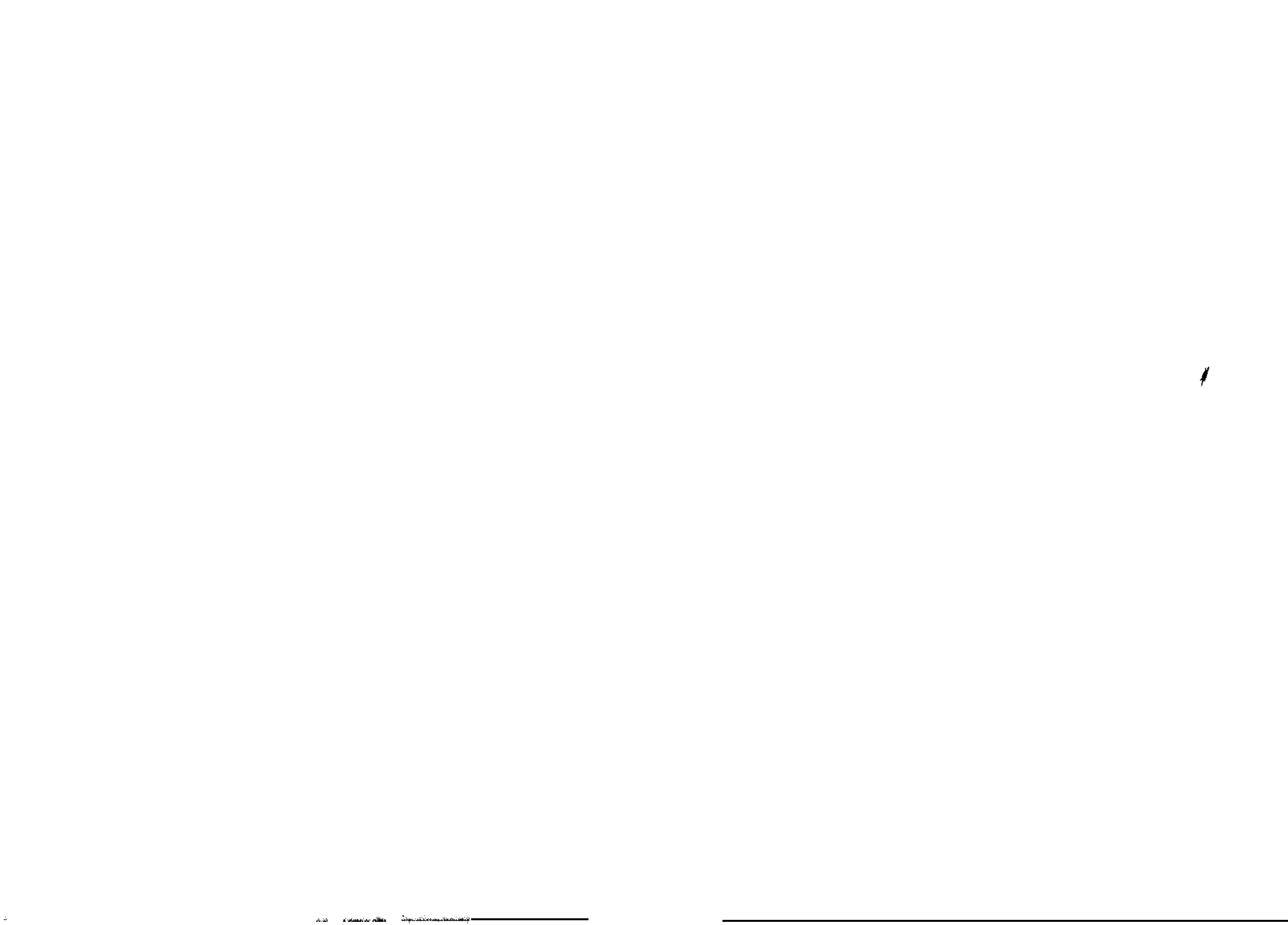
Con la ley de Henry se puede relacionar $x^*_{An,2}(t)$ con la concentración real de *A* en la fase líquida 2.

$$x^*_{A_{n,2}}(t) = H_A x_{A_{n,2}}(t)$$

donde:

H = constante de la ley de Henry
$x_{An,2}(t)$ = fracción de mol de A en la fase líquida 2

Ni el componente B ni el agua se transfieren a través de la membrana y el proceso se realiza de manera **isotérmica.** Obténgase el diagrama de bloque donde se muestre cómo afectan las funciones de forzamiento $x_{Ai,1}(t)$, $F_{i,1}(t)$ y $F_{i,2}(t)$ a las variables de salida $x_{A2,1}(t)$ y $x_{A2,2}(t)$; es decir, se deben elaborar los dos primeros "estanques".



CAPÍTULO 5

Componentes básicos de los sistemas de control

En el capítulo 1 se vio que los cuatro componentes básicos de los sistemas de control son los sensores, los transmisor&, los controladores y los elementos finales de control; también se vio que tales componentes desempeñan las tres operaciones básicas de todo sistema de control: medición (M), decisión (D) y acción (A).

En este capítulo se hace una breve revisión de los sensores y los transmisores, a la cual sigue un estudio más detallad8 de las válvulas de control y de los controladores de proceso. En el apéndice C se presentan más ampliamente los diferentes tipos de transmisores, sensores y válvulas de control; en el mismo apéndice se muestran varios diagramas, esquemas y otras figuras que sirven de apoyo para explicar y familiarizar al lector con tantos instrumentos como es posible.'

5-1. SENSORES Y TRANSMISORES

Con los sensores y transmisores se' realizan las operaciones de medición en el sistema de control. En el sensor se produce un fenómeno mecánico, eléctrico o similar, el cual se relaciona con la variable de proceso que se mide; el transmisor, a su vez, convierte este fenómeno en una señal que se puede transmitir y, por lo tanto, ésta tiene relación con la variable del proceso.

Existen tres términos importantes que se relacionan con la combinación **sensor/transmisor:** la ***escala,*** el rango y el cero del instrumento. A la ***escala*** del instrumento la definen los valores superior e inferior de la variable a medir del proceso; esto es, si se considera que un **sensor/transmisor** se calibra para medir la presión entre 20 y 50 psig de un proceso, se dice que la escala de la combinación sensorhransmisor es de 20-50 psig. El rango del instrumento es la diferencia entre el valor superior y el inferior de la escala, para el instrumento citado aquí el rango es de 30 psig. En resumen, para definir la escala del

instrumento se deben especificar un valor superior y otro inferior; es decir, es necesario dar dos números; mientras que el rango es la diferencia entre los dos valores. Para terminar, el valor inferior de la escala se conoce como cero del instrumento, este valor no necesariamente debe ser cero para llamarlo así; en el ejemplo dado más arriba el "cero" del instrumento es de 20 psig.

En el apéndice C se presentan algunos de los sensores industriales más comunes: de presión, de flujo, de temperatura y de nivel. En el mismo apéndice seestudiah los principios de funcionamiento tanto de un transmisor eléctrico como de uno neumático.

Como se verá en el capitulo 6, para el análisis del sistema algunas veces es importante obtener los parhetros con que se 'describe el comportamiento del sensor/transmisor; la ganancia es bastante fácil de obtener una vez que se conoce el rango. Considérese un sensor/transmisor electrónico de presión cuya escala va de 0-200 psig; en el capítulo 3 se definió la ganancia como el cambio en la salida o variable de respuesta entre el cambio en la entrada o función de forzamiento; en el ejemplo citado aquí, la salida es la señal electrónica, 4-20 mA; y la entrada es la presión en el proceso, 0-200 psig; por tanto

$$K^T = \frac{20 \text{ mA} - 4 \text{ mA}}{200 \text{ psig} - 0 \text{ psig}} = \frac{16 \text{ mA}}{200 \text{ psi}} = 0.08 \frac{\text{mA}}{\text{psi}}$$

Si se considera como otro ejemplo un sensor/transmisor neumático de temperatura, con escala de 100-300°F, la ganancia es:

$$K_T = \frac{15 \text{ psig} - 3 \text{ psig}}{300°\text{F} - 100°\text{F}} = \frac{12 \text{ psi}}{200°\text{F}} = 0.06 \frac{\text{psi}}{°\text{F}}$$

Por tanto, se puede decir que la ganancia del sensor/transmisor es la relación del rango de la entrada respecto al rango de la salida.

En los dos ejemplos se observa que la ganancia del sensor/transmisor es constante,, sobre todo el rango de operación, lo cual es cierto para la mayoría de los sensores/transmisores; sin embargo, existen algunos casos en que esto no es cierto, por ejemplo, en el sensor diferencial de presión que se usa para medir flujo, mediante el cual se mide el diferencial de presión, h, en la sección transversal de un orificio, mismo que, a su vez, se relaciona con el cuadrado del índice de flujo volumétrico, F, es decir:

$$F^2 \alpha h$$

Cuando se usa el transmisor electrónico de diferencial de presión para medir un flujo volumétrico con rango de $0\text{-}F_{máx}$ gpm, la ecuación con que se describe la señal de salida es:

$$M_F = 4 + \frac{16}{(F_{máx})^2} F^2$$

donde:

M_F = señal de salida en mA
F = flujo volumétrico

A partir de esta ecuación se obtiene la ganancia del transmisor como sigue:

$$K_T = \frac{dM_F}{dF} = \frac{2(16)}{(F_{máx})^2}\bar{F}$$

La ganancia nominal es:

$$K'_T = \frac{16}{F_{máx}}$$

En esta expresión se aprecia que la ganancia no es constante, antes bien, esta en función del flujo; tanto mayor sea, el flujo cuanto mayor será la ganancia. Específicamente:

$\left(\frac{\bar{F}}{F_{máx}}\right)$	0	0.1	0.5.	0.75	1.0
$\left(\frac{K_T}{K'_T}\right)$	0	0.2	1.0	1.50	2.0

De manera que la ganancia real varía de cero hasta dos veces la ganancia nominal.

De este hecho resulta la no linealidad de los sistemas de control de flujo. Actualmente la mayoría de los fabricantes ofrecen transmisores de diferencial de presión en los que se interconstruye un extractor de raíz cuadrada, con lo que se logra un transmisor lineal. En el capítulo 8 se trata con más detalle el uso de los extractores de raíz cuadrada.

La respuesta dinámica de la mayoría de los sensores/transmisores es mucho más rápida que la del proceso; en consecuencia, sus constantes de tiempo y tiempo muerto se pueden considerar despreciables y, por tanto, su función de transferencia la da la ganancia pura; sin embargo, cuando se analiza la dinámica, la función de transferencia del instrumento generalmente se representa mediante un sistema de primer o segundo orden:

$$G(s) = \frac{K_T}{\tau s + 1} \quad o \quad G(s) = \frac{K_T}{\tau^2 s + 2\tau\xi s + 1}$$

Los parámetros dinámicos se obtienen casi siempre de manera empírica, mediante métodos similares a los que se presentan en los capítulos 6 y 7.

5-2. VÁLVULAS DE CONTROL

Las válvulas de control son los elementos finales de control más usuales y se les encuentra en las plantas de proceso, donde manejan los flujos para mantener en los puntos de control las variables que se deben controlar. En esta sección se hace una introducción a los aspectos más importantes de las válvulas de control para su aplicación al control de proceso.

La válvula de control actúa como una *resistencia variable* en la línea de proceso; mediante el cambio de su apertura se modifica la resistencia al flujo y, en consecuencia, el flujo mismo. Las válvulas de control no son más que reguladores de flujo.

En esta sección se presenta la acción de la válvula de control (en condición de falla), su dimensionamiento y sus características. En el apéndice C se presentan diferentes tipos de válvulas de control y sus accesorios. Se recomienda encarecidamente al lector leer el apéndice C junto con esta sección.

Funcionamiento de la válvula de control

La primera pregunta que debe contestar el ingeniero cuando elige una válvula de control es: ¿Cómo se desea que actúe la válvula cuando falla la energía-que la acciona? La pregunta se relaciona con la "posición en falla" de la válvula y el principal factor que se debe tomar en cuenta para contestar esta pregunta es, o debe ser, la seguridad. Si el ingeniero decide que por razones de seguridad la válvula se debe cerrar, entonces debe especificar que se requiere una válvula "cerrada en falla" (CF) (FC por sus siglas en inglés); la otra posibilidad es la válvula "abierta en falla" (AF); es decir, cuando falle el suministro de energía, la válvula debe abrir paso al flujo. La mayoría de las válvulas de control se operan de manera neumática y, consecuentemente, la energía que se les aplica es aire comprimido. Para abrir una válvula cerrada en falla se requiere energía y, por ello, también se les conoce corno'válvulas de "aire para abrir" (AA) (AO por sus siglas en inglés). Las válvulas abiertas en falla, en las que se requiere energía para cerrarlas,

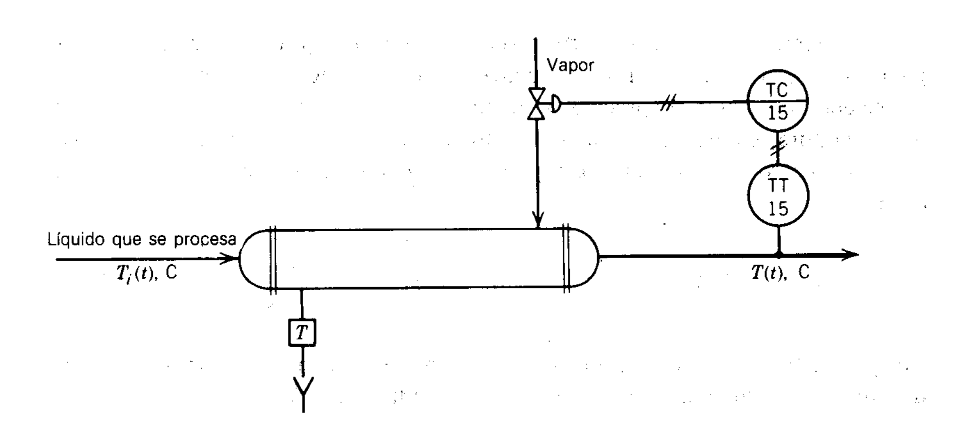


Figura 5-1. Circuito de control para **intercambiador** de calor.

se conocen también como de “aire para cerrar” **(AC).** Enseguida se vera un ejemplo para ilustrar la **forma de** elegir la acción de las, **válvulas** de control; éste es el proceso que se muestra en la figura 5-1, en **él** la temperatura a la que sale el fluido bajo proceso se controla mediante el manejo del flujo de vapor al intercambiador de calor. La pregunta es: **¿cómo** se desea que opere la **válvula** de vapor cuando falla el siministro de aire que le llega?

Como se explicó anteriormente, sé desea que la válvula de vapor se mueva a la posición más segura; al parecer, ésta puede ser aquella con la que se detiene el flujo de vapor, es decir, no se desea flujo de vapor cuando se opera en condiciones inseguras, lo cual significa que se debe especificaruna **válvula** cerrada en falla. Al tomar tal decisión, no se tomó en cuenta el efecto de no calentar el líquido en proceso al cerrar la **válvula;** en algunas ocasiones puede que no exista problema alguno, sin embargo, en otras se debe tomar en cuenta. Considérese, por ejemplo, el caso en que se mantiene la temperatura de un cierto polímero con el vapor; si se cierra la válvula de vapor, la temperatura desciende y el polímero se solidifica en elintercambiador; en este ejemplo, la decisión puede ser que con la **válvula** abierta en falla se logra la condición más segura.

Es importante notar que en el ejemplo **sólo** se tomó en cuenta la condición de seguridad en el intercambiador, que no es necesariamente la más segura en la operación completa; es decir, el ingeniero-debe considerar la planta completa en lugar de una sola pieza del equipo; debe prever el efecto en el intercambiador de calor, así como en cualquier otro equipo del que provienen o al cual **van** el vapor y el fluido que se procesa. En resumen, el ingeniero debe tomaren cuenta la ***seguridad en la planta entera.***

Dimensionamiento de la válvula de control

El dimensionamiento de la **válvula** de control es el procedimiento mediante el cual se calcula el coeficiente de flujo de la **válvula,** C_V; el “método C_V'' tiene bastante aceptación entre los fabricantes de **válvulas;** lo utilizó por primera vez la Masoneilan International, Inc. [(2)], en 1944. Cuando ya se **calculó el** C_V requerido y se conoce el tipo de **válvula** que se va a utilizar, el ingeniero puede obtener el tamaño de la **válvula** con base en el catalogo del fabricante.’

El coeficiente C_V se define como “la cantidad de agua en galones U.S. que fluye por minuto a través de una **válvula** completamente abierta, **con** una **caída** de **presión** de 1 psi en la sección transversal de la **válvula.**'' Por ejemplo; a **través** de una **válvula** con coeficiente máximo de 25 deben pasar 25 gpm de agua, cuando se abre completamente y la caída de presión es de 1 psi.

A pesar de que todos los fabricantes utilizan el método C_V para’ dimensionamiento de válvulas, las ecuaciones para calcular C_V presentan algunas diferencias de un fabricante a otro. La mejor manera de proceder es elegir el fabricante y utilizar las ecuaciones que recomienda; en esta sección se presentan las ecuaciones de dos fabricantes, **Masoneilan**[(2)] y Fisher **Controls**[(3)], para mostrar las diferencias entre sus ecuaciones y métodos. Las mayores diferencias **se** presentan en las ecuaciones para dimensionar las **válvulas** utilizadas con fluidos que se comprimen (gas, vapor o vapor de agua). Los dos fabricantes mencionados no son, de ninguna manera, los únicos, en la tabla **5-1** se dan los nombres y direcciones de algunos otros, ésta no es exhaustiva, pero proporciona al lector los

Tabla 5-1. Fabricantes de válvulas de control.

Jamesbury Corporation	640 Lincoln Street Worcester, MA 01605
Jenkins Brothers .	101 Merritt Seven Norwalk, CO 06851
Jordan Valve	407 Blade Street Cincinnati, OH 45216
Crane Company	300 Park Avenue New York, NY 10022
DeZurik	250 Riverside Avenue, North Sartell, MN 50377
Fisher Controls Company	P.O. Box 190 Marshalltown, IA 50158
Masoneilan International	63 Nahatan Street Norwood, MA 02062
Honeywell	II OO Virginia Drive Fort Washington, PA 18034
Copes-Vulcan, Inc.	Martin and Rice Avenues Lake City, PA 14623
Valtek	P.O. Box 2200 Sprinville, UT 84663
The Duriron Company, Inc.	1978 Foreman Drive Cookeville, TN 38501
Cashco, Inc.	P.O. Box A Ellsworth, KS 67439
The Foxboro Company	Foxboro, MA 02035

nombres de cierta cantidad de compañías que se dedican a la fabricación de válvulas de control. Se eligió a Masoneilan y Fisher Controls porque sus ecuaciones y métodos son típicos en la industria.

Utilización con *líquidos.* La ecuación básica para dimensionar una válvula de control que se utiliza con líquidos es la misma para todos los fabricantes::

$$q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}} \tag{5-1}$$

o se despeja C_V

$$C_V = q\sqrt{\frac{G_f}{\Delta P}} \tag{5-2}$$

donde:

q = flujo de líquido en gpm U.S.
AP = caída de presión $P_1 - P_2$, en psi en la sección de la válvula
P_1 = presión de entrada a la **válvula** (corriente arriba), en psi
P_2 = presión de salida de la **válvula** (corriente abajo), en psi
G_f = gravedad específica del líquido a la temperatura en que fluye, para agua = 1 a 60°F.

Algunas veces las unidades de flujo se dan en **lbm/hr**, en estos casos las ecuaciones (5-1) y (5-2) se pueden escribir como sigue:

$$W = 500C_V\sqrt{G_f \Delta P} \tag{5-3}$$

Y

$$\frac{\quad}{00\sqrt{G_f \Delta P}} \tag{5-4}$$

donde W = flujó del líquido en **1bm/hr**. La ecuación (5-3) se desarrolla directamente a partir de la ecuación (5-1).

Existen otras consideraciones, **tales como** correcciones de viscosidad, de vaporización instantánea y de **cavitación,** en la elección de **las válvulas** de control que se utilizan con líquidos; **tales** consideraciones se presentan en el apéndice C.

Utilización con gas, **vapor** y **vapor de agua.** Las diferencias más importantes entre fabricantes se encuentran en las ecuaciones de dimensionamiento para fluidos compresibles, y surgen a rafz del modo en que **se expresa** o considera el fenómeno **de *flujo crítico*** en las ecuaciones. El flujo crítico es la condición que se presenta cuando el flujo no es función de la raíz cuadrada de la **caída** de presión en la sección de la **válvula,** sino únicamente de la presión de entrada a la **válvula.** Este fenómeno ocurre después de que el fluido alcanza la velocidad del sonido en la vena contracta; cuando el fluido se encuentra en la condición del flujo crítico, los decrementos o incrementos en la presión de salida de la válvula no afectan al flujo, sino únicamente a los cambios en la presión de entrada.

Ahora se verán los métodos que utilizan los dos fabricantes que se mencionaron, para definir la **condición** de flujo crítico y **dimensionar** las válvulas de control que se usan con fluidos **compresibles.**

Masoneilan[2] propone el siguiente sistema de ecuaciones:

Flujo volumétrico de gas

$$C_V = \frac{Q\sqrt{GT}}{836C_fP_1(y - 0.148y^3)} \tag{5-5}$$

Flujo de gas por peso

$$C_V = \frac{W}{2.8C_f P_1 \sqrt{G_f}\,(y - 0.148y^3)} \qquad (5\text{-}6)$$

Vapor (de agua)

$$C_V = \frac{W(1 + 0.0007T_{SH})}{1.83C_f P_1(y - 0.148y^3)} \qquad (5\text{-}7)$$

donde:

Q = tasa de flujo de gas en scfh; las condiciones estándar son de 14.7 psia y 60°F.
G = gravedad específica del gas a 14.7 psia y 60°F (aire = 1.0); para los gases perfectos es la relación entre el peso molecular del gas y el peso molecular del aire (29).
G_f = gravedad específica del gas a la temperatura del flujo, $G_f = G\left(\frac{520}{T}\right)$
T = temperatura en °R
C_f = factor de flujo crítico, el valor numérico de este factor va de 0.6 a 0.95. En la figura C-44 se muestra este factor para diferentes tipos de válvulas.
P_1 = presión de entrada a la válvula en psia
P_2 = presión de salida de la válvula en psia
$\Delta P = P_1 - P_2$
W = tasa de flujo, en lb/hr
T_{SH} = grados de sobrecalentamiento, en °F

El término y se utiliza para expresar la condición crítica o subcrítica del flujo y se define como

$$y = \frac{1.63}{C_f}\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}} \qquad (5\text{-}8)$$

valor máximo de y = 1.5; con este valor $y - 0.148y^3 = 1.0$; por tanto, cuando y alcanza un valor de 1.5, se tiene la condición de flujo crítico. A partir de esta ecuación se ve fácilmente que, cuando el término $y - 0.148y^3 = 1.0$, el flujo esta en función únicamente de la presión de entrada, P_1.

Es importante tener en cuenta que, cuando el flujo es mucho menor que el crítico

$$y - 0.148y^3 \approx y$$

se cancela el factor C_f (no se necesita) y la ecuación (5-5) se deriva fácilmente de la ecuación (5-2). Lo interesante es que todas estas fórmulas de dimensionamiento se derivan

de la definición original de C_V, ecuación (5-2), y la única particularidad de las fórmulas para gas es el factor de corrección C_f y la función de compresibilidad $(y - 0.148y^3)$ que se requieren para describir el fenómeno de flujo crítico, De manera semejante, la ecuación (5-6) se deriva fácilmente de la ecuación (5-5).

Fisher **Controls** define dos nuevos coeficientes para el dimensionamiento de las **vál**vulas que se **utilizan** con fluidos compresibles: el coeficiente C_g, que se relaciona con la capacidad de flujo de la válvula; y el coeficiente C_1, que se define como C_g/C_V, el cual proporciona una indicación de las capacidades de recuperación de la **válvula.** El último coeficiente, C_1, depende en mucho del tipo de válvula y sus valores generalmente están entre 33 y 38. La ecuación de Fisher para diiensionar válvulas para fluidos compresibles se conoce como Ecuación Universal para dimensionamiento de gases,, y se expresa de dos formas:

$$C_g = \frac{Q_{scfh}}{\sqrt{\frac{520}{GT}}\, P_1 \operatorname{sen}\left[\left(\frac{59.64}{C_1}\right)\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}}\right]_{rad}} \quad (5\text{-}9)$$

o

$$C_g = \frac{Q_{scfh}}{\sqrt{\frac{520}{GT}}\, P_1 \operatorname{sen}\left[\left(\frac{3417}{C_1}\right)\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}}\right]_{grad}} \quad (5\text{-}10)$$

La condición de flujo crítico se indica mediante el término seno, cuyo argumento se debe limitar a $\pi/2$ en la ecuación (5-9) o $90°$ en la ecuación (J-LO); con estos dos valores **límite** se indica el flujo crítico. En la figura **C-39***c* y en la C-39d se muestran los valores para C_g Y C_1.

A partir de la ecuación (5-2) se pueden obtener las ecuaciones **(5-9)** y **(5-10)** para la condición de flujo subcrítico. La siguiente aproximación es verdadera **sólo** bastante abajo del flujo **crítico:**

$$\operatorname{sen}\left[\frac{59.64}{C_1}\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}}\right]_{rad} \approx \frac{59.64}{C_1}\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}}$$

El término seno se utiliza para'describir el fenómeno de flujo crítico.

Es interesante notar la semejanza entre los dos fabricantes, ambos utilizan dos coeficientes para dimensionar **válvulas** de control para fluidos compresibles; uno de los coeficientes se relaciona con la capacidad de flujo de la válvula, C_V para Masoneilan y C_g para Fisher Controls; el otro coeficiente, C_f **para** Masoneilan y C_1 para Fisher Controls, depende del tipo de **válvula. Masoneilan** utiliza el **término** $(y - 0.148y^3)$ para indicar el flujo crítico; mientras que Fisher utiliza el termino seno; ambos términos son empíricos y el hecho de que sean diferentes no es significante.

Antes de concluir esta sección sobre dimensionamiento de válvulas de control es necesario mencionar algunos otros puntos importantes. El dimensionamiento de la válvula mediante el cálculo de C_V se debe hacer de manera tal que, cuando la válvula se abra completamente, el flujo que pase sea más del que se requiere en condiciones normales de operación; es decir, debe haber algo de sobrediseño en la válvula para el caso en que se requiera más flujo. Los individuos o las compañías tienen diferentes formas de proceder acerca del sobrediseño en capacidad de la válvula; en cualquier caso, si se decide sobrediseñar la válvula en un factor de 2 veces el flujo que se requiere, el flujo de sobrediseño se expresa mediante

$$q_{\text{diseño}} = 2.0 q_{\text{requerido}}$$

Si una válvula se abre alrededor del 3% cuando controla una variable bajo condiciones normales de operación, esa válvula en particular esta sobrediseñada; y, de manera similar, si la válvula se abre cerca de un 97 %, entonces está subdimensionada. En cualquiera de los dos casos, si la válvula se abre o se cierra casi completamente, es difícil obtener menos o más flujo en caso de que se requiera.

El *ajuste de* rango es un término que esta en relación con la capacidad de la válvula. El ajuste de rango, *R,* de una válvula se define como la relación del flujo máximo que se puede controlar contra el flujo mínimo que se puede controlar:

$$R = \frac{q_{\text{máximo que se puede controlar}}}{q_{\text{mínimo que se puede controlar}}} \tag{5-11}$$

La definición de flujo máximo o mínimo que se puede controlar es muy subjetiva, algunas personas prefieren definir el flujo que se puede controlar entre el 10% y 90% de abertura de la válvula; mientras que otras lo definen entre el 5 y 95%; no existe regla fija o estándar para esta definición. En la mayoría de las válvulas de control el ajuste de rango es limitado y, generalmente, varía entre 20 y 50. Es deseable tener un ajuste de rango grande (del orden de 10 o mayor), de manera que la válvula tenga un efecto significativo sobre el flujo.

En los dos últimos párrafos se presentaron los temas de sobrediseño y ajuste de rango de las válvulas de control; ambas características tienen efectos definitivos sobre el desempeño de la válvula de control en servicio, lo cual se abordará cuando se presenten las "características de la válvula instalada".

Selección de la caída de presión de diseño

Es importante reconocer que la válvula de control únicamente puede manejar las tasas de flujo mediante la producción o absorción de una caída de presión en el sistema, la cual es una perdida en la economía de operación del sistema, ya que la presión la debe suministrar generalmente una bomba o un compresor y, en consecuencia, la economía impone el dimensionamiento de válvulas de control con poca caída de presión. Sin embargo; la poca caída de presión da como resultado mayores dimensiones de las válvulas de control y, por lo tanto, mayor costo inicial, así como un decremento en el rango de control. Estas

consideraciones opuestas requieren un compromiso por parte. del ingeniero, por lo que toca a la elección de la caída de presión en el diseño; existen varias reglas prácticas que se usan comúnmente como auxiliares en esta decisión. En general tales reglas especifican que la caída de presión que se lee en la sección transversal de la válvula debe ser de 20 a 50% de la caída dinámica de presión total en todo el sistema de conductos. Otra regla usual consiste en especificar la caída de presión de diseño en la válvula al 25 % de la caída dinámica total de presión en todo el sistema de conductores, o a 10 psi, la que sea mayor; pero el valor real depende de la situación y del criterio establecido en la compañía. Como se supone, la caída de presión de diseño también tiene efecto sobre el desempeño de la válvula, tal como se verá en la siguiente sección.

Ejemplo 5-1. Se debe dimensionar una válvula de control que será utilizada con gas; el glujo nominal es de 25,000 lbm/hr; la presión de entrada de 250 psia; y la caída de presión de diseño de 100 psi. La gravedad específica de1 gas es de 0.4 con una temperatura de flujo de 150°F y peso molecular de 12. Se debe utilizar una válvula de acoplamiento.

Para utilizar la ecuación (5-6) de Masoneilan, se debe obtener el factor C_f. De la figura C-44 se tiene que, para la válvula de acoplamiento, C_f = 0.92; entonces, al usar la ecuación (5-8), se tiene-

$$y = \frac{1.63}{C_f}\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}} = \frac{1.63}{0.92}\sqrt{\frac{100}{250}} = 1.12$$

El flujo de diseño es

$$W_{\text{diseño}} = 2W_{\text{nominal}} = 50{,}000\ \frac{\text{lbm}}{\text{hr}}$$

Y

$$C_V = \frac{W}{2.8C_fP_1\sqrt{G_f}(y - 0.148y^3)}$$

$$= \frac{50000}{2.8(0.92)(250)\sqrt{0.4}(1.12 \quad 0.148(1.12)^3)}$$

$$C_V = 134.6$$

Si se utiliza la ecuación de Fisher Controls para válvulas, se debe determinar el coeficiente C_1 y calcular el índice de flujo en scfh; de la figura C-39d se tiene que, para la válvula de acoplamiento C_1 = 35, el flujo volumétrico estándar es

$$Q_{\text{scfh}} = \underbrace{\left(\frac{50000}{12}\right)}_{\frac{\text{lb mol}}{\text{hr}}}\underbrace{(379.4)}_{\frac{\text{scf}}{\text{lb mol}}} = 1580833. \quad @\ \begin{matrix}14.7\ \text{psia}\\ 60°\text{F}\end{matrix}$$

De la ecuación (5-10) se tiene entonces

$$C_g = \frac{Q_{scfh}}{\sqrt{\frac{520}{GT}}P_1 \text{seno}\left[\left(\frac{3417}{C_1}\right)\sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}}\right]_{\text{grad}}}$$

$$= \frac{1580833}{\sqrt{\frac{520}{0.4(610)}}(250)\,\text{seno}\left[\left(\frac{3417}{35}\right)\sqrt{\frac{100}{250}}\right]_{\text{grad}}}$$

$$C_g = 4917.5$$

El coeficiente C_g se puede convertir al equivalente C_V, para compararlo con el coeficiente C_V de Masoneilan; con base en la definición de C_1, se obtiene.

$$C_1 = \frac{C_g}{C_V}$$

entonces

$$C_V = \frac{C_g}{C_1} = \frac{4917.5}{35} = 140.5$$

Por lo tanto, es notorio que con ambos métodos se llega a resultados similares: para Masoneilan $C_V = 134.6$ y para Fisher Controls $C_V = 140.5$.

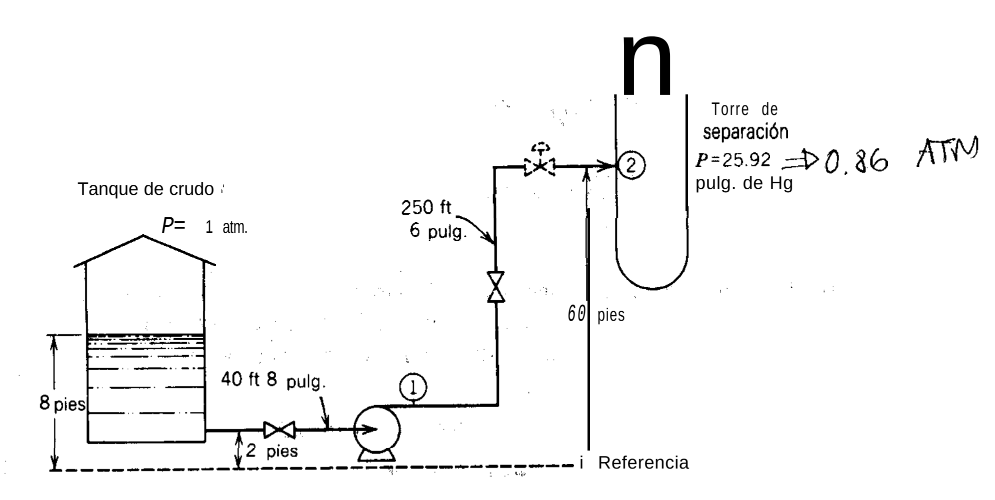


Figura 5-2. Sistema de tubería

Ejemplo 5-2. Considérese el proceso que se muestra en la figura 5-2, en el cual se transfiere un fluido de un tanque de crudo a una torre de-separación. El tanque esta a la presión atmosférica; y la torre trabaja con un vacío de 4 pulg. Hg; las condiciones de operación son las siguientes:

Flujo	900 gpm
Temperatura	90°F
Gravedad específica	0.94
Presión de vapor	13.85 psia
Viscosidad	0.29 cp

El tubo es de acero comercial y la eficiencia de la bomba es de 75 % .

Se desea dimensionar la válvula que aparece con línea punteada, entre la bomba y la torre de separación.

Para dimensionar la válvula primero se debe determinar la caída de presión entre el punto 1, a la salida de la bomba, y el punto 2, a la entrada de la torre; dicha caída dinámica de presión se debe a las perdidas por fricción en el sistema de tubería, Como se ve en el diagrama, el sistema de tubería consta de 250 pies de tubo de 6 pulgadas, dos codos de 90°, una válvula de bloqueo y una expansión repentina al entrar en la torre. La caída dinámica de presión en este sistema de tubería, ΔP_p, se calcula mediante los principios de flujo de fluidos y se encuentra que es de 6 psi. Cuando ya se conoce la caída dinámica de presión, se puede. elegir la caída de presión en la válvula, ΔP_v.

Si, por ejemplo, la norma de una compañía es tener una caída de presión en la válvula igual al 25% de la caída dinámica de presión total, entonces

$$\frac{\Delta P_v}{\Delta P_p + \Delta P_v} = 0.25 \quad \text{y} \quad \Delta P_v = 2 \text{ psi}$$

Al dimensionar la válvula para dos veces el flujo nominal, se tiene

$$C_V = \frac{1800}{\sqrt{\frac{2}{0.94}}} = 1234$$

Si, por otro lado, por la norma de la compañía, se requiere una caída de presión de diseño del 25 % de la caída dinámica de presión total o 10 psi, lo que sea mayor, entonces:

$$\Delta P_v = 10 \text{ psi}$$

Al dimensionar la válvula para dos veces el flujo nominal se tiene

$$C_V = \frac{1800}{\sqrt{\frac{10}{0.94}}} = 552$$

Características.de flujo de la válvula de control

Para ayudar a lograr un buen control, el circuito de control debe tener una "personalidad constante' ', esto significa que en el proceso completo, el cual se define como la combinación de sensor/transmisor/unidad de proceso/válvula; la ganancia; las constantes de tiempo; y el tiempo muerto deben ser tan constantes como sea posible. Otra manera de referirse a que el proceso completo tiene una "personalidad constante" es decir que se trata de un sistema *lineal.*

Como ya se vio en loscapítulos 3 y 4, la mayoría de los procesos son de naturaleza no lineal, lo que hace que el sensor/transmisor/unidad de proceso tampoco sea lineal. Puesto que el "proceso completo" incluye la válvula, mediante la elección de la correcta "personalidad de la válvula de control" se puede lograr que se reduzcan las características no lineales de la combinación sensor/transmisor/unidad de proceso; si esto se hace de manera correcta, se puede conseguir que la combinación sensor/transmisor/unidad de proceso/válvula tenga una ganancia constante. La personalidad de la válvula de control se conoce comúnmente como la "característica de flujo de la válvula de control" y. por tanto, se puede decir que el propósito de la caracterización del flujo es obtener en el proceso completo una ganancia relativamente constante para la mayoría de las-condiciones de operación del proceso.

La característica de flujo de la válvula de control se define como la relación entre el flujo a través de la válvula y la posición de la misma conforme varía la posición de 0% a 100%. Se debe distinguir entre la "característica de flujo inherente" y la ''caracte-

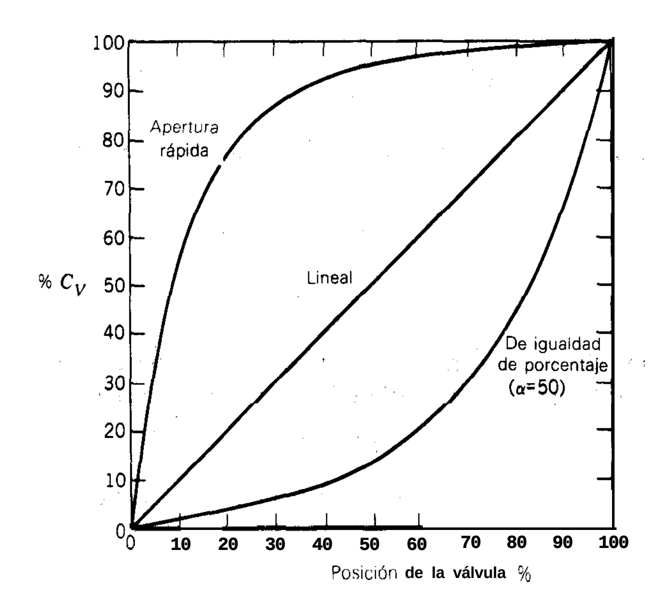


Figura 5-3. Curvas de las características de flujo inherente.

rística de flujo en instalación". La primera se refiere a la característica que se observa cuando existe una caída de presión constante a través de la válvula. La segunda se refiere a la característica que se observa cuando-la válvula esta en servicio y hay variaciones en la caída de presión, así como otros cambios en el sistema. Primero se abordará la característica de flujo inherente.

En la figura 5-3 se muestran tres de las curvas más comunes de característica de flujo inherente. La forma de la curva se logra mediante el contorno de la superficie del émbolo cuando pasa cerca del asiento de la válvula. En la figura 5-4 se muestra el émbolo típico para la válvula lineal y la de porcentaje igual.

La ***característica de flujo lineal*** produce un flujo directamente proporcional al desplazamiento de la válvula, o posición de la válvula; con un 50% de desplazamiento, el flujo es el 50% del flujo máximo.

La ***característica de flujo de porcentaje igual*** produce un cambio muy pequeño en el flujo al inicio del desplazamiento de la válvula, pero conforme éste se abre hasta la posición de abertura máxima, el flujo aumenta considerablemente. El término "porcentaje igual" proviene del hecho de que, para incrementos iguales en el desplazamiento de la válvula, el cambio de flujo respecto al desplazamiento de la válvula es un porcentaje constante de la tasa de flujo en el momento del cambio; es decir, cuando la posición de la válvula se incrementa en 1% , al pasar la posición de la válvula del 20 al 2 1% , el flujo se debe incrementar en 1% respecto al valor que tenía en la posición del 20% ; si la posición de la válvula se incrementa en 1% , ál pasar del 60 al 6 1% , el flujo se incrementa en 1% respecto al valor en la posición del 60%.

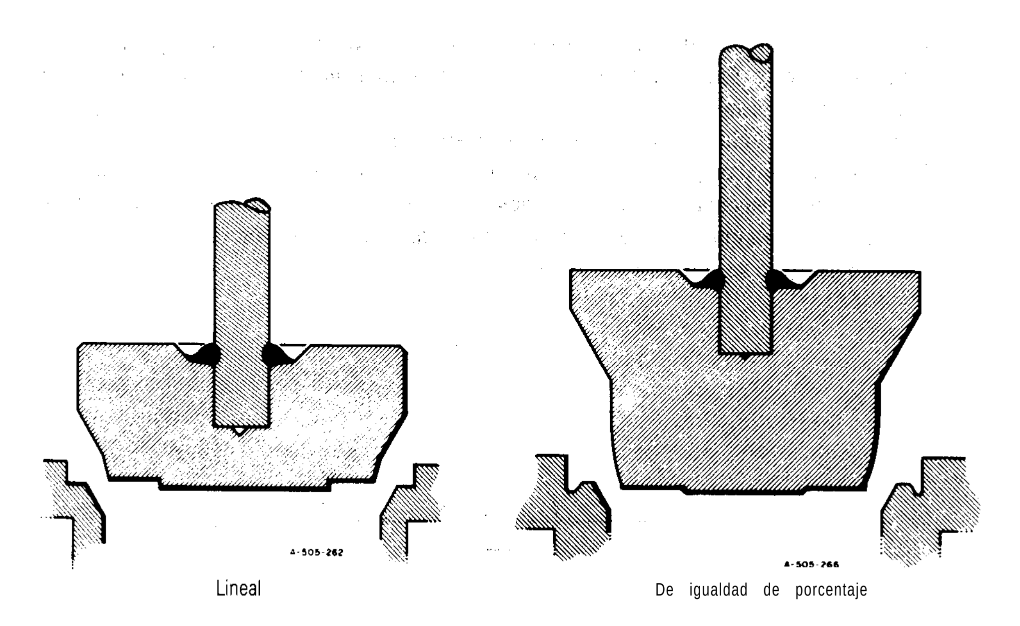


Figura 5-4. Émbolos para cada tipo de características de válvula

La ***característica de flujo rápido de abertura*** produce un gran flujo con un pequeño desplazamiento de la **válvula.** Básicamente, la curva es lineal en la primera parte del desplazamiento, con una pendiente pronunciada. Es conveniente mencionar que la válvula de abertura rápida no es buena para la regulación, ya que no afecta el flujo en la mayor parte de su desplazamiento.

La "conciliación" de la característica correcta de la válvula para cualquier proceso requiere un análisis detallado de la dinámica en el proceso completo; sin embargo, para tomar la decisión se pueden usar como ayuda varias. reglas prácticas que tienen su fundamento en la experiencia[1] Brevemente, se puede. decir que las **válvulas** con característica de flujo lineal se usan comúnmente en circuitos de nivel de líquido, y en otros procesos en los que la caída de presión a través de la válvula es bastante constante. Las válvulas con característica de flujo de abertura rápida se usan principalmente en servicios de abierto-cerrado, en los que se requiere un gran flujo tan **pronto** como la válvula se comienza a abrir. Finalmente, las válvulas con característica de flujo de **porcentaje igual** sonprobablemente las más comunes; generalmente se usan en servicios donde se esperan grandes variaciones en la caída de presión; o en aquellos en los que, a través de la válvula, se toma un pequeño porcentaje de la caída total de presión en el sistema.

En la figura 5-3 se observan cosas importantes acerca **del ajuste de rango** de estos tres tipos de válvulas; nótese que con la válvula de tipo de abertura **rápida** se tiene la mayor parte del flujo al abrirla, casi un **40%,** y a partir de ahí no hay mucho control sobre el flujo, lo cual da por resultado un bajo ajuste de rango (menos de 5 a 1). Al mismo tiempo en la figura 5-3 se ve que con las válvulas del tipo lineal y de porcentaje igual se tiene control del flujo sobre la mayor parte del rango de operación, de lo que resulta un ajuste de rango mayor de 20 a 1. Sin embargo, el lector debe recordar que estos comentarios se refieren únicamente a los "ajustes de rango inherentes", ya que se basan en las características inherentes.

Cuando una válvula esta instalada en un sistema de tubería, la caída de presión a través de ella se modifica conforme varía el flujo; en este caso también varían las características de la válvula, las cuales, como se mencionó antes, se conocen como "características en instalación ' . Para entender mejor las características en instalación considérese el sistema de tubería que se muestra en la figura 5-5.

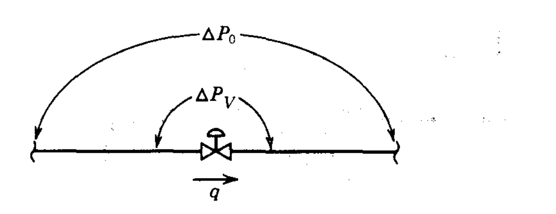


Figura 5-5. Sistema de tubería con **válvula** de **control.**

Sea:

ΔP_0 = caída dinámica de presión total (se incluye válvula, línea, conexiones, etc.) en el sistema de tubería, psi
$\bar{q}$ = tasa de flujo de diseño, gpm
ΔP_V = caída de presión a través de la **válvula** que depende del flujo, psi
f = fracción de caída dinámica de presión que toma la válvula de control
$\bar{f}$ = fracción de caída dinámica de presión que toma la válvula con el flujo nominal
$C_V|_{vp=1}$ = coeficiente de la válvula cuando está completamente abierta
F = factor con que se sobredimensiona la válvula
ΔP_p = caída de presión dinámica en el sistema de tubería (se excluye la válvula), psi

Por lo tanto, el flujo de diseño a través de la válvula se expresa por

$$\bar{q} = \frac{C_V|_{vp=1}}{F}\sqrt{\frac{\bar{f}\,\Delta P_o}{G_f}} \tag{5-12}$$

La caída de presión a **través** de la válvula la da

$$\Delta P_v = AP,, - \Delta P_p \tag{5-13}$$

Se supone que el balance de la caída dinámica de presión que toma el sistema de tubería es consecuente con la relación de la mecánica de fluidos

$$\Delta P_p = (1 - f)\ AP,, = K_L G_f q^2 \tag{5-14}$$

donde K_L es una constante que tiene el siguiente valor:

$$K_L = \frac{(1-\bar{f})\,\Delta P_o}{G_f \bar{q}^2}$$

$$= \frac{(1-\bar{f})\,\Delta P_o}{G_f}\ \frac{F^2 G_f}{(C_v|_{vp=1})^2 \bar{f}\,\Delta P_o} \tag{5-15}$$

$$K_L = \frac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}(C_V|_{vp=1})^2}$$

La caída dinámica de presión para cualquier flujo se expresa mediante

$$AP,, = \Delta P_V + K_L G_f q^2 \tag{5-16}$$

donde:

$$q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P_V}{G_f}}$$

C_V = coeficiente de la válvula en cualquier posición diferente a $vp = 1$

Entonces

$$\Delta P_o = G_f \left(\frac{q}{C_V}\right)^2 + K_L G_f q^2 = G_f(1 + K_L C_V^2)\left(\frac{q}{C_V}\right)^2$$

de lo cual se obtiene

$$q = \frac{C_V}{\sqrt{1 + K_L C_V^2}} \sqrt{\frac{\Delta P_o}{G_f}} \tag{5-17}$$

Cuando la válvula se abre completamente, la tasa de flujo es

$$q_o = \frac{C_V|_{vp=1}}{\sqrt{1 + K_L (C_V|_{vp=1})^2}} \sqrt{\frac{\Delta P_o}{G_f}} \tag{5-18}$$

Después de dividir la ecuación (5-17) entre la (5-18) y substituir la ecuación **(5-15)** en el resultado, se tiene

$$\frac{q}{q_0} = \frac{C_V}{C_V|_{vp=1}} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}}{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}} \left[\dfrac{C_V}{C_V|_{vp=1}}\right]^2}} \tag{5-19}$$

Esta ecuación es valiosa porque da el flujo a través de la **válvula** cuando se instala en el sistema de tubería. Se debe recordar que para derivar la ecuación se mantuvo constante la caída total de presión, ΔP_o, sin embargo; se permite que la caída de presión en la válvula, ΔP_V, varíe. En la válvula lineal se puede relacionar el coeficiente C_V con la posición de la válvula, como se verá en la ecuación **(5-22),** mediante la siguiente relación:

$$C_V = C_V|_{vp=1} (vp)$$

Entonces, al substituir esta relación en la ecuación **(5-19),** se tiene

$$\frac{q}{q_o} = \frac{(C_V|_{vp=1})\,vp}{C_V|_{vp=1}} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}}{1 + \left[\dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}\right]\left[\dfrac{(C_V|_{vp=1})\,vp}{C_V|_{vp=1}}\right]^2}}$$

o

$$\frac{q}{q_o} = vp \sqrt{\frac{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}}{1 + \left[\dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}\right] vp^2}} \qquad (5\text{-}20)$$

Para la válvula de porcentaje igual, la relación entre C_V y la posición de la válvula se expresa por

$$C_V = (C_V|_{vp=1})\,\alpha^{vp-1}$$

Al substituir esta relación en la ecuación (5-19) se tiene

$$\frac{q}{q_o} = \frac{(C_V|_{vp=1})\,\alpha^{vp-1}}{C_V|_{vp=1}} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}}{1 + \left[\dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}\right]\left[\dfrac{(C_V|_{vp=1})}{C_V|_{vp=1}}\alpha^{vp-1}\right]^2}}$$

o

$$\frac{q}{q_o} = \alpha^{vp-1} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}}{1 + \left[\dfrac{F^2(1-\bar{f})}{\bar{f}}\right](\alpha^{vp-1})^2}} \qquad (5\text{-}21)$$

Con las ecuaciones (5-20) y (5-21) se pueden determinar las características de instalación; se supone que se dimensionan las válvulas para tomar un 25 % de la caída dinámica de presión total ($\bar{f}$ = 0.23, y que la válvula se sobredimensiona con un factor 2 (F = 2); en la figura 5-6 se muestran las características de instalación con las condiciones de diseño bajo esas condiciones.

En la figura se ve que, para el caso que se estudia ($\bar{f}$ = 0.25, F = 2 y α = 50), con la válvula de porcentaje igual se obtienen las características de instalación **más** lineales .

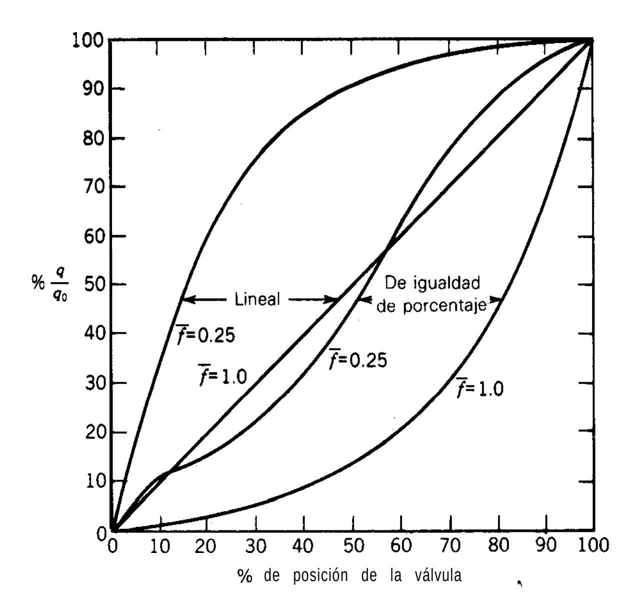


Figura 5-6. Características de válvula instalada.

Con la válvula lineal se tienen características de instalación de abertura rápida, con el consecuente ajuste de rango bajo.

Las características de instalación de cualquier válvula dependen de las características inherentes de la válvula, la fracción de caída dinámica de presión total a través de la válvula, $\bar{f}$, y el factor con el que se sobredimensiona la válvula, ***F.***

Ganancia de la válvula de control

En la figura ***5-3*** se muestran las características de flujo inherentes de los tres tipos más comunes de válvulas. Se define como característica inherente al flujo característico que pasa a través de la válvula cuando se mantiene constante la caída de presión en la misma. Si se observa la ecuación (5-1), para el flujo del líquido a través de una **válvula**

$$q = C_V \sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}}$$

es notorio que, para que q cambie con la posición de la válvula y la caída de presión y la gravedad específica se mantengan constantes, C_V también debe cambiar con la posición de la válvula; por lo tanto, se dice que el coeficiente C_V es una función de la posición de la válvula. La relación funcional entre C_V y la posición de la válvula, vp, para la válvula lineal y la de porcentaje igual, es la siguiente:

Válvula lineal

$$C_V = (C_V|_{vp=1})\,vp \tag{5-22}$$

Válvula de porcentaje igual

$$C_V = (C_V|_{vp=1})\,\alpha^{vp-1} \tag{5-23}$$

donde α = parámetro de ajuste de la válvula.

A partir de estas relaciones se puede calcular el cambio en la tasa de flujo a través de la válvula, mientras se mantiene constante la caída de presión; es decir, ésta es la ganancia, la cual relaciona el flujo con la posición de la válvula. Considérese la ecuación de flujo para una válvula de porcentaje igual que se usa con líquidos:

$$9 = (C_V|_{vp=1})\,\alpha^{vp-1}\sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}}$$

La ganancia de la válvula es

$$K_V = \left.\frac{\partial q}{\partial vp}\right|_{\Delta P} = (C_V|_{vp=1})\ \ln\ (\alpha)\sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}}\,\alpha^{vp-1} \tag{5-24}$$

La ecuación de flujo para una válvula lineal que se usa con líquidos es

$$9 = (C_V|_{vp=1})\ vp\sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}}$$

y la ganancia de la válvula es

$$K_v = \left.\frac{\partial q}{\partial vp}\right|_{A P} = (C_V|_{vp=1})\sqrt{\frac{\Delta P}{G_f}} \tag{5-25}$$

Como se ve en las ecuaciones (5-24) y (5-25), la ganancia inherente (con caída de presión constante) varia con la posición de la válvula, para el caso de la válvula de porcentaje igual; mientras que, para la válvula lineal es constante; esto también se puede notar fácilmente por observación de las características de flujo inherentes que se muestran en la figura 5-3; la ganancia es la pendiente de la curva de características del flujo. Para la válvula lineal la pendiente de la curva es constante; mientras que, para la de porcentaje igual varía.

Es importante tener en cuenta que la ganancia de instalación es diferente de la ganancia inherente; en realidad, como se ve en la figura 5-6, la ganancia de instalación de la válvula de porcentaje igual es más constante que la de la válvula lineal.

A partir de la ecuación (5-17) se puede obtener la expresión para la ganancia de instalación:

$$\begin{aligned} K_v &= \frac{\overline{dq}}{dvp} \\ &= \sqrt{\frac{\Delta P_o}{G_f}}\left[\frac{\sqrt{1+K_L\overline{C}_V^2}-\overline{C}_V(1+K_L\overline{C}_V^2)^{-1/2}K_L\overline{C}_V}{(1+K_L\overline{C}_V^2)}\right]\frac{\overline{dC_V}}{dvp} \\ &= \frac{\overline{q}}{\overline{C}_V}\left(1-\frac{K_L\overline{C}_V^2}{1+K_L\overline{C}_V^2}\right)\frac{\overline{dC_V}}{dvp} \\ &= \frac{\overline{q}}{\overline{C}_V(1+K_L\overline{C}_V^2)}\frac{\overline{dC_V}}{dvp} \end{aligned} \tag{5-26}$$

El término $\overline{dC_V}/dvp$ depende del tipo de válvula; la barra sobre el término indica que se conocen las condiciones de evaluación. Cuando $K_L = 0$, lo cual indica que la caída de presión a través de la válvula es constante, como en el caso de la ecuación (5-16), la ecuación (5-26) da por resultado la ecuación (5-24) o (5-25), según sea el tipo de válvula (la demostración queda por cuenta del lector).

Es importante tener en cuenta que, al dimensionar las válvulas de control, como se vio anteriormente, el C_V que se calcula es el máximo 0 $C_V|_{vp=1}$.

Resumen de la válvula de control

En esta sección se hizo la introducción a algunos de los aspectos más importantes acerca de las válvulas de control; sin embargo, existen muchos otros aspectos que se deben tomar en cuenta al especificar una válvula de control, los cuales no se presentaron por falta de tiempo y espacio; algunos de esos aspectos son el dimensionamiento de los actuadores de las válvulas, la estimación de nivel de ruido, el dimensionamiento de válvulas para flujo de dos fases y los casos en que la compresibilidad de un gas es importante, así como el efecto de los reductores de la tubería. Se espera que con la introducción presentada en esta sección y lo que se muestra en el apéndice C, el lector se sienta motivado a leer la selecta bibliografía que aparece en esta sección para entender cómo se deben tomar en cuenta tales aspectos.

5-3. CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

En esta sección se presentan los tipos más importantes de controladores industriales y se hace especial énfasis en el significado físico de sus parámetros, como apoyo para la comprensión de su funcionamiento. Lo que se presenta aquí es válido tanto para los controla-

dores neumáticos, electrónicos como para la mayoría de los que se basan en microprocesadores.

En síntesis, el controlador es el "cerebro" del circuito de control. Como se mencionó en el capítulo 1, el controlador es el dispositivo que toma la decisión (D) en el sistema de control y, para hacerlo, el controlador:

1. Compara la señal del proceso que llega del transmisor, la variable que se controla, contra el punto de control y
2. Envía la señal apropiada a la válvula de control, o cualquier otro elemento final de control, para mantener la variable que se controla en el punto de control.

En la figura 5-7 se muestran diferentes tipos de controladores, nótense las diferentes perillas, selectores y botones con los que se hace el ajuste del punto de control, la lectura de la variable que se controla, el cambio entre el modo manual y automático y el ajuste y lectura de la señal de salida del controlador; en la mayoría de los controladores estos selectores se encuentran en el panel frontal, para facilitar la operación.

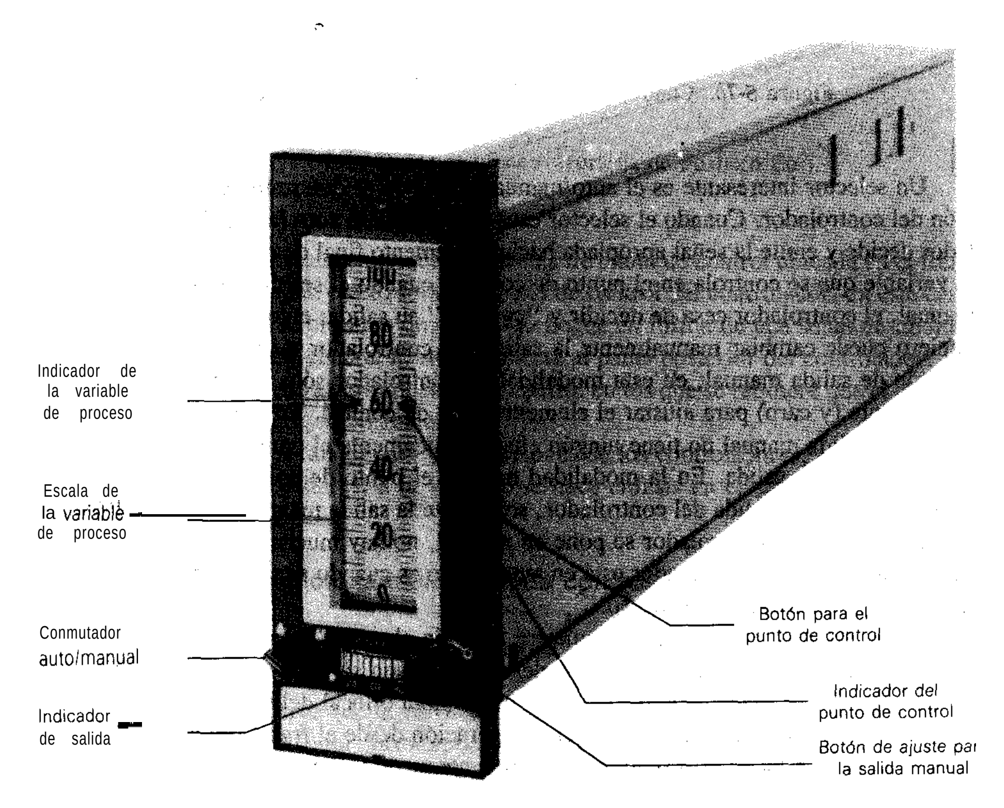


Figura 5-7*a*. Controlador de proceso **(cortesía** de Taylor **Instruments).**

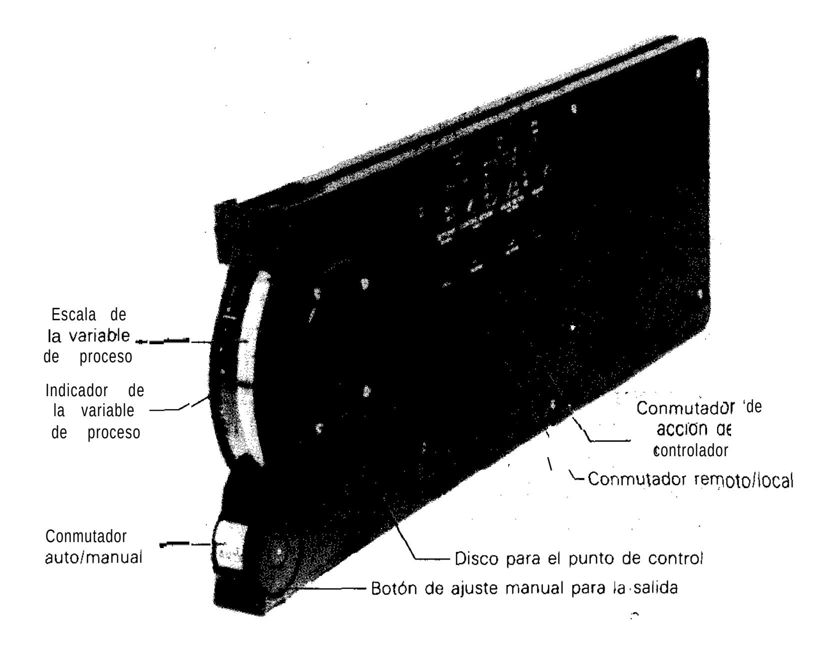


Figura **5-7*b*.** Controlador de proceso (cortesía de Fisher Controls).

Un selector interesante es el **auto/manual,** con **éste** se determina el modo de operación del controlador. Cuando el selector esta en la posición auto (automático), el controlador decide y emite la señal apropiada hacia el elemento final de control, para mantener la variable que se controla en el punto de control; cuando el selector esta en la posición manual, el controlador cesa de decidir y "congela" su salida, entonces el operador o ingeniero puede cambiar manualmente la salida del controlador mediante el disco, rueda o botón de salida manual; en esta modalidad el controlador **sólo** proporciona un medio conveniente (y caro) para ajustar el elemento final de control. En la modalidad de automático la salida manual no tiene ningún efecto,, únicamente el punto de control tiene influencia sobre la salida. En la modalidad manual el punto de control no tiene ninguna influencia sobre la salida del controlador, solamente la salida manual tiene influencia sobre la salida. Si un controlador se pone en manual, no hay mucha necesidad de tenerlo; solamente cuando el controlador esta en automático es cuando se obtienen los beneficios del control automático de proceso.

En las figuras **5-7*b*** y **5-7*d*** se muestra **también** el panel lateral del controlador; en la mayoría de los controladores los paneles laterales son similares. Una de las opciones en este panel es la elección entre la operación remota o local del punto de control; si el punto de control lo controla el personal de operación desde el frente del panel, entonces se elige la opción local; esto se logra generalmente mediante el accionamiento de una perilla o **un** interruptor. Si el punto de fijación lo controla otro dispositivo, controlador, relevador, computadora o algo semejante, entonces se elige la opción remota; cuando la

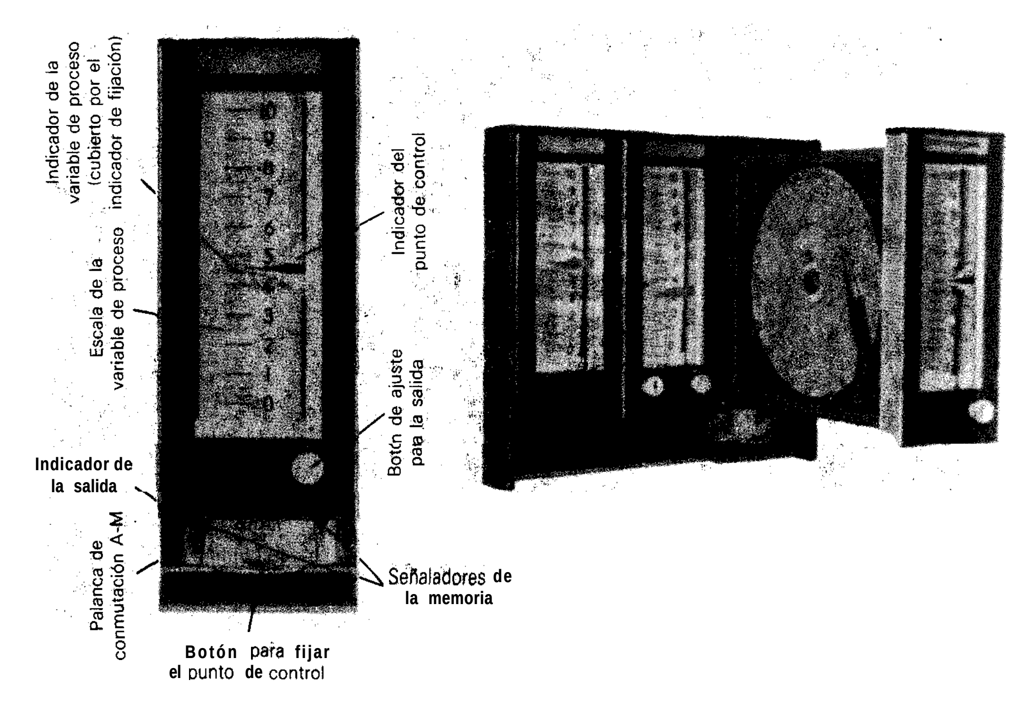


Figura 5-7c. Controlador de proceso (cortesfa de Foxboro Co.).

perilla o selector se posiciona en remoto, la perilla de punto de control ubicada en el frente del panel no tiene ningún efecto sobre el punto de control del controlador; en este caso el controlador espera que el punto de control le llegue en forma de una señal desde otro dispositivo, y dicha señal generalmente se conecta al panel posterior del controlador. En el capítulo 8 se presentan varios esquemas de control en los que se requiere que el controlador tenga el punto de fijación remoto.

A continuación se verán algunas otras opciones de los controladores, se incluyen diferentes tipos de controladores, a la vez que se hace énfasis en el significado físico de sus parámetros.

Funcionamiento de los controladores

Considérese el circuito de control del intercambiador de calor que se muestra en la figura 5-8; si la temperatura del fluido sobrepasa el punto de control, el controlador debe cerrar la válvula de vapor. Puesto que la válvula es de aire para abrir (AA), se debe reducir la señal de salida del controlador (presión de aire o corriente) (ver la flechas en la figura). Para tomar esta decisión el controlador debe estar en acción *inversa.* Algunos fabricantes designan tal acción como *decremento;* es decir, cuando hay un *incremento* en la señal que entra al controlador, entonces se presentaun *decremento* en la señal que sale del mismo.

Figura **5-7*d*.** Controlador de proceso (cortesfa de Fischer **&** Porter).

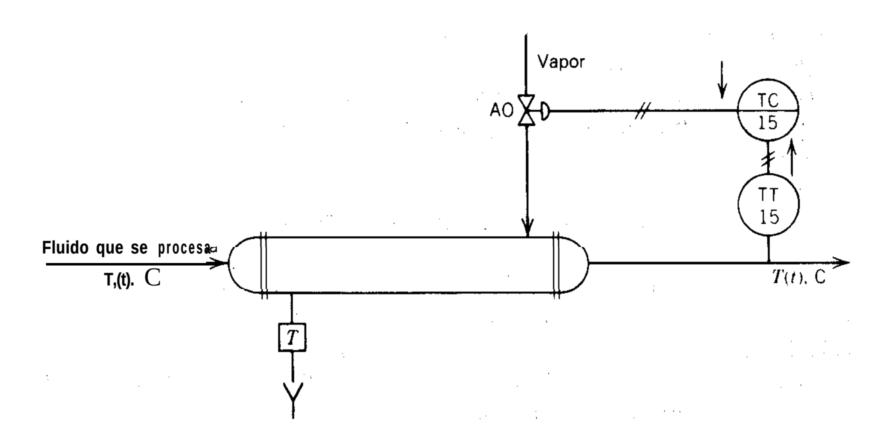


Figura **5-8.** Circuito de control para **intercambiador** de calor.

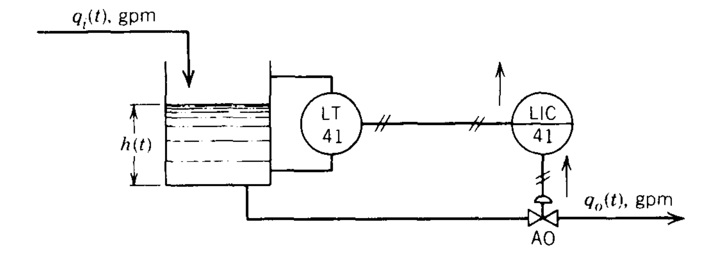


Figura 5-9. Circuito para control de nivel de líquido.

Considérese ahora el circuito de control de nivel que se muestra en la figura 5-9, si el nivel del líquido rebasa el punto de fijación, el controlador debe abrir la válvula para que el nivel regrese al punto de control. Puesto que la válvula es de aire para abrir (AA), el controlador debe incrementar su señal de salida (ver las flechas en la figura) y, para tomar esta decisión, el controlador se debe colocar en *acción directa.* Algunos fabricantes denominan a esta acción *incremento;* es decir, cuando hay un *incremento* en la señal que entra al controlador entonces existe un *incremento* en la señal de salida del mismo.

En resumen, para determinar la acción del controlador, el ingeniero debe conocer:

1. Los requerimientos de cotrol del proceso y
2. La acción de la válvula de control u otro elemento final de control.

Ambas cosas *se deben* tomar en cuenta. Tal vez el lector se pregunte cual es la acción correcta del controlador de nivel si se utiliza una válvula de aire para cerrar (AC), o si el nivel se controla con el flujo de entrada en lugar del flujo de salida. En el primer caso cambia la acción de la válvula de control; mientras que, *en* el segundo, cambian los requerimientos de control del proceso.

La acción del controlador se determina generalmente mediante un interruptor en el panel lateral de los controladores neumáticos o electrónicos, como se muestra en la figura 5-7*b*, mediante un bit de configuración en la mayoría de los controladores que tienen como base un microprocesador.

Tipos de controladores por retroalimentacibn

La manera en que los controladores por retroalimentación toman una decisión para mantener el punto de control, es mediante el calculo de la salida con base en la diferencia entre la variable que se controla y el punto de control. En esta sección se abordaran los tipos más comunes de controladores, por medio del estudio de las ecuaciones con que se describe su operación.

Controlador proporciona/ ***(P).*** El controlador proporcional es el tipo más simple de controlador, con excepción del controlador de dos estados, el cual no se estudia aquí; la ecuación con que se describe su funcionamiento es la siguiente:

$$m(t) = \bar{m} + K_c(r(t) - c(t)) \qquad (5\text{-}27)$$

o

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) \qquad (5\text{-}28)$$

donde:

$m(t)$ = salida del controlador, psig o mA
$r(t)$ = punto de control, psig o mA
$c(t)$ = variable que se controla, psig o mA; ésta es la señal que llega del transmisor.
$e(t)$ = señal de error, psi o mA; ésta es la diferencia entre el punto de control y la variable que se controla.
K_c = ganancia del controlador, $\frac{psi}{psi}$ o $\frac{mA}{mA}$
$\bar{m}$ = valor base, psig o mA. El significado de este valor es la salida del controlador cuando el error es cero; generalmente se tija durante la calibración del controlador, en el medio de la escala, 9 psig o 12 mA.

Puesto que los rangos de entrada y salida son los mismos (3-15 psig o 4-20 mA), algunas veces las señales de entrada y salida, así como el punto de control se expresan en porcentaje o fracción de rango.

Es interesante notar que la ecuación (5-27) es para un controlador de acción inversa; si la ***variable que se controla, c(t), se incrementa*** en un valor superior al punto de control, ***r(t),*** el error se vuelve negativo y, como se ve en la ecuación, la ***salida del controlador, m(t), decrece.*** La manera común con que se designa matemáticamente un controlador de acción directa es haciendo negativa la ganancia del controlador, K_c; sin embargo, se debe recordar que en los controladores industriales no hay ganancias negativas, sino únicamente positivas, lo cual se resuelve con el selector inverso/directo. La K_c negativa se utiliza cuando se hace el análisis matemático de un sistema de control en el que se requiere un controlador de acción directa.

En las ecuaciones (5-27) y (5-28) se ve que la salida del controlador es proporcional al error entre el punto de control y la variable que se controla; la proporcionalidad la da la ganancia del controlador, K_c; con esta ganancia o sensibilidad del controlador se determina cuánto se modifica la salida del controlador con un cierto cambio de error. Esto se ilustra gráficamente en la figura. 5-10

Los controladores que son únicamente proporcionales tienen la ventaja de que soio cuentan con un parámetro de ajuste, K_c, sin embargo, adolecen de una gran desventaja, operan con una DESVIACIÓN, o "error de estado estacionario" en la variable que se controla. A fin de apreciar dicha desviación gráficamente, considérese el circuito de control de nivel que se muestra en la figura 5-9; supóngase que las condiciones de operación de diseño son $q_i = q_o$ = 150 gpm y $\bar{h}$ = 6 pies; supóngase también que, para que pasen 150 gpm por la válvula de salida la presión de aire sobre ésta debe ser de 9 psig. Si el flujo de entrada se incrementa, q_i, la respuesta del sistema con un controlador propor-

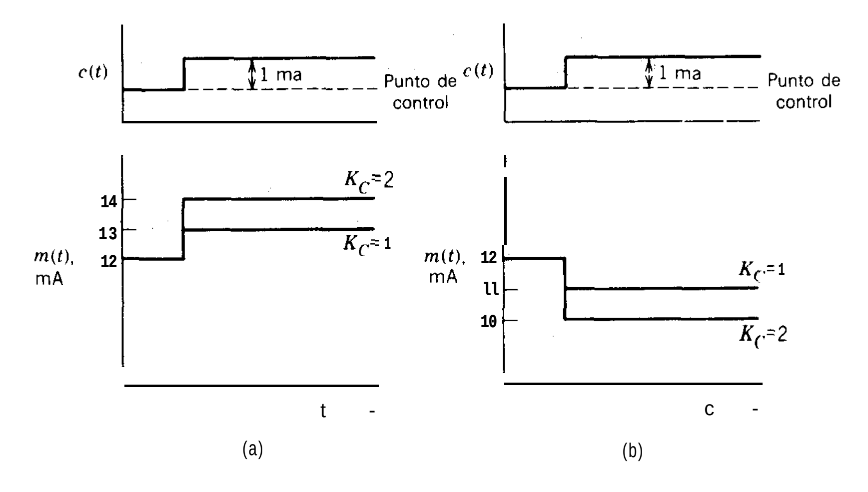


Figura 5-10. Efecto de la ganancia del controlador sobre la salida del controlador. (a) Controlador de acción directa. (b) Controlador de acción inversa.

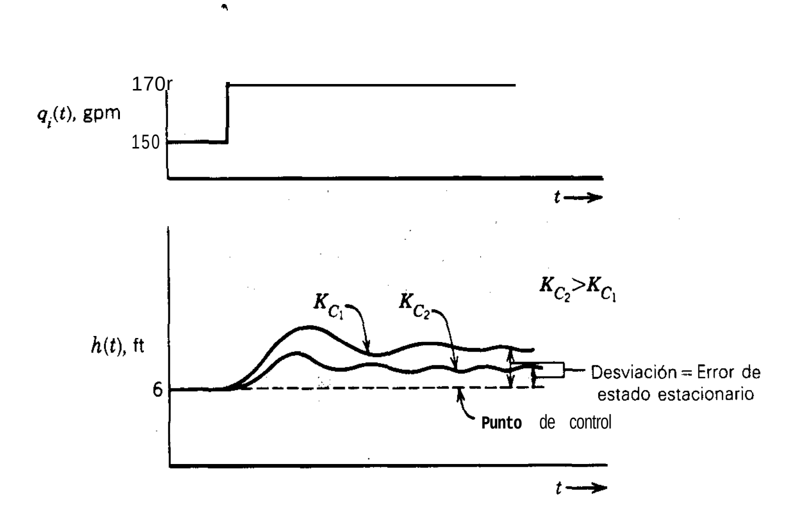


Figura 5-11. Respuesta del sistema de nivel de líquido.

cional es como se ve en la figura 5- 11. El controlador lleva de nuevo a la variable a un valor estacionario pero este valor no es el punto de control requerido; la diferencia entre el punto de control y el valor de estado estacionario de la variable que se controla es la desviación. En la figura 5-11 se muestran dos curvas de respuesta que corresponden a dos diferentes valores del parámetro de ajuste K_c. En la figura se aprecia que cuanto mayor es el valor de K_c, tanto menor es la desviación, pero la respuesta del proceso se hace más oscilatoria; sin embargo, para la mayoría de los procesos existe un valor máximo

de K_c, más allá del cual el proceso se hace inestable. En los capítulos 6 y 7 se presenta la forma de calcular el valor máximo de la ganancia, el cual se conoce como la ganancia última, K_{cu}

A continuación se explica de manera simple por qué existe la desviación, a reserva de una prueba más rigurosa que se expone en el capítulo 6; considérese el mismo sistema de control de nivel de líquido que aparece en la figura 5-9, con las condiciones de operación que se dieron anteriormente. Se debe recordar que el controlador proporcional, con acción directa $(-K_c)$, resuelve la siguiente ecuación:

$$m(t) = 9 + (-K_c)e(t) \tag{5-29}$$

Supóngase ahora que el flujo de entrada se incrementa a 170 gpm; cuando esto sucede, el nivel del líquido aumenta y el controlador debe, a su vez, incrementar su salida para abrir la válvula y bajar el nivel. Para alcanzar una operación estacionaria el flujo de salida, q_o, debe ser ahora de 170 gpm y, para que pase este nuevo flujo, se debe abrir la válvula de salida más que cuando pasaban 150 gpm; puesto que la válvula es de aire para abrir, supóngase que la nueva presión sobre la válvula debe ser de 10 psig; es decir, la salida del controlador, m(t), debe ser de 10 psig. En la ecuación (5-29) se observa que la única manera de que la salida del controlador sea de 10 psig, es que el segundo término del miembro de la derecha tenga un valor de + 1 psig y, para que esto se cumpla, el término de error, e(t), no ***puede ser cero*** en ***el estado estacionario; este error de estado estacionario es la desviación.*** Nótese que el error negativo significa que la variable que se controla es mayor que el punto de control. El nivel real, en pies, se puede calcular a partir de la calibración del transmisor de nivel.

En este ejemplo se debe hacer énfasis en dos puntos: Primero, la magnitud del término de desviación depende del valor de la ganancia del controlador, puesto que el término total debe tener un valor de + 1, entonces:

$-K_c$	$-e(\infty)$ (desviación)
1	1
2	0.5
4	0.25

Como se mencionó anteriormente, cuanto mayor es la ganancia, tanto menor es la desviación; el lector debe recordar que arriba de cierta K_c, la mayoría de los procesos se vuelven inestables, sin embargo, esto no lo muestra la ecuación del controlador'y lo cual se prueba en el capítulo 6.

Segundo, y como resumen de este ejemplo, tal parece que todo lo que los controladores proporcionales logran es alcanzar una condición de operación de estado estacionario; la cantidad de alejamiento del punto de operación, o desviación, depende de la ganancia del controlador.

Muchos fabricantes de controladores no utilizan el término ganancia para designar la cantidad de sensibilidad del controlador, sino que utilizan el término Banda **Proporcional**, PB. La relación entre la ganancia y la banda proporcional se expresa mediante

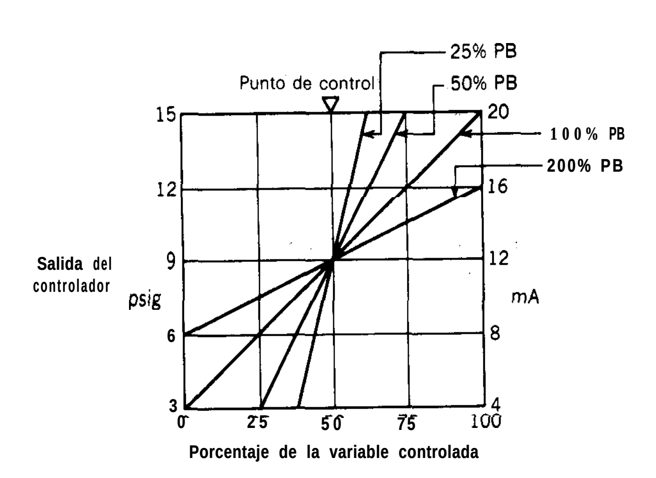
$$PB = \frac{100}{K_c} \tag{5-30}$$

y, en consecuencia, la ecuación con que se describe al controlador proporcional, se escribe ahora de la siguiente forma:

$$m(t) = \overline{m} + \frac{100}{PB}(r(r) - c(t)) \tag{5-31}$$

o

$$m(t) = \overline{m} + \frac{100}{PB}e(t) \tag{5-32}$$



	Salida del controlador		
	3 psig 4 mA	9 psig 12 mA	15 psig 20 mA
PB = 100%	100 C	200 c	300 c
PB = 50%	15oc	200 c	250 C
PB = 25%	175c	200 c	225 C
PB = 200%	—	200 c	—

Figura 5-12. Definición de la banda proporcional.

Se utiliza el término " 100" porque la PB se conoce generalmente como "porcentaje de banda proporcional".

En la ecuación (5-30) se aprecia un hecho bastante importante: una ganancia, K_c, grande es lo mismo que una banda proporcional baja o estrecha; y una ganancia baja es lo mismo que una banda proporcional grande o ancha. Esto quiere decir que, antes de empezar a ajustar la perilla del controlador, se debe saber si en el controlador se utiliza ganancia o banda proporcional.

A continuación se ofrece otra definición de banda proporcional: la banda proporcional se refiere al error (expresado en porcentaje de rango de la variable que se controla) ***que se requiere para llevar la salida del controlador del valor más bajo hasta el más alto.*** Considérese el circuito de control del intercambiador de calor que se muestra en la figura 5-8; la escala del transmisor de temperatura va de 100°C a 300°C y el punto de control del controlador está en 200°C. En la figura 5-12 se explica gráficamente la definición de PB; en ella se ve que una PB del 100% significa que, cuando la variable que se controla varía en rango un 100%, la salida del controlador varía 100% en rango; una PB de 50% significa que, cuando la variable que se controla varía un 50% en rango, la salida del controlador varía en rango 100%. También se debe notar que, en un controlador proporcional con PB del 200 % , la salida del controlador no se mueve sobre el rango completo; una PB del 200% significa muy poca ganancia o sensibilidad a los errores.

Para obtener la función de transferencia del controlador proporcional, la ecuación (5-27) se puede escribir como

$$m(r) - \overline{m} = K_c(e(t) - 0)$$

Se definen las dos siguientes variables de desviación:

$$M(t) = m(r) - \overline{m} \qquad (5\text{-}33)$$

$$E(t) = e(t) - 0 \qquad (5\text{-}34)$$

Entonces

$$M(t) = K_c E(t)$$

Se obtiene la transformada de Laplace, y de ahí resulta la siguiente función de transferencia:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \qquad (5\text{-}35)$$

Para resumir brevemente, los controladores proporcionales son los más simples, con la ventaja de que sólo tienen un parámetro de ajuste, K_c o PB; la desventaja de los mismos es que operan con una desviación en la variable que se controla, en algunos procesos, por ejemplo, un tanque de mezclado, esto puede no tener mayor consecuencia. En los casos en que el proceso se controla dentro de una banda del punto de control, los controla-

dores proporcionales son suficientes; sin embargo, en los procesos en que el control ***debe estar*** en el punto de control, los controladores proporcionales no proporcionan un control satisfactorio.

Controlador ***proporcional-integral (PI).*** La mayoría de los procesos no se pueden controlar con una desviación, es decir, se deben controlar en el punto de control, y en estos casos se debe añadir inteligencia al controlador proporcional, para eliminar la desviación. Esta nueva inteligencia o nuevo modo de control es la acción integral o de reajuste y en consecuencia, el controlador se convierte en un controlador proporcional-integral (PI). La siguiente es su ecuación descriptiva:

$$m(t) = \overline{m} + K_c[r(t) - c(t)] + \frac{K_c}{\tau_I}\int [r(t) - c(t)]\,dt \tag{5-36}$$

$$m(t) = \overline{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int e(t)\,dt \tag{5-37}$$

donde τ_I = tiempo de integración o reajuste minutos/repetición. Por lo tanto, el controlador PI tiene dos parámetros, K_c y τ_I, que se deben ajustar para obtener un control satisfactorio.

Para entender el significado físico del tiempo de reajuste, τ_I, considérese el ejemplo hipotético que se muestra en la figura 5-13, donde τ_I es el tiempo que toma al controlador repetir la acción proporcional y, en consecuencia, las unidades son **minutos/repetición.** Tanto menor es el valor de τ_I, cuanto más pronunciada es la curva de respuesta, lo cual significa que la respuesta del controlador se hace más rápida. Otra manera de explicar

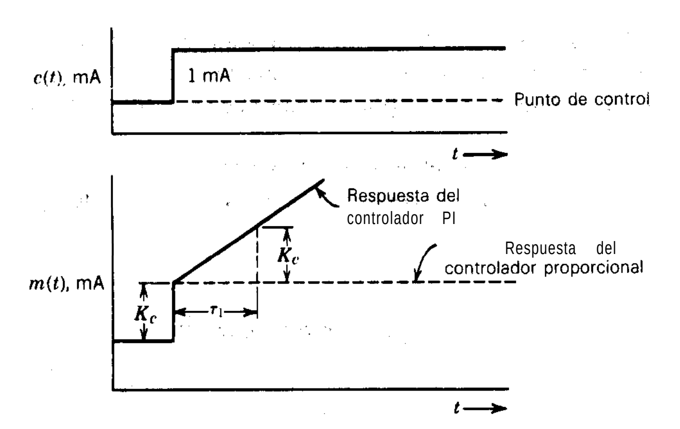


Figura 5-13. Respuesta del controlador proporcional integral (PI) (acción directa) a un cambio escalón en el error.

esto es mediante la observación de la ecuación **(5-37)**, tanto menor es el valor de τ_I, cuanto mayor es el término delante de la integral, K_c/τ_I, y, en consecuencia, se le da mayor peso a la acción integral o de reajuste.

De la ecuación (5-37) también se nota que, mientras esta presente el término de error, el controlador se mantiene cambiando su respuesta y, por lo tanto, integrando el error, para'eliminarlo; recutrdese que integración también quiere decir **sumatoria.**

Ahora se recurre nuevamente al sistema de control de nivel de líquido que se utilizó para explicar por qué ocurre la desviación. Como se dijo, cuando el flujo de entrada se incrementa a 170 gpm, el flujo de salida se debe incrementar a 170 gpm para alcanzar una condición final de operación de estado estacionario; para que pasen 170 gpm por la válvula de salida se necesita una señal de aire de 10 psig, y la única manera de que la salida de un controlador proporcional sea de 10 psig se logra mediante la conservación del término de error. En un controlador PI, mientras el error esta presente, el controlador, se mantiene integrándolo y, por lo tanto, añadiéndolo a su salida hasta que el error desaparece; cuando éste es el caso, la salida del controlador se expresa mediante

$$m(t) = \overline{m} + \frac{K_c}{\tau_I}\left(\int 0\, dt\right)$$

El hecho de que el error sea cero no significa que el término con la integral sea cero, esto significa que el controlador integra una función de valor cero; o, mejor aún, "añade cero" a su salida, con lo cual ésta se mantiene constante. Para el proceso de nivel de líquido el término con la integral

$$\frac{K_c}{\tau_I}\int 0\, dt$$

tiene un valor de 1 psig y, por lo tanto, la salida del controlador es de 10 psig, sin ningún error. Lo anterior es una explicación breve de por qué con la acción de reajuste se elimina la desviación; en el capítulo 6 esto se prueba nuevamente desde un punto de vista más riguroso.

Algunos fabricantes no utilizan el término de tiempo de reajuste τ para su parámetro de ajuste, sino que utilizan lo que se conoce como rapidez de reajuste τ_I^R; la relación entre estos dos parámetros es

$$\tau_I^R = \frac{1}{\tau_I}, \qquad \text{repeticiones/min} \tag{5-38}$$

Por lo tanto, antes de ajustar el parámetro de integración se debe saber si en el controlador se utiliza tiempo de reajuste o rapidez de reajuste, que son recíprocos y, en consecuencia, sus efectos son opuestos.

A continuación se muestran las ecuaciones con que algunos fabricantes describen la operación de sus controladores PI, lo cual refuerza el comentario de que "se debe saber con quién se juega, antes de empezar a jugar".

Foxboro Co.

$$m(t) = \overline{m} + \frac{100}{PB}e(t) + \frac{100}{PB \cdot \tau_I}\int e(t)\,dt \qquad (5\text{-}39)$$

Fisher Controls

$$m(t) = \overline{m} + \frac{100}{PB}e(t) + \frac{100\tau_I^R}{PB}\int e(t)\,dt \qquad (5\text{-}40)$$

Taylor Co., Honeywell, Inc.

$$m(t) = \overline{m} + K_c e(t) + K_c \tau_I^R \int e(t)\,dt \qquad (5\text{-}41)$$

Es interesante apuntar que, cuando Honeywell desarrolló su controlador con base en microprocesadores, el TDC2000, transformó el controlador PI en el que se describe con la ecuación (5-37). Por otro lado, cuando Fisher Controls desarrolló su sistema de control con base en microprocesadores, el PROVOX, cambió su ecuación para PI, ecuación (5-40), por la ecuación (5-41). La Instrument Society of America (ISA) propone como norma la ecuación (5-37), la cual se utilizará en este libro; lo importante es recordar las relaciones entre ganancia y banda proporcional, y tiempo de reajuste y rapidez de reajuste.

Para obtener la función de transferencia del controlador PI, la ecuación (5-37) se escribe como sigue:

$$m(t) - \overline{m} = K_c(e(t) - 0) + \frac{K_c}{\tau_I}\int (e(t) - 0)\,dt$$

Se utilizan las mismas definiciones de variables de desviación que se dan en las ecuaciones (5-33) y (5-34), se obtiene la transformada de Laplace y se reordena para obtener

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) \qquad (5\text{-}42)$$

En resumen, los controladores proporcionales-integracionales tienen dos parámetros de ajuste: la ganancia o banda proporcional y el tiempo de reajuste o rapidez de reajuste; la ventaja de este controlador es que la acción de integración o de reajuste elimina la desviación. En los capítulos 6 y 7 se prueba nuevamente que con este tipo de controlador se elimina la desviación y la manera en que ello afecta la estabilidad de los circuitos de control. Probablemente el 75% de los controladores en servicio son de este tipo.

*Con**trolador** proporcional-integral-derivativo **(PID).*** Algunas veces se añade otro modo de control al controlador PI, este nuevo modo de control es la acción derivativa,

que también se conoce como rapidez de derivación o preactuación; tiene como propósito ***anticipar*** *hacia* ***dónde*** va el proceso, mediante la observación de la rapidez para el cambio del error, su derivada. La ecuación descriptiva es la siguiente:

$$m(t) = \overline{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int e(t)\, dt + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \tag{5-43}$$

donde τ_D = rapidez de derivación en minutos.

Por lo tanto, el controlador PID tiene tres parámetros, K_c o PB, τ_I o τ_I^R y τ_D, que se deben ajustar para obtener un control satisfactorio. Nótese que **sólo** existe un parámetro para ajuste de derivación, τ_D, el cual tiene las mismas unidades, minutos, para todos los fabricantes.

Como se acaba de mencionar, con la acción derivativa se da al controlador la capacidad de anticipar hacia dónde se dirige el proceso, es decir, "ver hacia adelante", mediante el calculo de la derivada del error. La cantidad de "anticipación" se decide mediante el valor del parámetro de ajuste, τ_D.

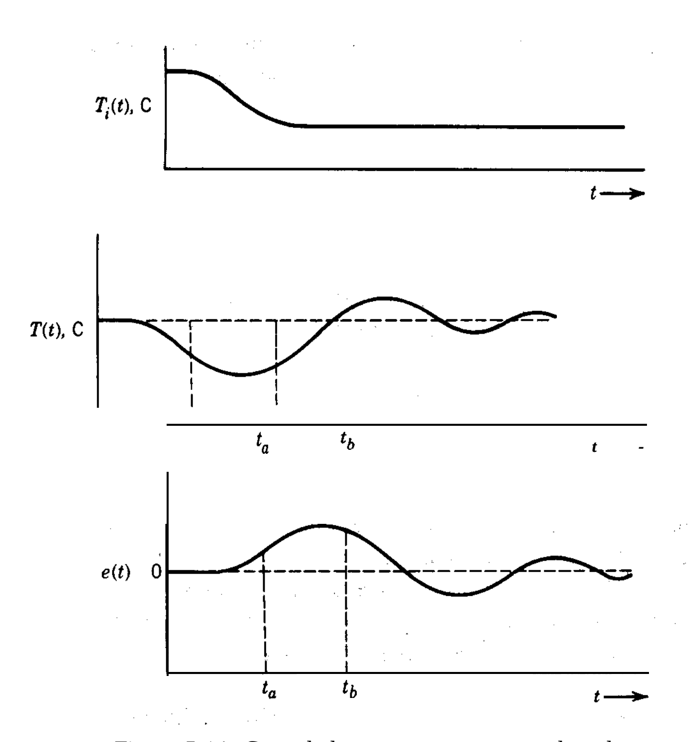


Figura 5-14. Control de un **intercambiador** de calor.

A continuación se utiliza el intercambiador de calor que se muestra en la figura 5-8 para aclarar el significado de "anticipar hacia dónde se dirige el proceso". Si se supone que la temperatura de entrada al proceso disminuye cierta cantidad y la temperatura de salida empieza a bajar de manera correspondiente, como se muestra en la figura 5-14, en el tiempo t_a la cantidad de error es positiva y puede ser pequeña; en consecuencia, la cantidad de corrección de control que suministra el modo proporcional e integral es pequeña, sin embargo, la derivada de dicho error, la pendiente de la curva de error, es grande y positiva, lo que hace que la corrección proporcionada por el modo derivativo sea grande. Mediante al observación de la derivada del error, el controlador sabe que la variable que se controla se aleja con rapidez del punto de control y, en consecuencia, utiliza este hecho para ayudar en el control. En el tiempo t_b el error aún es positivo y mayor que antes; la cantidad de corrección de control que suministran los modos proporcional e integral también es más grande que antes y se añade aún a la salida del controlador para abrir más la válvula de vapor; sin embargo, en ese momento la derivada del error es negativa, lo cual significa que el error empieza a decrecer; es decir, la variable que se controla empieza a bajar al punto de control y, nuevamente, con la utilización de este hecho, en el modo derivativo se comienza a substraer de los otros dos modos, ya que se reconoce que el error disminuye. Al hacer esto, se toma más tiempo para que el proceso regrese al punto de control, pero disminuyen el sobrepaso y las oscilaciones alrededor del punto de control.

Los controladores PID se utilizan en procesos donde las constantes de tiempo son largas. Ejemplos típicos de ello son los circuitos de temperatura y los de concentración. Los procesos en que las constantes de tiempo son cortas (capacitancia pequeña) son rápidos y susceptibles al ruido del proceso, son característicos de este tipo de proceso los circuitos de control de flujo y los circuitos para controlar la presión en corrientes de líquidos. Considérese el registro de flujo que se ilustra en la figura 5-15, la aplicación del modo derivativo sólo da como resultado la amplificación del ruido, porque la derivada del ruido, que cambia rápidamente, es un valor grande. Los procesos donde la constante de tiempo es larga (capacitancia grande) son generalmente amortiguados y, en consecuencia, menos susceptibles al ruido; sin embargo, se debe estar alerta, ya que se puede tener un proceso con constante de tiempo larga, por ejemplo, un circuito de temperatura, en el que el transmisor sea ruidoso, en cuyo caso se' debe reparar el transmisor antes de utilizar el controlador PID.

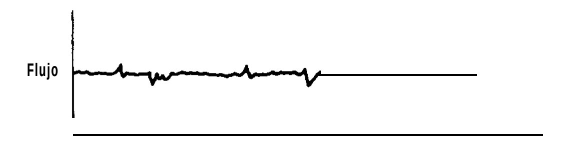


Figura **5-15.** Registro de un circuito de flujo.

La función de transferencia de un controlador PID "ideal" se obtiene a partir de la ecuación **(5-43),** la cual se reordena como sigue:

$$m(t) - \overline{m} = K_c(e(t) - 0) + \frac{K_c}{\tau_I}\int (e(t) - 0)\,dt + K_c\tau_D\frac{d(e(t) - 0)}{dt}$$

Se usan las mismas definiciones de variables de desviación que aparecen en las ecuaciones (5-33) y **(5-34),** se obtiene la transformada de **Laplace** y se reordena para obtener:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) \qquad (5\text{-}44)$$

Esta función de transferencia se conoce como "ideal" porque en la práctica es imposible implantar el calculo de la derivada, por lo cual se hace una aproximación mediante la utilización de un adelanto/retardo, de lo que resulta la función de transferencia "real":

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)\left(\frac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1}\right) \qquad (5\text{-}45)$$

Los valores típicos de α están entre 0.05 y 0.1.

En resumen, los controladores PID tienen tres parámetros de ajuste: la ganancia o banda proporcional, el tiempo de reajuste o rapidez de reajuste y la rapidez derivativa. La rapidez derivativa se da siempre en minutos. Los controladores PID se recomiendan para circuitos con constante de tiempo larga en los que no hay ruido. La ventaja del modo derivativo es que proporciona la capacidad de "ver hacia dónde se dirige el proceso". En los capítulos 6 y 7 se estudia la manera en que el uso de este controlador mejora el control y cómo afecta la estabilidad de los circuitos de control.

Controlador proporciona/ derivativo (PD). Este controlador se utiliza en los procesos donde es posible utilizar un controlador proporcional, pero se desea cierta cantidad de "anticipación' ' .

La ecuación descriptiva es

$$m(t) = \overline{m} + K_c e(t) + K_c\tau_D\frac{de(t)}{dt} \qquad (5\text{-}46)$$

y la función de transferencia "ideal" es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c(1 + \tau_D s) \qquad (5\text{-}47)$$

Una desventaja del controlador PD es que opera con una desviación en la variable que se controla; la desviación solamente se puede eliminar con la acción de integración, sin embargo, un controlador PD puede soportar mayor ganancia, de lo que resulta una menor desviación que cuando se utiliza un controlador únicamente proporcional en el mismo circuito.

Controladores digitales y otros comentarios. Como se mencionó anteriormente, la ecuación (5-45) es la función de transferencia para los controladores industriales analógicos, sin embargo, la ecuación de los controladores digitales es la forma discreta de la ecuación (5-43). Los métodos para ajustar los controladores digitales no son muy diferentes de los que se utilizan para ajustar los controladores analógicos, lo cual se explica en el siguiente capítulo. Se remite al lector a la referencia bibliográfica[4] para un estudio más profundo acerca de los controladores digitales.

Antes de concluir esta sección son pertinentes algunos otros comentarios. En la ecuación (5-43) se ve que, en cualquier momento en que cambia el parámetro K_c, esto afecta las acciones de integración y derivación, ya que τ_I y τ_D se dividen o multiplican por dicho parámetro; esto significa que, si únicamente se desea cambiar la acción proporcional pero no la cantidad de reajuste o anticipación, entonces también se deben cambiar los parámetros τ_I y τ_D para adaptarlos al cambio K_c. Todos los controladores analógicos son de este tipo, y algunas veces se les conoce como "controladores interactivos"; la mayoría de los controladores con base en microprocesadores también son del mismo tipo; sin embargo, existen algunos en los que se evita este problema mediante la substitución del término K_c/τ_I por el termino único K_I y el término $K_c\tau_D$ por K_D, lo cual quiere decir que los tres parámetros de ajuste son K_I, K_D y K_c.

El comentario final se relaciona con la acción derivativa. La forma típica para cambiar el punto de control del controlador es la introducción de un cambio, se muestra en la figura 5-16*a*; cuando esto ocurre, también se introduce un cambio del error en escalón, como se ilustra en la figura 5-16*b*; y, puesto que el controlador toma la derivada del error, ésta produce un cambio súbito en la salida del controlador, como se ve en la figura 5-16c; el cambio en la salida del controlador es innecesario y , posiblemente, va en detrimento de la operación del'proceso. Para sortear este problema se ha propuesto(4) la utilización de la derivada de la variable que se controla, pero con signo contrario.

$$-\frac{dc(t)}{dt}$$

en lugar de la derivada del error; las dos derivadas son iguales cuando el punto de control permanece constante, como se puede ver mediante lo siguiente:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d[r(t) - c(t)]}{dt} = \cancelto{0}{\frac{dr(t)}{dt}} - \frac{dc(t)}{dt}$$

En el momento en que se introduce el cambio en el punto de control la "nueva" derivada no ocasiona un cambio súbito, inmediatamente desputs el comportamiento vuelve a ser

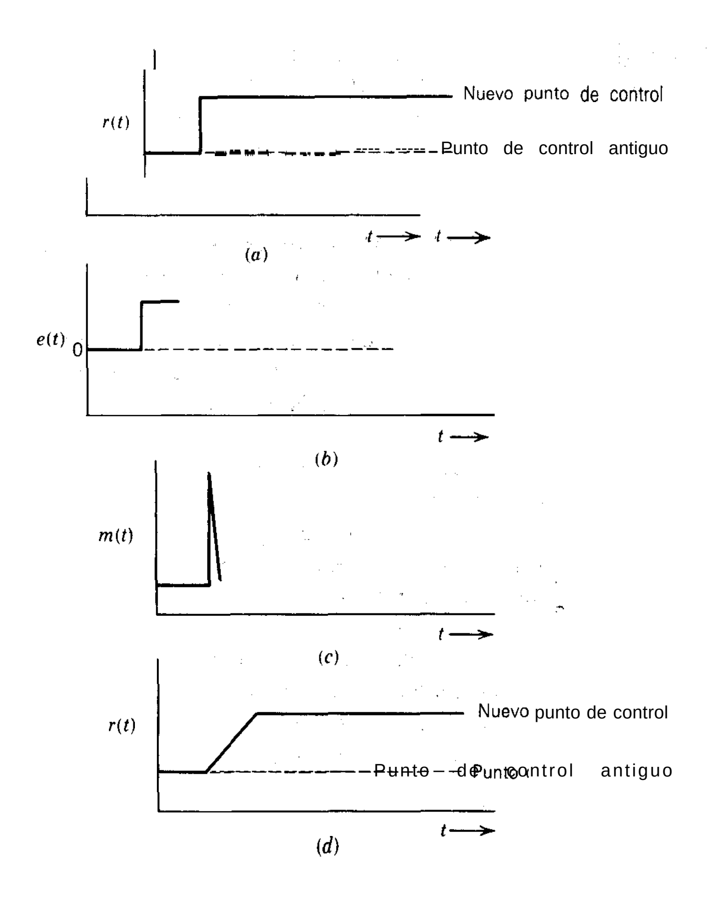


Figura 5-16. Efecto de los cambios en el punto de control.

el mismo de antes. Esta opción se ofrece en algunos controladores analógicos y en los que tienen como base microprocesadores, y se conoce como derivada sobre la variable que se controla.

Otra posibilidad para evitar el problema de derivación se consigue fácilmente mediante la utilización de controladores digitales; en esta opción se cambia el punto de control en forma de rampa; aun cuando el operador lo cambia en escalón, como se observa en la figura 5-16, la pendiente de la rampa la predetermina el personal de operación.

Reajuste excesivo

Un problema real e importante en el control de proceso es el reajuste excesivo y puede ocurrir en cualquier momento cuando el controlador tiene el modo integral de control. Para explicar este problema se utiliza el circuito de control del **intercambiador** de calor que se muestra en la figura 5-8.

Supóngase que la temperatura de entrada al proceso desciende en una cantidad significativa; este disturbio provoca que baje la temperatura de salida del proceso y, a su vez, el controlador (PI o PID) hace que la válvula de vapor se abra; puesto que la válvula es de aire para abrir, la señal neumática del controlador se incrementa hasta que, a causa de la acción de reajuste, la temperatura de salida se iguala con el punto de control que se desea. Supóngase que en el esfuerzo por reestablecer la ubicación de la variable que se controla en el punto de control, se integra hasta 15 psig en el controlador, punto en el cual la válvula de vapor esta completamente abierta y, por lo tanto, el circuito de control, ya no puede hacer más; esencialmente el proceso está fuera de control, lo cual se ilustra en la figura 5- 17. En la figura se muestra que, cuando la **válvula** esta completamente abierta, la variable que se controla (temperatura de salida) aún no llega al punto de control y, puesto que todavía existe el error, el controlador trata de corregirlo mediante un mayor incremento (integración del error) en su presión de salida, aun cuando la válvula no se puede abrir más allá de 15 psig. En efecto, la salida del controlador se puede integrar hasta la presión de suministro, la cual es generalmente de casi 20 psig; en este punto ya no se puede incrementar la salida del controlador, debido a que la salida esta saturada, tal estado del sistema también se muestra en la figura 5-17. La saturación se debe a la acción de integración (reajuste) del controlador; mientras el error esté presente, el controlador continuará cambiando susalida. Dicho estado de saturación se conoce como "reajuste excesivo".

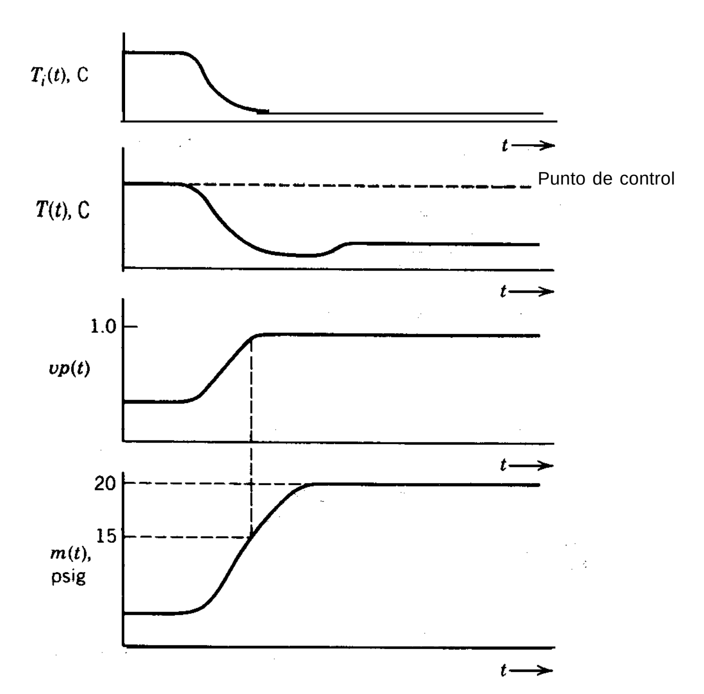


Figura 5-17. Respuesta del circuito de control del **intercambiador** de calor.

Si ahora se supone que la temperatura de entrada sube nuevamente, la temperatura de salida del proceso, a su vez, empezará a incrementarse, como se muestra también en la figura 5-18, donde se aprecia que la temperatura de salida alcanza y pasa el punto de control y la válvula permanece completamente abierta, aunque, de hecho, debería estar cerrándose, la razón de que no se cierre es porque el controlador debe integrar hacia abajo; desde 20 a 15 psig, antes de que empiece a cerrar la válvula, pero en el momento en que eso sucede, la temperatura de salida ha sobrepasado el punto de control en una cantidad considerable.

Como se mencionó anteriormente, este problema de reajuste excesivo puede ocurrir en cualquier momento en que esté presente la integración en el controlador, y se puede evitar si el controlador se pone en manual tan pronto como su salida alcanza 15 psig, ya que así se detiene la integración; el controlador puede volver a ponerse en automático cuando la temperatura empieza a descender. La desventaja de esta operación es que requiere la atención del operador; sin embargo, la mayoría de los controladores que hay a la venta tienen "protección contra reajuste excesivo", con la cual se detiene la integración automáticamente cuando el controlador alcanza 15 psig (20 mA) o 3 psig (4 mA). Puesto que esta protección es una característica especial del controlador, el ingeniero debe tomar en cuenta si el reajuste excesivo se puede presentar y en ese caso, especificar la protección. En el capítulo 6 se describe la protección contra el reajuste excesivo.

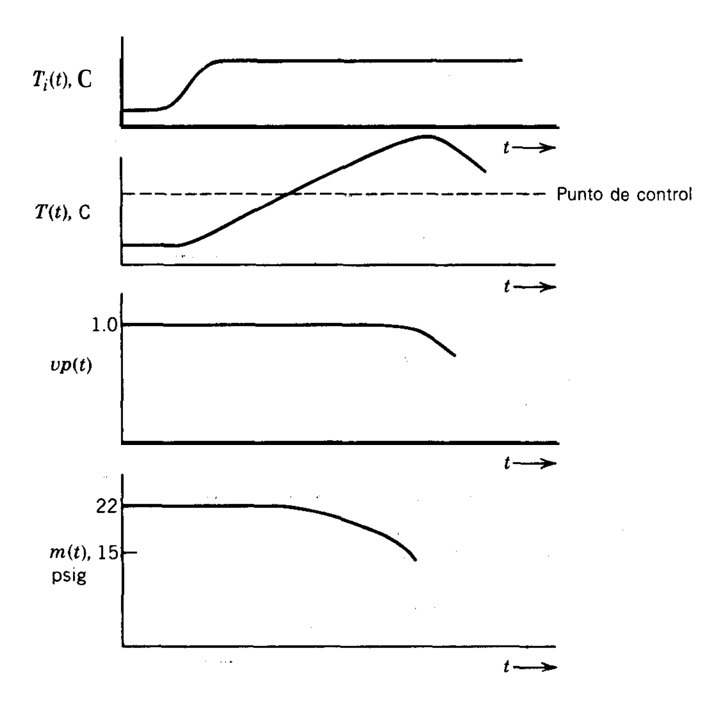


Figura 5-18. Respuesta del circuito de control del **intercambiador de** calor.

El reajuste excesivo se presenta típicamente en los procesos por lotes, el control en cascada y cuando al elemento final de control se le maneja mediante varios controladores, como es el caso de los controles por sobreposición. En el capítulo 8 se abordan el control en cascada y el control por sobreposición.

Resumen del controlador por retroalimentación

En esta sección se abordó el tema de los controladores de proceso. Se mencionó cuál es el objetivo de los controladores: tomar decisiones acerca de la manera en que se maneja la variable para mantener la variable que se controla en el punto de control. También se vio el objetivo de los selectores auto/manual y remoto/local, así como la forma de elegir la acción del controlador, inversa/directa. También se estudiaron los diferentes tipos de controladores y se puso especial énfasis en el significado de los parámetros de ajuste: ganancia (K_c) o banda proporcional (PB), tiempo de reajuste (τ_I) o rapidez de reajuste (τ_I^R) y rapidez derivativa (τ_D). Finalmente se abordó el tema reajuste excesivo y se explicó su significado.

Aún no se estudia el importante tema de la manera de obtener la afinación óptima de los parámetros de ajuste; lo cual se conoce como "ajuste del controlador" y consiste en ajustar la personalidad del controlador de manera que concuerde con la personalidad del proceso. Esto se presenta en el capítulo 6.

5-4. RESUMEN

En este extenso capítulo se presentó parte del equipo (hardware) que se requiere para construir un sistema de control. El capítulo se inició con una breve presentación de algunos términos que se relacionan con los sensores y transmisores, asimismo se estudiaron los parámetros con que se describen tales dispositivos; se continuó con la presentación de algunas consideraciones importantes acerca de las válvulas de control, por ejemplo, acción en caso de falla, dimensionamiento y características. Para mayor información acerca de sensores, transmisores y válvulas se remite al lector al apéndice C.

Después se estudiaron los controladores de proceso por retroalimentación, se presentaron los cuatro tipos más comunes de controladores y se explicó el significado físico de sus parámetros; el ajuste de dichos parámetros se trata en el capítulo 6.

Ahora se pueden utilizar los conocimientos adquiridos en los cinco primeros capítulos de este libro para el diseño de sistemas de control de proceso, que es el tema de los cuatro capítulos siguientes.

BIBLIOGRAFÍA

1. "Control Valve Handbook," Fisher Controls Co., Marshalltown, Iowa.
2. "Masoneilan Handbook for Control Valve Sizing," Masoneilan International, Inc., Norwood, Mass.

3. "Fisher Catalog 10," Fisher Controls Co., Marshalltown, Iowa.
4. C. L. Smith, *Digital Computer Process Control*, Internacional Textbook Co., 1972.

PROBLEMAS

5-1. Se utiliza un transmisor electrónico diferencial de presión en combinación con un orificio para medir flujo, de manera que la señal de 4-20 mA es proporcional al cuadrado del flujo a través del orificio. El transmisor se calibra para una presión diferencial máxima de 100 pulg. de agua y el orificio se dimensiona de manera que el máximo flujo correspondiente es de 750 gpm.

a. Se debe calcular la ganancia del transmisor cuando el flujo es de 500 gpm. Es necesario especificar las unidades.

b. ¿Cuál es la señal de salida del transmisor en porcentaje del rango cuando el flujo es de 500 gpm?

5-2. Se necesita dimensionar una válvula de control para regular el flujo de 150 psig de vapor saturado a un calefactor; el flujo normal en estado estacionario es de 1000 lbm/hr, con una presión de entrada de 150 psig y una presión de salida de 50 psig. Se debe obtener la C_V que se requiere para un factor de sobrediseño de 30%.

5-3. Se requiere dimensionar una válvula de control que se usará con liquidos; las condiciones de operación son las siguientes:

$$\text{Flujo} = 52{,}500\ \frac{\text{lbm}}{\text{hr}}\ (\text{normal}),\ 210{,}000\ \frac{\text{lbm}}{\text{hr}}\ (\text{máx})$$

P_1 = 229 psia	P_2 = 129 psia	T = 104°F
P_V = 124 psia	P_C = 969 psia	G_f = 0.92
μ = 0.2 cp		

Se debe obtener la C_V que se requiere.

5-4. Se necesita una válvula para operar con gas en las siguientes condiciones:

Flujo = 55,000 scfh (normal)

G_f = 1.54	T = 40 C	P_1 = 110 psig
P_2 = 11 psig		

Obténgase la dimensión de la válvula para un factor de sobrediseño de 2.

5-5. Considérese el proceso que se muestra en la figura 5-19; el benceno fluye a través del conducto con una tasa de 700 gpm a 155°C; la caída de presión entre los puntos 1 y 2, para flujo de estado estacionario, es de 15 psi, esto incluye la caída a través del orificio. A las condiciones de flujo; la densidad del benceno es de 45.49

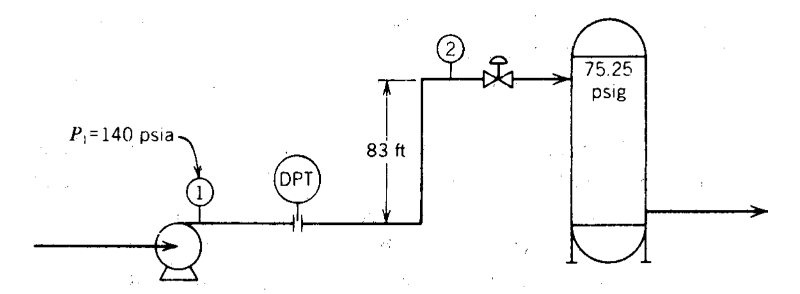


Figura 5-19. Diagrama para el problema 5-5.

lbm/pies^3, y la viscosidad de 0.17 cp. Se debe obtener la dimensión que requiere la válvula para un factor de sobrediseño de 2.

5-6. Considérese el proceso que se muestra en la figura 5-20; se bombea etilbenceno a una tasa de 1000 gpm a 445°F, la caída dinámica de presión entre los puntos 1 y 2 es de 9.36 psi, y entre los puntos 3 y 4 es de 3 psi. Con las condiciones de flujo, la densidad del'etilbenceno es de 42.05 lbm/pies^3. Obténgase la C_V que se requiere para un factor de sobrediseño del 25 % .

5-7. Se dimensiona una válvula de control de manera que con las condiciones de diseño el flujo de líquido (G_f = 0.85) es de 420 gpm, la caída de presión a través de la válvula es de 3 psi; la válvula está medio abierta. La caída denámica total de presión en la línea, incluida la caída a través de la válvula, es de 20 psi; la **válvula** tiene características inherentemente lineales. Se puede suponer que la caída de presión en la línea es proporcional al cuadrado del flujo, pero la caída dinámica de presión total es constante.

a. Calcúlese el factor de capacidad de la válvula C_V (completamente abierta).

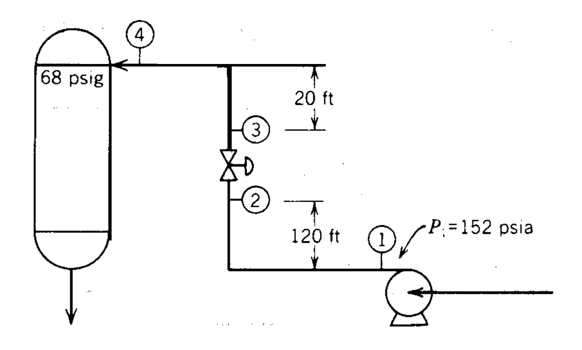


Figura 5-20. Diagrama para el problema 5-6.

b. Calcúlese la ganancia de la válvula para las condiciones de diseño, en gpm por porcentaje de la posición de la válvula.
c. Se debe calcular el flujo cuando se abre la válvula completamente.

5-8. Considérese el sistema de control de presión que se muestra en la figura 5-21; el transmisor de presión PT25 tiene una escala de 0-100 psig; el controlador, PIC25, es un controlador proporcional, cuyo valor de base se fija a mitad de la escala y el punto de control es de 10 psig. Se debe obtener la acción correctiva del controlador y la banda proporcional (BP) que se requiere para que, cuando la presión del tanque es de 30 psig, la válvula esté completamente abierta.

5-9. Ahora se cambia el sistema de control de presión anterior, el nuevo esquema de control se ilustra en la figura 5-22, el cual se conoce como control en cascada y sus beneficios y principios se estudian en el **capítulo** 8. En dicho esquema el controlador de presión establece el punto de control del controlador de flujo, por lo tanto, el interruptor **remoto/local** del controlador de flujo debe estar en remoto. El rango del transmisor de presión es de 0-100 psig; y el del transmisor de flujo, de 0-3000 **scfh;** ambos controladores son proporcionales,+ La tasa de flujo nominal a través de la válvula es de 1000 scfh y , para que pase este flujo, se abre un 33 % ; la válvula de control tiene características lineales.

a. Obténgase la acción de los controladores.
b. Elíjanse los valores de base de ambos controladores, de manera que no haya desviación en ninguno de los dos.
c. Obténgase el ajuste de la banda proporcional del controlador de presión, de manera que, cuando la presión del tanque alcance los 40 psig, el punto de control del controlador de flujo sea de 1700 scfh; el punto de control del controlador de presión es de 10 psig.

5-10. considérese el circuito de nivel que aparece en la figura **5-9;** las condiciones de operación de estado estacionario son: $\bar{q}_i = \bar{q}_o = 150$ gpm y $\bar{h} = 6$ pies. Para tal estado estacionario la válvula **AA** requiere una señal de 9 psig; el rango del transmisor de nivel es de 0-20 pies; y en este proceso se utiliza un controlador **propor-**

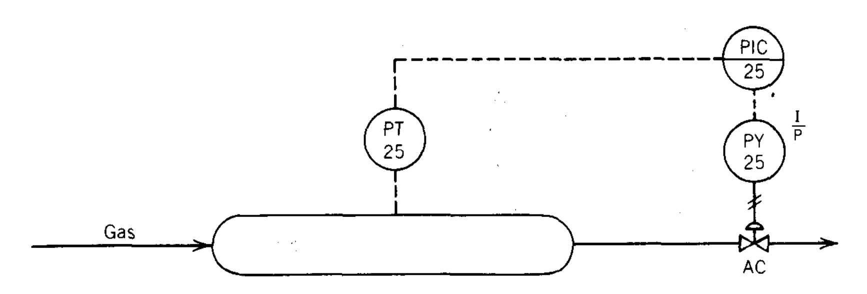


Figura 5-21. Diagrama para el problema 5-8.



cional, K_c = 1. Se debe calcular la desviación si el flujo de entrada se incrementa a 170 gpm y la válvula requiere 10 psig para que pase éste; la desviación se debe expresar en psig y en pies.

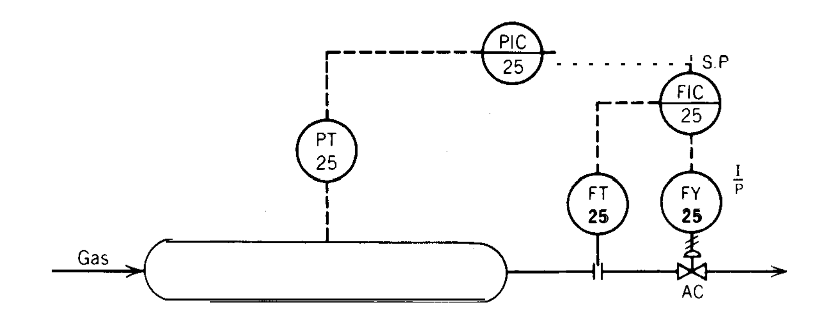


Figura 5-22. Diagrama para el problema 5-9.

CAPÍTULO 6

Diseño de sistemas de Control por retroalimentación con un. solo circuito

En los capítulos anteriores se familiarizó al lector con las características dinámicas de los procesos; sensores, transmisores, válvulas de control y controladores. También se expuso la manera de escribir las funciones de transferencia en forma lineal para cada uno de'estos componentes, así como la forma de reconocer los parámetros importantes para el diseño de sistemas automáticos de control, a saber: la ganancia de estado estacionario, las constantes de tiempo y el tiempo muerto (retardo de transportación o retardo en tiempo). En este capítulo se aborda la manera de reunir todos esos conceptos para el diseño y ajuste de sistemas de control con un circuito de retroalimentación; primero se analiza un circuito de control por retroalimentación simple y se expone el procedimiento para dibujar su diagrama de bloques y determinar su ecuación característica; a continuación se examina el significado de la ecuación característica, en términos de su utilización para determinar la estabilidad del circuito. Los dos métodos que se emplean en la determinación de la estabilidad del circuito son el de Routh y el de substitución directa. Posteriormente se presentan dos métodos para ajustar el controlador por retroalimentación, es decir, ajustar los parámetros del controlador a las características (o personalidad) de los otros componentes del circuito. También se trata el método de síntesis del controlador, el cual, además de proporcionar algunas relaciones simples del controlador, da cierta visión para la selección de los modos proporcional, integracional y derivativo para varias funciones de transferencia del proceso. Finalmente, se verá la manera de evitar el importante problema de la reposición excesiva, el cual se estudió en el capítulo 5.

Los métodos que se estudian en este capítulo son los que tienen más aplicación en el diseño y ajuste de los circuitos de control por retroalimentación para procesos industriales. Las técnicas de diseño más clásicas de lugar de raíz y el análisis de la respuesta en frecuencia, las cuales se aplican tradicionalmente a los sistemas inherentemente lineales, se estudiarán en el capítulo 7.

6-1. CIRCUITO DE CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN

El concepto de control por retroalimentación, a pesar de existir desde hace más de dos mil anos, no tuvo aplicación práctica en la industria hasta que James Watt lo aplicó en el control de velocidad de su máquina de vapor, hace casi doscientos años; a partir de entonces proliferó la cantidad de aplicaciones industriales de dicho concepto, a tal punto que actualmente en la gran mayoría de los sistemas de control automático se incluye al menos un circuito de control por retroalimentación. Ninguna de las técnicas avanzadas de control desarrolladas en los últimos cincuenta años para mejorar el desempeño de los circuitos de control por retroalimentación ha podido reemplazarlo; estas técnicas avanzadas se estudian en un capítulo posterior.

Para revisar el concepto de control por retroalimentación se utiliza el ejemplo del intercambiador de calar que se vio en el capítulo 1; en la figura 6-1 aparece un diagrama del intercambiador.

El objetivo es mantener la temperatura de salida del fluido que se procesa, $T_o(t)$, en el valor que se desea o punto de control, $T_o^{fijo}(t)$, en presenciade variaciones en el flujo del fluido que se procesa, $F(t)$ y la temperatura de entrada, $T_i(t)$. La variable que se puede ajustar para controlar la temperatura de salida es el flujo de vapor; $F_s(t)$, ya que determina la cantidad de energía que se suministra al proceso del fluido.

El plan. de control por retroalimentación trabaja como sigue: la temperatura de salida o *variable controlada* se mide con un sensor y transmisor (TT42) que genera una señal $T_{ot}(t)$ proporcional a k-temperatura; la señal del transmisor o *medición* se envía al controlador (TIC42), donde, se compara contra el punto de control, entonces la función del controlador es. generar una señal de salida *o variable manipulada, m(t),* con base en el error o diferenciaentre la medición y el punto de control. La señal de salida del controlador. se. conecta entonces al actuador de la válvula de control de vapor, mediante un

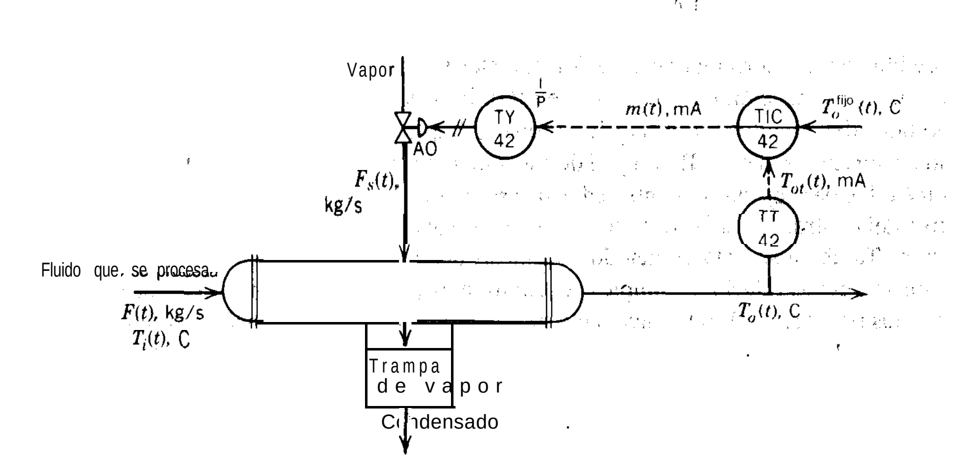


Figura 6-1. Circuito de control por retroalimentación para controlar la temperatura en un intercambiador de calor.

transductor corriente a presión **(I/P),** esto se debe a que en el presente ejemplo el transmisor y el controlador generan señales de corriente eléctrica, pero el actuador de la válvula se debe operar mediante presión de aire. La función del actuador de la **válvula** es situar la válvula en proporción con la señal de salida del controlador (ver apéndice C); entonces, el flujo de vapor es una **función** de la posición de la válvula.

El término "retroalimentación' ' proviene 'del hecho de que se mide la variable controlada y dicha medición es "alimentada hacia atrás" para reajustar la válvula de vapor, lo cual ocasiona que las variaciones de la señal se muevan alrededor del circuito como sigue:

> Las variaciones en la temperatura de salida se captan en el sensor-transmisor y se envían al controlador, donde varía la señal de salida, lo cual, a su vez, ocasiona que la posición de la válvula de control y, consecuentemente, el flujo de vapor, varíen; las variaciones en el flujo de vapor ocasionan que varíe la temperatura de salida, con lo que se completa el circuito.

El desempeño del circuito de control se puede analizar mejor si se dibuja el diagrama de bloques del circuito completo; para esto **se** dibujan los bloques de cada componente y se conecta la señal de salida de cada bloque con la entrada del siguiente. A continuación se comienza con el **intercambiador** de calor, como se ve en la figura 6-2; el **intercambiador** de calor consta de tres bloques, uno para cada uná de sus tres entradas.

$G_T(s)$ es la función de transferencia del proceso, la cual relaciona la temperatura de salida con la de entrada, C/C
$G_F(s)$ es la **función** de transferencia del **proceso** que relaciona la temperatura de ãalida con el **flujo** del procedo, C/(kg/s)
$G_s(s)$ es la función de **transferencia** del proceso **que** relaciona la temperatura de salida con el flujo de vapor, C/(kg/s)

En la figura 6-3 se muestra el diagrama de bloques completo del circuito de control por retroalimentación y la simbología es la siguiente:

$E(s)$ es la **señal** de error, mA
$G_c(s)$ es la función de transferencia **del** controlador, mA/mA

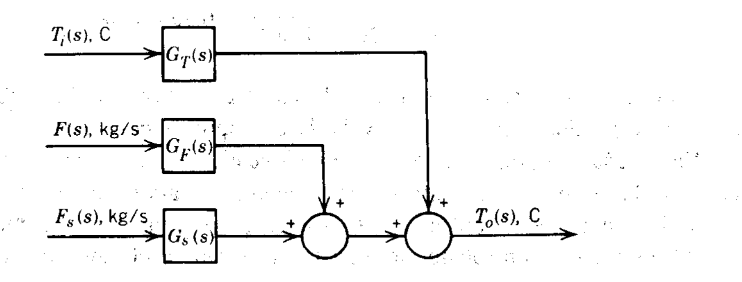


Figura 6-2. Diagrama de bloques para el **intercambiador** de la figura 6-1.

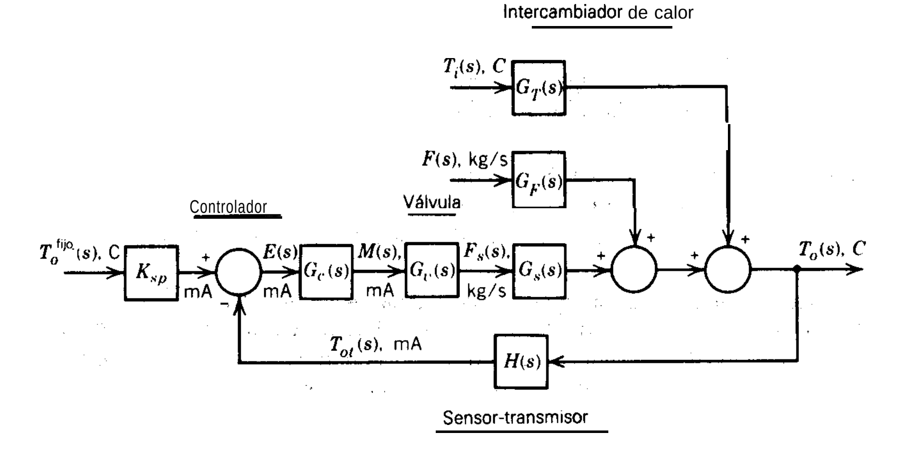


Figura 6-3. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura del **intercambiador** de calor. (*Nota*: El bloque del transductor **I/P** se combinó con el bloque de la **válvula** de control.)

$G_v(s)$ es la función de **transferencia** de la válvula de control, (kg/s)/mA
$H(s)$ es la función de transferencia del sensor-transmisor, mA/C
K_{sp} es el factor de escala para el punto de control de la temperatura, mA/C

En este punto es necesario notar la correspondencia entre los bloques, o grupos de bloques, en el diagrama de bloques y las componentes del circuito de control; como se esbozó antes, esta comparación se facilita uniformando los símbolos que se utilizan para identificar las diferentes señales. También es importante recordar, según se vio en el capítulo 3, que los bloques en el diagrama representan relaciones lineales entre las señales de entrada y salida, y que las señales son desviaciones de los valores iniciales de estado estable y no valores absolutos de variables.

Con el fin de conservar la simpleza del diagrama, se incluye la ganancia constante del transductor corriente a presión (I/P en la figura 6-1) en la función de transferencia de la válvula de control, $G_v(s)$. La ganancia del transductor 'es

$$\frac{\Delta P}{\Delta I} = \frac{(15 - 3)\text{ psi}}{(20 - 4)\text{ mA}} = 0.75 \text{ psi/mA}$$

Se nota que con esto se forman las unidades de G,(s) (kg/s)/mA; también se supone que la caída de presión a **través** de la **válvula** de vapor es constante.

En la señal del punto de control se incluye el término K_{sp} para indicar la conversión de la escala del punto de control, generalmente se calibra en las mismas unidades que la variable controlada, contra la misma base que la señal del transmisor; es decir, C a mA. Cuando en el controlador se indica la medición y el punto de control en la misma escala, K_{sp}, entonces es numéricamente igual a la ganancia de estado estacionario del transmisor. . .

Función de transferencia de circuito cerrado

Mediante la inspección del diagrama de bloques del circuito. cerrado (figura 6-3) se ve que en el circuito hay una señal de salida, la variable controlada $T_o(s)$, tres señales de entrada, el punto de control $T_o^{fijo}(s)$ y dos perturbaciones, $T_i(s)$ y F(s). Puesto que el flujo de vapor se conecta con la temperatura de salida mediante el circuito de control, se puede esperar que la "respuesta de circuito cerrado'.' del sistema a las diferentes entradas sea diferente respecto de la respuesta que se tiene cuando el circuito esta "abierto". La mayoría de los circuitos de control se pueden abrir mediante el accionamiento de un interruptor en el controlador, de "automático" a "manual" (ver capítulo 5); cuando el controlador esta en la posición manual, su salida no responde a la señal de error y, por tanto, es independiente del punto de control y de las señales de medición; por otro lado, cuando esta en "automático", la salida del controlador varía cuando varía la señal de mediciõn.

Mediante la aplicación de las reglas del álgebra de los diagramas de bloques que se estudiaron en el capítulo 3, se puede determinar la función de transferencia de circuito cerrado del circuito de salida respecto acualquiera de sus entradas. Para repasar,. se puede suponer que se desea obtener la respuesta de la temperatura de salida $T_o(s)$ a la temperatura de entrada $T_i(s)$; primero se escriben las ecuaciones para ca& bloque del diagrama, como sigue:

Señal de error: $$E(s) = K_{sp}T_o^{fijo}(s) - T_{ot}(s) \tag{6-1}$$

Variable manipulada: $$M(s) = G_c(s)E(s) \tag{6-2}$$

Flujo de vapor: $$F_s(s) = G_v(s)M(s) \tag{6-3}$$

Temperatura de salida: $$T_o(s) = G_s(s)F_s(s) + G_F(s)F(s) + G_T(s)T_i(s) \tag{6-4}$$

Señal del transmisor: $$T_{ot}(s) = H(s)T_o(s) \tag{6-5}$$

A continuación se supone que el flujo del proceso y el punto de control no varían, es decir, sus variables de desviación son cero

$$F(s) = 0$$
$$T_o^{fijo}(s) = 0$$

Y todas las variables intermedias se eliminan mediante la combinación de las ecuaciones anteriores, para obtener la relación entre $T_o(s)$ y $T_i(s)$:

$$T_o(s) = G_s(s)\,G_v(s)\,G_c(s)\,[-H(s)T_o(s)] + G_T(s)T_i(s) \tag{6-6}$$

Esta ecuación se puede reordenar de la manera siguiente:

$$\frac{T_o(s)}{T_i(s)} = \frac{G_T(s)}{1 + H(s)\,G_s(s)\,G_v(s)\,G_c(s)} \tag{6-7}$$

Ésta es la función de transferencia de circuito cerrado entre la temperatura de entrada y la de salida; de manera semejante, si se hace $T_i(s) = 0$ y $T_o^{\text{fijo}}(s) = 0$ y se combinan de la ecuación (6-1) a la (6-5), se obtiene la función de transferencia de circuito cerrado entre el flujo del proceso' y la temperatura de salida:

$$\frac{T_o(s)}{F(s)} = \frac{G_F(s)}{1 + H(s)\, G_s(s)\, G_v(s)\, G_c(s)} \qquad (6\text{-}8)$$

Finalmente, al hacer $T_i(s) = 0$ y $F(s) = 0$, y combinar de la ecuación (6-1) a la (6-5), se obtiene la función de transferencia de circuito cerrado entre el 'punto de control y la temperatura de salida:

$$\frac{T_o(s)}{T_o^{\text{set}}(s)} = \frac{G_s(s) G_v(s) G_c(s) K_{sp}}{1 + H(s)\, G_s(s)\, G_v(s)\, G_c(s)} \qquad (6\text{-}9)$$

Como se vio en el capitulo 3, el denominador es el mismo para las tres entradas, mientras que el numerador es diferente para cada entrada. Se recordara que el denominador es uno más el producto de las'funciones de transferencia de todos los bloques del circuito; mientras que el numerador de cada función de transferencia es el producto de los bloques que están sobre la trayectoria directa entre la entrada específica y la salida del circuito. Estos resultados se aplican a cualquier diagrama de bloques que contiene un solo circuito.

A fin de hacerlo más claro, se verifican las unidades del producto de los bloques en el circuito, como sigue:

$$H(s) \cdot G_s(s) \cdot G_v(s) \cdot G_c(s) = \text{sin dimensiones}$$

$$\left(\frac{\text{mA}}{\text{C}}\right) \cdot \left(\frac{\text{C}}{\text{kg/s}}\right) \cdot \left(\frac{\text{kg/s}}{\text{mA}}\right) \cdot \left(\frac{\text{mA}}{\text{mA}}\right)$$

Con esto se demuestra que, como debe ser, el producto de las funciones de transferencia de los bloques en el circuito no tiene dimensiones. También se puede comprobar que las unidades del numerador de cada una de las funciones de transferencia de circuito cerrado son las de la variable de salida entre las unidades de la variable de entrada correspondiente.

Ecuación característica del circuito

Como se vio en la exposición precedente, el denominador de la función de transferencia de circuito cerrado del circuito de control por retroalimentación es independiente de la ubicación de la entrada en el circuito y, por lo tanto: caracterfstida del circuito. Se recordará, del capítulo 2, que la respuesta sin forzamiento del circuito y su estabilidad dependen de los eigenvalores o raíces de la ecuación que se obtiene cuando el denominador de la función de transferencia del circuito se iguala a cero:

$$1 + H(s) G_s(s) G_v(s) G_c(s) = 0 \qquad (6\text{-}10)$$

Ésta es la *ecuación característica* del circuito; se observa que la función de transferencia del controlador constituye parte de la ecuación característica del circuito; a esto se debe que se pueda dar forma a la respuesta del circuito mediante el ajuste del controlador. Los otros elementos que forman parte dela ecuación característica son el sensor-transmisor, la válvula de control y aquella parte del proceso que afecta la respuesta de la variable controlada a la variable manipulada, es decir, G,(s): Por otro lado, las funciones de transferencia del proceso que. se relacionan con las perturbaciones [$G_T(s)$ y $G_F(s)$] no son parte de la ecuación característica.

Para demostrar que la ecuación característica determina la respuesta sin forzamiento del circuito, se deriva la respuesta. de circuito cerrado a un cambio en la temperatura de entrada, mediante la inversión de la transformada de Laplace de la señal de salida, de la manera en que se estudió en el. capítulo 2. Se. supone que la ecuación característica se puede reducir a un polinomio de grado n en la variable" de la transformada de Laplace, s:

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (6\text{-}11)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ son los coeficientes del polinomio. Con un programa de computadora adecuado (como el que se lista en el apéndice D) se pueden encontrar las n raíces de este polinomio y factorizar como sigue:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = a_n(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n) = 0 \qquad (6\text{-}12)$$

donde $r_1, r_2, \dots, r_n$ son los eigenvalores o raíces de la ecuación característica, las cuales pueden ser números reales o pares de complejos conjugados; algunas de ellas pueden estar repetidas, como se vio en el capítulo 2.

De la ecuación (6-7), se tiene

$$T_o(s) = \frac{G_T(s)}{1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s)} T_i(s) \qquad (6\text{-}13)$$

A continuación se substituye el denominador por la ecuación (6-12), y se súpone que los otros términos aparecen a causa de la función de forzamiento de entrada $T_i(s)$:

$$T_o(s) = \frac{(\text{términos del numerador})}{a_n(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)(\text{términos de entrada})} \qquad (6\text{-}14)$$

Entonces se puede expandir esta expresión en fracciones parciales:

$$T_o(s) = \frac{b_1}{s - r_1} + \frac{b_2}{s - r_2} + \dots + \frac{b_n}{s - r_n} + (\text{términos de entrada}) \qquad (6\text{-}15)$$

donde $b_1, b_2, \dots, b_n$ son los coeficientes constantes que se determinan con el método de expansión de fracciones parciales (ver capítulo 2). Al invertir esta expresión con la ayuda de la tabla de transformadas de Laplace (por ejemplo, la tabla 2-1) se obtiene

$$T_o(t) = \underbrace{b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \ldots + b_n e^{r_n t}}_{\text{Respuesta sin forzamiento}} + \underbrace{(\text{términos de entrada})}_{\text{Respuesta forzada}} \qquad (6\text{-}16)$$

Por tanto, se demostró que cada uno de los términos de la respuesta sin forzamiento contiene una raíz de la ecuación característica; se recordará que los coeficientes b_1, $b_2, \ldots, b_n$ dependen de la función de forzamiento de entrada real, del mismo modo que la respuesta exacta del circuito; sin embargo, la velocidad con que los términos de la respuesta sin forzamiento desaparecen ($r_1 < 0$), divergen ($r_1 > 0$) u oscilan (r_1 es compleja) se determina completamente por las raíces de la ecuación característica. Este concepto se utilizará en la siguiente sección para determinar la estabilidad del circuito.

Con los dos ejemplos siguientes se ilustra el efecto de un controlador puramente proporcional y de uno puramente integral sobre la respuesta de circuito cerrado de un proceso de primer orden; se verá que con el controlador puramente proporcional se acelera la respuesta de primer orden, lo que da por resultado una desviación o error de estado estacionario, como se estableció en el capítulo 5. Por otro lado, con el controlador integral se produce una respuesta de segundo orden que cambia de sobreamortiguada a subamortiguada conforme se incrementa la ganancia del controlador y, como se estableció en el capítulo 4, la respuesta subamortiguada es oscilatoria.

Ejemplo 6-1. Control proporcional de un proceso de primer orden. En la figura 6-4*a* se muestra el diagrama de bloques para un proceso simple; el proceso se puede representar mediante un retardo de primer orden:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Se debe determinar la función de transferencia de circuito cerrado y la respuesta a un cambio escalón unitario en el punto de control de un controlador proporcional:

$$G_c(s) = K_c$$

Solución. La función de transferencia de circuito cerrado se obtiene del álgebra para diagramas de bloques:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

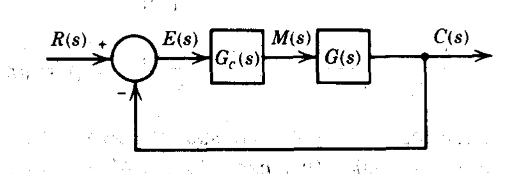


Figura 6-4*a*. Diagrama de bloques para el ejemplo 6-1.

Entonces se substituye la función de transferencia del proceso y se simplifica:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{\tau s + 1} G_c(s)}{1 + \dfrac{K}{\tau s + 1} G_c(s)}$$

$$= \frac{K G_c(s)}{1 + \tau s + K G_c(s)}$$

Para un controlador proporcional $G_c(s) = K_c$; al substituir, se tiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KK_c}{1 + KK_c + \tau s} = \frac{KK_c/(1 + KK_c)}{[\tau/(1 + KK_c)]s + 1} = \frac{K'}{\tau' s + 1}$$

Se ve fácilmente que la ganancia de estado estacionario

$$K' = KK_c/(1 + KK_c)$$

siempre es menor que la unidad; y que la constante de tiempo de circuito cerrado

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + KK_c}$$

siempre es menor que la constante de tiempo de circuito abierto τ; en otras palabras, el circuito siempre responde más rápido que el sistema original, pero no coincide completamente con el punto de control, en estado estacionario; es decir, hay una desviación. Para un cambio **escalón** unitario en el punto de control, de la tabla 2-1, se tiene

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Se substituye 'en la función de transfereneia **y** se expande por fracciones parciales para obtener

$$C(s) = \frac{K'}{\tau' s + 1} \frac{1}{s} = \frac{K'}{s} - \frac{K'\tau'}{\tau' s + 1}$$

Al invertir, resulta

$$c(t) = K'(1 - e^{-t/\tau'})$$

$$c(t) = \frac{KK_c}{1 + KK_c}[1 - e^{-(1+KK_c)t/\tau}]$$

Aquí se ve que, conforme $t \to \infty$, $c(t) \to KK_c/(1 + KK_c)$.

Puesto que el cambio en el punto de fijación es 1 .O (cambio en escalón unitario), el error se expresa mediante

$$e(f) = r(f) - c(t) = 1.0 - \frac{KK_c}{1 + KK_c}[1 - e^{-(1+KK_c)t/\tau}]$$

Conforme $t \rightarrow \infty$

$$e(t) \rightarrow 1 - \frac{KK_c}{1 + KK_c} = \frac{1}{1 + KK_c}$$

Por lo tanto, mientras más alta sea la ganancia del controlador, K_c, más se acerca la variable controlada al punto de control de estado estacionario, es decir, la desviación es menor. Con esto se comprueba lo que se estudió en el capítulo 5 y se ilustra en la figura **6-4*b***.

Ejemplo 6-2. Control puramente integral de un proceso de primer orden. Se debe determinar la función de transferencia de circuito cerrado y la respuesta a un cambio escalón unitario en el punto de control del proceso del ejemplo 6-1, con un controlador integral.

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s}$$

donde K_c es la ganancia del controlador en min^{-1}.

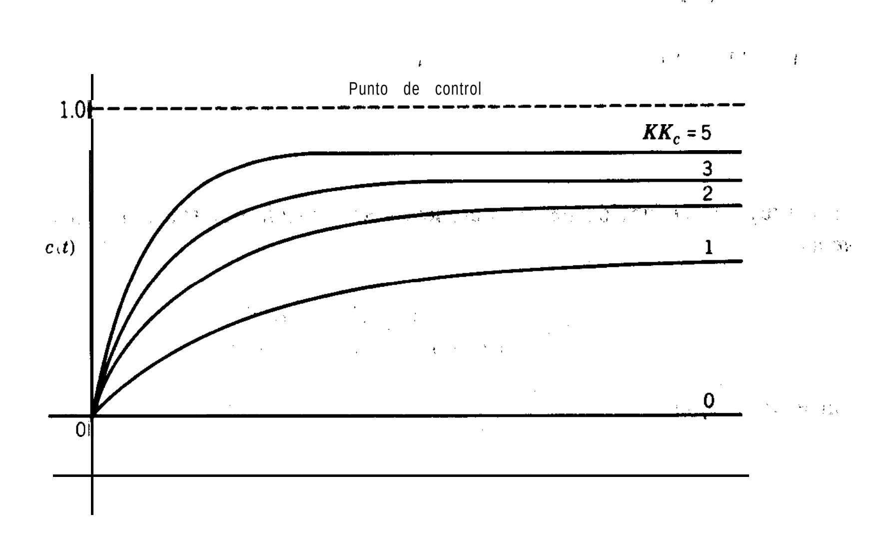


Figura 6-4*b*. Respuesta del circuito a un cambio escalón en el punto de control del controlador proporcional del ejemplo 6-1.

Solución. Se substituye la función de transferencia del controlador integracional en la función de transferencia de circuito cerrado del ejemplo 6-1:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KK_c/s}{1 + \tau s + KK_c/s} = \frac{KK_c}{\tau s^2 + s + KK_c}$$

Por extensión del teorema del valor final a las funciones de transferencia (ver sección **3-3**), se substituye $s = 0$, para obtener la ganancia de estado estacionario:

$$\lim_{s \to 0} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KK_c}{KK_c} = 1.0$$

Esto significa que, para el controlador integral, la variable controlada, siempre coincide con el punto de control de estado estacionario, es decir, no hay desviación.

La ecuación característica del circuito es:

$$\tau s^2 + s + KK_c = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4KK_c\tau}}{2\tau}$$

Estas raíces son reales para $0 \leq KK_c\tau \leq 1/4$, y complejas conjugadas para $KK_c\tau > 1/4$. A continuación se determina la respuesta del circuito a un cambio escalón unitario en el punto de fijación para varios valores de KK_c. De la tabla 2-1 se tiene que, para un cambio escalón unitario en el punto de control, $R(s) = 1/s$.

Al substituir en la función de transferencia, se tiene

$$C(s) = \frac{KK_c}{s(\tau s^2 + s + KK_c)}$$

Caso A.

Dos raíces reales y diferentes:

Sea

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4KK_c\tau}}{2\tau}$$

$$r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4KK_c\tau}}{2\tau}$$

Por expansión de fracciones parciales

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{KK_c}{\tau r_1(r_1 - r_2)} \frac{1}{s - r_1} + \frac{KK_c}{\tau r_2(r_2 - r_1)} \frac{1}{s - r_2}$$

Al invertir la transformada de **Laplace,** se tiene

$$c(r) = 1 + \frac{KK_c}{\tau r_1(r_1 - r_2)} e^{r_1 t} + \frac{KK_c}{\tau r_2(r_2 - r_1)} e^{r_2 t}$$

Puesto que tanto r_1 como r_2 son negativas para K_c positiva, en esta respuesta los términos exponenciales tienden a cero conforme el tiempo se incrementa $(t \to \infty)$, y entonces el valor de estado estacionario de c es 1 .O, o igual al punto de control. Este tipo de respuesta, que se conoce como "sobreamortiguada", se ilustra **en la** figura **6-5*a*.** Conforme la ganancia K_c del controlador se incrementa, la respuesta se vuelve **más rápida,** hasta que se torna "críticamente amortiguada" en $KK_c\tau = 1/4$; a continuación se considera este caso.

Caso B.

Raíces reales repetidas: $KK_c\tau = 1/4$

Entonces

$$r_1 = r_2 = -\frac{1}{27}$$

Se substituye $KK_c = 1/(4\tau)$ y se sigue el procedimiento de expansión de fracciones parciales para **raíces** repetidas (capítulo 2):

$$C(s) = \frac{1/(4\tau^2)}{s\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1/\tau}{\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)^2} - \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)}$$

Al invertir, con ayuda de una tabla de transformadas de **Laplace** (tabla **2-1),** resulta

$$c(t) = 1 - \left(\frac{1}{2}\frac{t}{\tau} + 1\right)e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Esta respuesta **críticamente** amortiguada se ilustra en la figura **6-5*a*.** Si la ganancia del controlador se incrementa aún **más,** se obtiene una respuesta "subamortiguada", que es el siguiente y último caso.

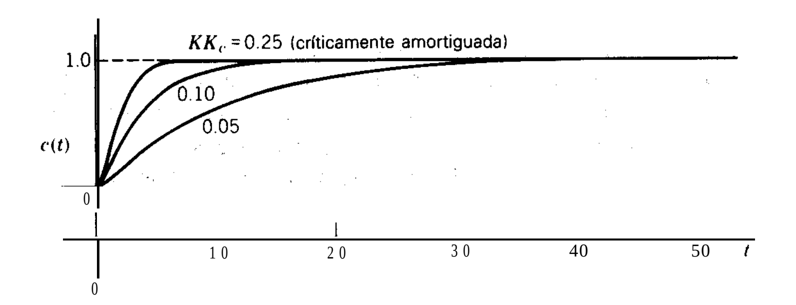


Figura 6-5*a*. Respuesta del circuito a un cambio escalón del punto de control en el controlador integral del ejemplo 6-2. Casos sobreamortiguado y críticamente amortiguado (τ = 1).

Caso C.

Raíces complejas **conjugadas: $KK_c\tau > 1/4$**

Sea

$$\omega = \frac{1}{2\tau}\sqrt{4KK_c\tau - 1}$$

Entonces

$$r_1 = -\frac{1}{2\tau} + i\omega$$

$$r_2 = -\frac{1}{2\tau} - i\omega$$

se sigue el procedimiento para raíces complejas (ver capítulo 2) y, con la expansión de fracciones parciales, se obtiene

$$C(s) = \frac{KK_c}{s(\tau s^2 + s + KK_c)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1/\tau}{\left[\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega^2\right]}$$

Al invertir, con ayuda de una tabla de transformadas de **Laplace (tabla 2-1)**, se tiene

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(\cos \omega t + \frac{1}{2\omega\tau} \operatorname{sen} \omega t\right)$$

De este último resultado se observa que, conforme se incrementa la ganancia KK_c del circuito, la respuesta oscila alrededor del punto de control (1 .O) con frecuencia creciente

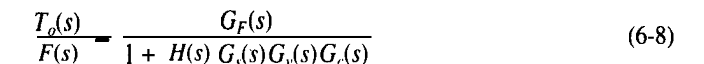
(w); sin embargo, la amplitud de estas oscilaciones siempre decae a cero, a causa del término exponencial $e^{-t/2\tau}$, lo cual se ilustra en la figura **6-5*b***.

En los ejemplos anteriores, el circuito de control que se muestra en la figura **6-4*a*** es un circuito por "retroalimentación unitaria", es decir, un circuito en el que no hay elementos en la trayectoria de retroalimentación; en esto se supone que las ganancias del transmisor se incluye en la función de transferencia del proceso $G(s)$ (también se incluye la ganancia de la válvula), de manera que se puede suponer que todas las señales son porcentajes o fracciones del rango.

En el ejemplo 6-2 se ilustra el punto que se trató en el capitulo 4, referente al hecho de que, a pesar de que la mayoría de los procesos son inherentemente sobreamortiguados, su respuesta puede ser subamortiguada cuando forma parte de un circuito cerrado de control por retroalimentación.

Respuesta de circuito cerrado en estado estacionario

En el ejemplo precedente se vio que el valor final o estado estacionario (o estático) es un aspecto importante de la respuesta de circuito cerrado, lo cual se debe a que, en la práctica del control de procesos industriales, la presencia del error de estado estacionario o ***desviación*** es generalmente inaceptable. En esta sección se estudiará la manera de calcular la desviación cuando está presente y, para hacerlo, se retorna el intercambiador de la figura 6-1, con el correspondiente diagrama de bloques de la figura 6-3, que, como se vio antes, es una representación linealizada del intercambiador de calor. El objetivo es obtener las relaciones de circuito en estado estacionario entre la variable de salida y cada una de las entradas al circuito, mediante la aplicación del teorema del valor final a la función de transferencia de circuito cerrado. En la ecuación (6-8) la función de transferencia de circuito cerrado entre la temperatura de salida y el flujo del fluido que se procesa se expresa mediante



$$\frac{T_o(s)}{F(s)} = \frac{G_F(s)}{1 + H(s)\,G_s(s)G_v(s)G_c(s)} \qquad (6\text{-}8)$$

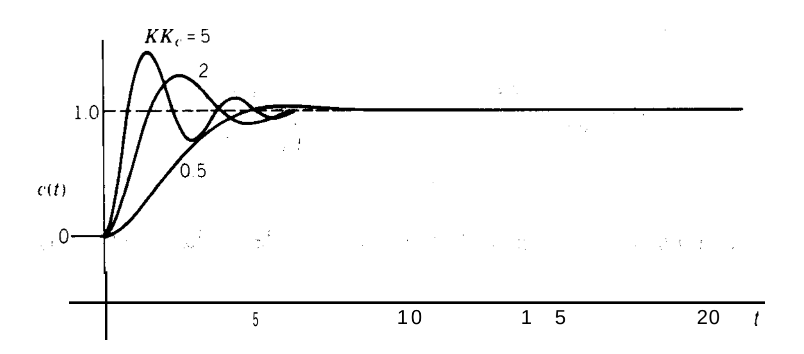


Figura 6-5*b*. Respuesta del circuito a un cambio escalón del punto. de control en el controlador integral del ejemplo 6-2. Caso subamortiguado (τ = 1).

Se recordará que, en esta expresión,, se supone que las variables de desviación para la temperatura de entrada T_i y el punto de **control** T_o^{fijo} son cero cuando estas entradas permanecen constantes. También, como se vio en la sección 3-3, la relación de estado estacionario entre la entrada y la salida, con una función de transferencia, se obtiene al hacer $s = 0$ en la función de transferencia, lo cual se deduce del teorema del valor final de las transformadas de **Laplace**. Al. aplicar este **método** a la ecuación **(2-8)**, se obtiene:

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta F_s} = \frac{G_F(0)}{1 + H(0)G_s(0)G_v(0)G_c(0)} \text{ C/(kg/s)} \qquad (6\text{-}17)$$

donde:

AT, es el cambio de estado estacionario en la temperatura 'de salida, C
ΔF_s es el cambio de estado estacionario en el flujo del fluido que se procesa, **kg/s**

Si se supone, como generalmente ocurre, que el proceso es estable, entonces:

$G_F(0) = K_F$ ganancia de circuito abierto para un cambio en el flujo del fluido que se procesa, C/(kg/s)
G,(O) = K_s ganancia del proceso a circuito abierto para un cambio en el flujo de vapor, C/(kg/s)

De manera similar, para la válvula y el sensor-transmisor:

G,(O) = K_v ganancia de la **válvula, kg/s/mA**
$H(0) = K_h$ ganancia del sensor-transmisor, **mA/C**

Finalmente, si el controlador no tiene acción integrativa:

G,(O) = K_c Ganancia proporcional, **mA/mA.**

Al substituir estos términos en la ecuación **(6-17)**, se obtiene

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta F_s} = \frac{K_F}{1 + K_h K_s K_v K_c} \text{ C/(kg/s)} \qquad (6\text{-}18)$$

Puesto que el **cambio** en el punto dé control és cero, el error de estado estacionario o **desviación** se expresa mediante.

$$e = \Delta T_O^{\text{fijo}} - \Delta T_O = -\Delta T_O \text{ C}$$

y, de la combinación de esta relación con la ecuación **(6-18)**, se tiene

$$\frac{e}{\Delta F_s} = \frac{-K_F}{1 + K_h K_s K_v K_c} \text{ C/(kg/s)} \qquad (6\text{-}19)$$

Se observa que la desviación se reduce conforme se incrementa la ganancia del controlador, K_c.

Para un controlador proporcional-integral-derivativo (PID)

$$G_c(0) = \lim_{s \to 0} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) = \infty$$

En este caso, mediante la substitución en la ecuación (6-17), se puede ver que la desviación para cualquier valor de K_c es cero; esto mismo es verdad para el controlador PI ($\tau_D = 0$).

Con la ecuación (6-7) se sigue un procedimiento idéntico para obtener la relación de estado estacionario de la temperatura de salida con la temperatura de entrada, para flujo constante y punto de control:

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{K_T}{1 + K_h K_s K_v K_c} \text{ C/C} \tag{6-20}$$

donde:

ΔT_i es el cambio de estado estacionario en la temperatura de entrada, C
$K_T = G_T(0)$ es la ganancia de circuito abierto en estado estacionario, para un cambio en la temperatura de entrada, C/C.

Finalmente, la relación de estado estacionario con un cambio en el punto de control a flujo constante del fluido que se procesa, así como temperatura de entrada constante, se obtiene, a partir de la ecuación (6-9):

$$\frac{\Delta T_O}{\Delta T_O^{\text{fijo}}} = \frac{K_s K_v K_c K_{sp}}{1 + K_h K_s K_v K_c} \text{ C/C} \tag{6-21}$$

donde ΔT_o^{fijo} es el cambio de estado estacionario en el punto de control, C. En este caso la desviación se expresa mediante (figura 6-3)

$$e = \Delta T_O^{\text{fijo}} - \Delta T_O C$$

Se recordará que, para que el punto de control y las mediciones estén en la misma escala, $K_{sp} = K_h$. De la combinación de estas relaciones con la ecuación (6-21), Se tiene

$$\frac{e}{\Delta T_O^{\text{fijo}}} = \frac{1}{1 + K_h K_s K_v K_c} \text{ C/C} \tag{6-22}$$

Nuevamente, mientras más grande es la ganancia del controlador, más pequeña es la desviación, y es cero para cualquier ganancia del controlador, si éste tiene acción integrativa.

Ejemplo 6-3. Para el intercambiador de calor de la figura 6-1 se deben calcular, en forma linealizada, las relaciones del error en estado estacionario de la temperatura de salida contra

a) Un cambio en el flujo del proceso
b) Un cambio en la temperatura de entrada
c) Un cambio en el punto de control

Las condiciones de operación y las especificaciones de los instrumentos son:

Caudal del fluido en proceso	$\bar{F} = 12$ kg/s
Temperatura de entrada	$\bar{T}_i = 50$ C
Punto de control	$\bar{T}_o^{fijo} = 90$ C
Capacidad calorífica del fluido	$C_p = 3750$ J/kg C
Calor latente del vapor	$\lambda = 2.25 \times 10^6$ J/kg
Capacidad de la válvula de vapor	$F_{smáx} = 1.6$ kg/s
Rango del transmisor	50 to 15oc

Solución. Si se supone que las pérdidas de calor son despreciables, se puede escribir el siguiente balance de energía de estado estacionario:

$$FC_p(T_o - T_i) = F_s\lambda$$

se despeja F_s, el flujo de vapor que se requiere para mantener T_o a 90°C con las condiciones de diseño es

$$F_s = \frac{FC_p(T_o - T_i)}{\lambda} = \frac{(12)(3750)(90 - 50)}{2.25 \times 10^6} = 0.80 \text{ kg/s}$$

El siguiente paso es calcular las ganancias de circuito abierto en estado estacionario para cada uno de los elementos del circuito.

Intercambiador

Se despeja T_o del balance de energía de estado estable

$$T_o = T_i + \frac{F_s\lambda}{FC_p}$$

Se linealiza, como se vio en el capítulo 2, para obtener

$$K_F = \frac{\partial T_o}{\partial F} = -\frac{\bar{F}_s \lambda}{\bar{F}^2 C_p}$$

$$= -\frac{(0.80)(2.25 \times 10^6)}{(12)^2(3750)} = -3.33 \text{ C/(kg/s)}$$

$$K_T = \frac{\partial T_o}{\partial T_i} = 1 \text{ C/C}$$

$$K_s = \frac{\partial T_o}{\partial F_s} = \frac{\lambda}{\bar{F} C_p} = \frac{2.25 \times 10^6}{(12)(3750)} = 50 \text{ C/(kg/s)}$$

Válvula de control

Si se supone que la válvula es lineal, con caída de presión constante y relación lineal entre la posición de válvula, *vp*, y la salida del controlador, *m*, se tiene

$$F_s = F_{s\text{máx}} vp = F_{s\text{máx}} \frac{m-4}{20-4}$$

Al linealizar, se obtiene

$$K_v = \frac{\partial F_s}{\partial m} = \frac{F_{s\text{máx}}}{16} = \frac{1.6}{16} = 0.10 \text{ (kg/s)/mA}$$

Sensor-transmisor

El transmisor se puede representar mediante la siguiente relación lineal:

$$T_{ot} = \frac{20-4}{150-50}(T_o - 50) + 4$$

Se linealiza para obtener

$$K_h = \frac{\partial T_{ot}}{\partial T_o} = \frac{16}{100} = 0.16 \text{ mA/C}$$

a) Al substituir en la ecuación **(6-18)**, resulta

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta F_s} = \frac{K_F}{1 + K_h K_s K_v K_c} = \frac{-3.33}{1 + (0.16)(50)(0.10)K_c}$$

$$= \frac{-3.33 \text{ C/(kg/s)}}{1 + 0.80 K_c}$$

b) De substituir en la ecuación (6-20), resulta

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{K_T}{1 + K_h K_s K_v K_c} = \frac{1.0}{1 + 0.80K_c} \text{ C/C}$$

c) Al substituir en la ecuación (6-21), resulta

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_o^{\text{fijo}}} = \frac{K_s K_v K_c K_{sp}}{1 + K_h K_s K_v K_c} = \frac{0.80K_c}{1 + 0.80K_c} \text{ C/C}$$

Los resultados para diferentes valores de K_c son:

$K_c \frac{\text{mA}}{\text{mA}}$	$\frac{\Delta T_o \text{ C}}{\Delta F_s \text{ kg/s}}$	$\frac{\Delta T_o \text{ C}}{\Delta T_i \text{ C}}$	$\frac{\Delta T_o \text{ C}}{\Delta T_o^{\text{fijo}} \text{ C}}$
0.5	-2.38	0.714	0.286
1.0	-1.85	0.556	0.444
5.0	-0.67	0.200	0.800
10.0	-0.37	0.111	0.889
20.0	-0.20	0.059	0.941
100.0	-0.04	0.012	0.988

Se observa que el cambio en la temperatura de entrada provocado por las perturbaciones se acerca a cero conforme la ganancia se incrementa, y que el cambio en la temperatura de salida, debido a un cambio en, el punto de control, se aproxima a la unidad.

Con los resultados del ejemplo precedente se ilustra la observación que se hizo en el capítulo 5, respecto al hecho de que la desviación decrece cuando se incrementa la ganancia del controlador proporcional y, como se indicó ahí, a la ganancia del controlador la limita la estabilidad del circuito. Esto se verá en la próxima sección.

Ejemplo 6-4. Control de temperatura para un tanque de calentamiento con agitación continua.

El tanque con agitación que se ilustra en la figura 6-6 se utiliza para calentar una corriente en proceso, de manera que se logre una composición uniforme de los componentes premezclados. El control de temperatura es importante, porque con, una alta temperatura se tiende a descomponer el producto, mientras que, con una temperatura baja, la mezcla resulta incompleta. El tanque se calienta mediante el vapor que se condensa en un serpentín; se utiliza un controlador proporcional-integral derivativo (PID) para controlar la temperatura en el tanque, mediante el manejo de la posición de la válvula de vapor. Se desea obtener el diagrama de bloques completo y la ecuación característica del circuito para los siguientes datos de diseño.

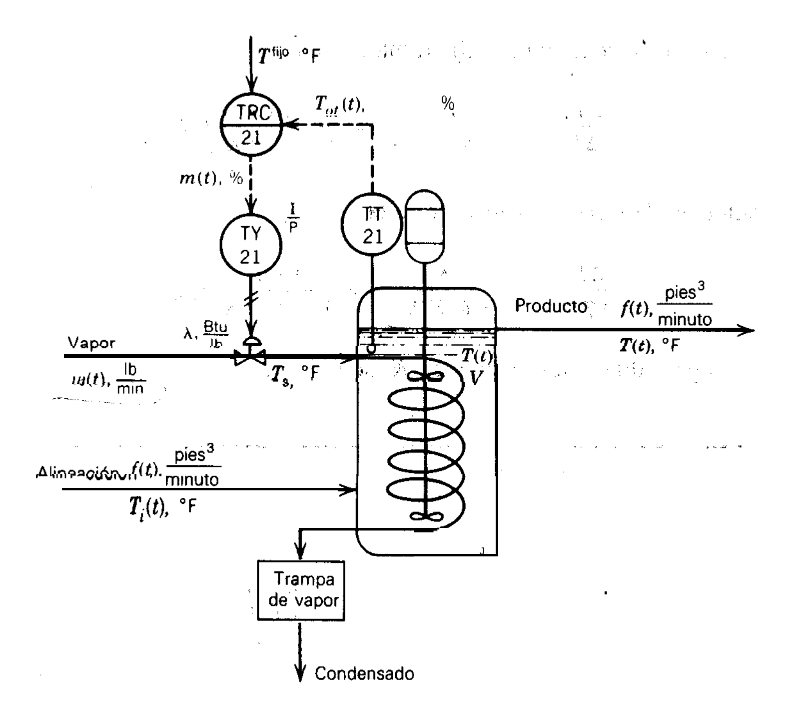


Figura 6-6. Control de temperatura para un tanque calentador con agitación continua.

Proceso

La densidad de la alimentación ρ es de **68.0 lb/pies³**, y la capacidad calorífica C_p, de **0.80 Btu/lb°F**. En el reactor se mantiene constante el volumen V de líquido a 120 pies³. El serpentín consta de 240 pies de tubo de acero de 4 pulgadas, calibre 40, con un peso de 10.8 lb/pie, capacidad calorifica de 0.12 Btu/lb°F y diámetro externo de 7.500 pulg; el, coeficiente total de transferencia de calor, U, se estima que es de 2.1 Btu/min pie²°F, con base en el área externa del serpentín. El vapor de que se dispone está saturado y a una presión de 30 psia; se puede suponer que el calor potencial de condensación λ es constante, con un valor de 966 Btu/lb.

Condiciones de diseño

En las condiciones de diseño, el flujo de alimentación f es de 15 pies³/min, a una temperatura T_i de 100°F. El contenido del tanque se debe mantener a una temperatura T de 150°F. Las posibles perturbaciones son cambios en la tasa de alimentación y en la temperatura.

Sensor y transmisor de temperatura

El sensor de temperatura se calibra para un rango de 100 a 200°F y una constante de tiempo τ_t de 0.75 min.

Válvula de control

La válvula de control se diseña con una sobrecapacidad del 100%, y las variaciones en la caída de presión se pueden despreciar. La válvula es de igual porcentaje, con un parámetro de ajuste de'iango 'dé 50; la constante de tiempo τ_v del actuador es de 0.20 min.

Solución. El método que se utiliza es obtener primeramente las ecuaciones con que se describe el comportamiento dinámico del tanque, la válvula de control, el sensor-transmisor y el controlador; entonces se linealizan y se obtiene su transformada de Laplace, para obtener el diagrama de bloques del circuito.

Proceso

Del balance de energía para el liquido en el tanque; si se supone que las pérdidas de calor sbn despreciables, la mezcla es perfecta y el volumen y las propiedades físicas son constantes, resulta la siguiente ecuación:

$$V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = f(t)\rho C_p T_i(t) + UA[T_s(t) - T(t)] - f(t)\rho C_p T(t)$$

1 ecuación, 2 incógnitas (T, T_s)

donde:

A es el área de transferencia de calor,: pies^2
$T_s(t)$ es la temperatura de condensación del vapor, °F

los otros símbolos se definieron en el planteamiento del problema. Para el líquido que contiene el tanque, el C_V, en términos de acumulación, se aproximó a C_p.

El balance de energía en el serpentín, si se supone que el metal del serpentfn está esencialmente a la misma temperatura que el vapor que se condensa, resulta

$$C_M \frac{dT_s(t)}{dt} = w(t)\lambda - UA[T_s(t) - T(t)]$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas (w)

donde:

w(t) es la tasa del vapor, lb/min
C_M es la capacidad calorífica'del metal del serpentín, Btu/°F

Puesto que la tasa de vapor es la salida de la válvula de control y una entrada al proceso, el modelo del proceso está completo.

Válvula de control

La ecuacióti para una válvula de porcentaje igual con presión de entrada y caída' de presión constantes, se puede escribir como'

$$w(t) = W_{máx}\alpha^{vp(t)-1} \qquad \text{3 ecuaciones, 4 incógnitas } (vp)$$

donde:

$W_{máx}$ es el flujo máximo a través de la válvula, lb/min
α es el parámetro de ajuste en rango de porcentaje igual
vp(t) es la posición de la válvula en una escala de 0 a 1

La variación en la caída de presión a través de la válvula, a la temperatura de condensación del vapor (y presión), se despreció en este ejemplo simple. El actuador de la válvula se puede modelar mediante un retardo de primer orden:.

$$VP(s) = \frac{1/100}{\tau_v s + 1}M(s) \qquad \text{4 ecuaciones, 5 incógnitas } (M)$$

donde $M(s)$ es la señal de salida del controlador en porcentaje.

Sensor-transmisor (7721)

El sensor-transmisor se puede representar mediante un retardo de primer arden:

$$\frac{T_{ot}(s)}{T(s)} = \frac{K_t}{\tau_t s + 1} \qquad \text{5 ecuaciones, 6 incógnitas } (T_{ot})$$

donde:

$T_{ot}(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de salida del transmisor, %.

Controlador con retroalimentación (TRC21)

La función de transferencia del controlador PID es

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) = \frac{M(s)}{R(s) - T_{ot}(s)}$$

6 ecuaciones, 6 incógnitas

donde K_c es la ganancia del controlador, τ_I el tiempo de integración y τ_D el tiempo de derivación.

Con esto se completa la obtención de la ecuación para el circuito de control de temperatura. El siguiente paso es linealizar las ecuaciones del modelo y sus transformadas de Laplace para obtener el diagrama de bloques del circuito.

Linealización y transformadas de Luplace

Mediante los métodos que se aprendieron en la sección 2-3, se obtienen las ecuaciones del modelo del tanque en forma lineal y en términos de las variables de desviación

$$V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = \bar{f}\rho C_p T_i(t) + \rho C_p(\bar{T}_i - \bar{T})F(t) + UAT_s(t) - (UA + \bar{f}\rho C_p)T(t)$$

$$C_M \frac{dT_s(t)}{dt} = \lambda W(t) - UAT_s(t) + UAT(t)$$

donde $T(t)$, $T_s(t)$, $F(t)$, $T_i(t)$ y $W(t)$ son las variables de desviación.

Se obtiene la transformada de Laplace de estas ecuaciones y se reordena, como se vio en el capítulo 2, para tener

$$T(s) = \frac{K_F}{\tau s + 1}F(s) + \frac{K_i}{\tau s + 1}T_i(s) + \frac{K_s}{\tau s + 1}T_s(s)$$

$$T_s(s) = \frac{1}{\tau_c s + 1}T(s) + \frac{K_W}{\tau_c s + 1}W(s)$$

donde:

$$\tau = \frac{V\rho C_p}{UA + \bar{f}\rho C_p} \qquad \tau_c = \frac{C_M}{UA}$$

$$K_F = \frac{\rho C_p(\bar{T}_i - \bar{T})}{UA + \bar{f}\rho C_p} \qquad K_i = \frac{\bar{f}\rho C_p}{UA + \bar{f}\rho C_p}$$

$$K_s = \frac{UA}{UA + \bar{f}\rho C_p} \qquad K_W = \frac{\lambda}{UA}$$

De linealizar la ecuación de la válvula, resulta

$$W(t) = W_{máx}(\ln \alpha)\alpha^{\overline{vp}-1}VP(t)$$
$$= \overline{W}(\ln \alpha)VP(t)$$

donde $VP(t)$ es **la variable de desviación** de la posición de la válvula.

De la transformada de **Laplace** de esta ecuación, se tiene

$$W(s) = \overline{W}(\ln \alpha)\, VP(s)$$

Al combinar esta ecuación con la función de transferencia del **actuador, se** puede eliminar $VP(s)$:

$$\frac{W(s)}{M(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}$$

donde:

$$K_v = \frac{\overline{W}(\ln \alpha)}{100}$$

A partir de lo que se aprendió en el capítulo 5, se puede determinar que la ganancia del transmisor es

$$K_t = \frac{100 - 0}{200 - 100} = 1.0\ \%/°F$$

En la figura **6-7*a*** aparece el diagrama de bloques completo del circuito; todas las funciones de transferencia del diagrama se obtuvieron 'arriba.

Se utilizan las reglas para manejo de diagramas de bloques que se aprendieron en el capitulo 3 para simplificar el **diagrama** a la forma **que** aparece en la figura 6-76. Las funciones de transferencia que aparecen en el diagrama son

$$G_F(s) = \frac{K_F(\tau_c s + 1)}{(\tau s + 1)(\tau_c s + 1) - K_s}$$

$$G_i(s) = \frac{K_i(\tau_c s + 1)}{(\tau s + 1)(\tau_c s + 1) - K_s}$$

$$G_s(s) = \frac{K_W K_s}{(\tau s + 1)(\tau_c s + 1) - K_s}$$

Las funciones de transferencia de circuito cerrado para cada una de las entradas son

$$\frac{T(s)}{T^{fijo}(s)} = \frac{K_{sp}G_c(s)G_v(s)G_s(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_s(s)}$$

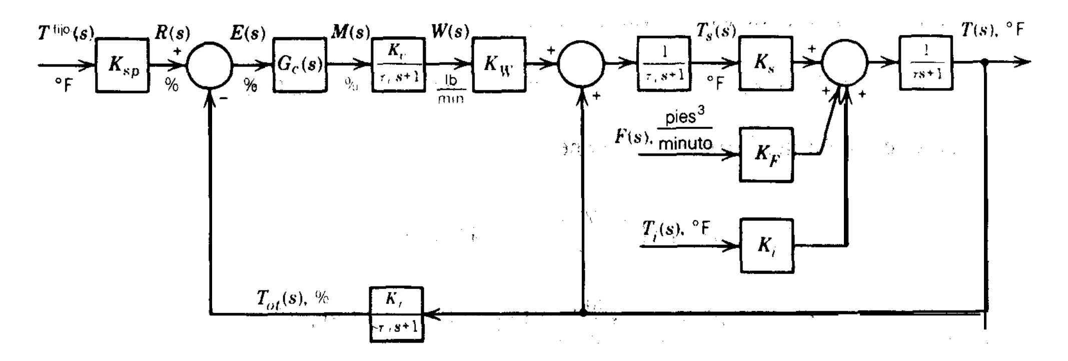


Figura **6-7a. Diagrama** de bloques del circuito de control de temperatura.

$$\frac{T(s)}{F(s)} = \frac{G_F(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_s(s)}$$

$$\frac{T(s)}{T_i(s)} = \frac{G_i(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_s(s)}$$

donde:

$$G_v(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}$$

$$H(s) = \frac{K_t}{\tau_t s + 1}$$

La **ecuación** característica **del** circuito es

$$1 + \frac{K_t}{\tau_t s + 1} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \frac{K_v}{\tau_v s + 1} \frac{K_W K_s}{(\tau_s s + 1)(\tau s + 1) - K_s} = 0$$

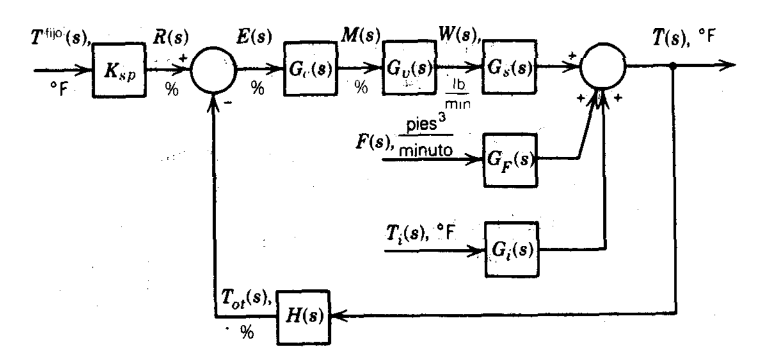


Figura **6-7b. Digrama** de bloques simplificado del circuito de control de temperatura.

A continuación se obtienen los valores numéricos:

$$K_{sp} = K_t = 1.0\%/°F \qquad \tau_t = 0.75 \text{ min} \qquad \tau_v = 0.20 \text{ min}$$

De la descripción del serpentín, se tiene

$$A = (205 \text{ ft})\pi\left(\frac{4.500}{12}\text{ ft}\right) = 241.5 \text{ pies}^2$$

$$C_M = (205 \text{ ft})\left(10.8\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}}\right)\left(0.12\ \frac{\text{Btu}}{\text{lb°F}}\right) = 265.7 \text{ Btu/°F}$$

$$\tau = \frac{(120)(68.0)(0.80)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.80)} = 4.93 \text{ min}$$

$$\tau_c = \frac{265.7}{(2.1)(241.5)} = 0.524 \text{ min}$$

$$K_F = \frac{(68)(0.80)(100 - 150)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.80)} = -2.06°\text{F/(pies}^3\text{/min)}$$

$$K_i = \frac{(15)(68)(0.80)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.80)} = 0.617°\text{F/°F}$$

$$K_s = \frac{(2.1)(241.5)}{(2.1)(241.5) + (15)(68)(0.80)} = 0.383°\text{F/°F}$$

$$K_W = \frac{966}{(2.1)(241.5)} = 1.905°\text{F/(lb/min)}$$

Para dimensionar la válvula de control se aprovecha el hecho de que las condiciones de diseño son, en estado estacionario:

$$\bar{f}\rho C_p \bar{T}_i + UA(\bar{T}_s - \bar{T}) - \bar{f}\rho C_p \bar{T} = 0$$

$$\bar{W}\lambda - UA(\bar{T}_s - \bar{T}) = 0$$

$$\bar{T}_s = \frac{(15)(68)(0.80)(150 - 100)}{(2.1)(241.5)} + 150 = 230°\text{F}$$

$$\bar{W} = \frac{(2.1)(241.5)(230 - 150)}{966} = 42.2 \text{ lb/min}$$

$$K_v = \frac{(42.2)(\ln 50)}{100} = 1.652 \text{ lbm/min-\%}$$

Y

$$W_{máx} = 2\bar{W} = 84.4 \text{ lb/min}$$

con estos números la ecuación característica es

$$s(0.75s + 1)(0.20s + 1)[(4.93s + 1)(0.524s + 1) - 0.383] + (1.0)K_c\left(s + \frac{1}{\tau_I} + \tau_D s^2\right)(1.652)(1.905)(0.383) = 0$$

$$0.387s^5 + 3.272s^4 + 7.859s^3 + (6.043 + 1.205K_c\tau_D)s^2 + (0.617 + 1.205K_c)s + 1.205K_c/\tau_I = 0$$

En este ejemplo se muestra la manera en que se pueden utilizar los principios básicos de la ingeniería de proceso para analizar circuitos simples de control por retroalimentación. A partir de la ecuación característica se puede estudiar la estabilidad del circuito y, con base en las funciones de transferencia de circuito cerrado es posible calcular la respuesta del circuito cerrado a varias funciones de forzamiento de entrada, para diferentes valores de los parámetros de ajuste del controlador K_c, τ_I y τ_D.

6-2. ESTABILIDAD DEL CIRCUITO DE CONTROL

Como se definió en el capítulo 2, un sistema es estable si su salida permanece limitada para una entrada limitada. La mayoría de los procesos industriales son estables a circuito abierto, es decir, son estables cuando no forman parte de un circuito de control por retroalimentación; esto equivale. a decir que la mayoría de los procesos son autorregulables, o sea,, la salida se mueve de un estado estable a otro, debido a los cambios en las señales de entrada. Un ejemplo típica de proceso inestable a circuito abierto es el tanque exotérmico de reacción con agitación, en el cual algunas veces existe un punto de. operación inestable en el que, al incrementar la temperatura, se produce un incremento en la tasa de reacción, con el consecuente incremento en la tasa de liberación de calor, lo cual, a su vez, ocasiona un mayor incremento en la temperatura.

Aun para los procesos estables a circuito abierto, la estabilidad vuelve a ser considerable cuando el proceso forma parte de un circuito de control por retroalimentación, debido a que las variaciones en las señales se refuerzan unas a otras conforme viajan sobre el circuito, y ocasionan que la salida —y todas las otras señalep en el circuito: se vuelvan ilimitadas. Como se observó en el capítulo 1, el comportamiento del circuito de control por retroalimentación es esencialmente oscilatorio, es decir, de ensayo y error. En algunas circunstancias, las oscilaciones se pueden incrementar en magnitud, de lo cual resultaun proceso inestable: La ilustración más sencilla de un circuito de retroalimentación inestable es el controlador cuya dirección de acción es opuesta a la, que debería ser; por ejemplo, en el intercambiador de calor que se esbozó en la sección precedente,. si la salida del controlador se incrementara al aumentar la temperatura (controlador de. acción directa), el circuito es inestable, porque al abrir la válvula de vapor se provoca un mayor incremento en la temperatura.. En este caso, lo que se necesita es un controlador de acción inversa cuya salida se decremente cuando la temperatura se incremente, de, manera que se cierre la válvula de vapor y baje la temperatura. Sin embargo, aun con el controlador

de acción adecuada, el sistema se puede volver inestable, debido a los retardos en el circuito, lo cual ocurre generalmente cuando se incrementa la ganancia del circuito. En consecuencia, la ganancia del controlador a la que el circuito alcanza el umbral de inestabilidad es de gran importancia en el diseño de un circuito de control con retroalimentación. Esta ganancia máxima se conoce como *ganancia última.*

En esta sección se determina el criterio de estabilidad para sistemas dinámicos y se exponen dos métodos para calcular la ganancia última: la- prueba de Routh y la substitución directa; por lo tanto, aquí se estudiad el efecto de los diferentes parámetros del circuito sobre su estabilidad.

Criterio de estabilidad

Con anterioridad, se vio que la respuesta de un circuito de control a una cierta entrada se puede representar [ecuación (6-16)] mediante

$$c(t) = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \ldots + b_n e^{r_n t} + (\text{términos de entrada}) \quad (6\text{-}23)$$

donde:

$c(t)$ es la salida del circuito o variable controlada
$r_1, r_2, \ldots, r_n$ son los eigenvalores o raíces de la ecuación característica del circuito

Si se supone que 16s términos de entrada permanecen limitados conforme se incrementa el tiempo, la estabilidad del circuito requiere que -también los términos de la respuesta sin forzamiento permanezcan limitados conforme, se incrementa el tiempo; esto depende únicamente de las raíces de la ecuación característica, y se puede expresar como sigue:

Para raíces reales: Si $r < 0$, entonces $e^{rt} \to 0$ conforme $t \to \infty$
Para raíces complejas: $r = \sigma + i\omega$ $e^{rt} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$
Si $\sigma < 0$, entonces $e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \to 0$ conforme $t \to \infty$

En otras palabras, la parte real de las raíces complejas, así como las raíces reales, deben ser ‘negativas para que los términos correspondientes de la respuesta tiendan a cero. A este resultado no lo afectan las raíces repetidas, ya qué únicamente se introduce un polinomio de’tiempo en la solución (ver capítulo 2), -que no suprime el efecto del término exponencial de decaimiento. Es de notar que, si cualquier raíz de la ecuación característica es un número real y positivo o un número complejo con parte real positivá, en la respuesta [ecuación (6-23)] ese término no estará limitado y la respuesta completa será ilimitada, aun cuando los demás términos tiendan a cero; esto lleva al siguiente enunciado del criterio de estabilidad para un circuito de control:

> Para que el circuito de control con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos ‘con partes reales negativas.

Si ahora se define el plano complejo *s* como una gráfica de dos dimensiones, con el eje horizontal para la parte real de las raíces y el vertical para la parte imaginaria, se puede hacer el siguiente enunciado gráfico del criterio de estabilidad (ver figura 6-8):

> Para que el circuito de control con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben caer en la mitad izquierda del plano s, que también se conoce como "plano izquierdo".

Cabe hacer notar que ambos enunciados del criterio de estabilidad en el dominio de Laplace se aplican en general a cualquier, sistema físico, y no solamente a circuitos de control con retroalimentación. En cada caso la ecuación característica se obtiene por igualación a cero del denominador de la forma lineal de la función de transferencia del sistema.

Una vez que se enunció el criterio de estabilidad se puede volver la atención a la determinación de la estabilidad de un circuito de control.

Prueba de Routh

La prueba de Routh es un procedimiento para determinar el número de raíces de un polinomio con parte real positiva sin necesidad de encontrar realmente las raíces por métodos iterativos. puesto que para que un sistema sea estable se requiere que ninguna de las raíces de su ecuación característica tenga parte real positiva, la prueba de Routh es bastante útil para determinar la estabilidad.

Con la disponibilidad que se tiene actualmente de programas de computadora y calculadora para encontrar las raíces de los polinomios, la prueba de Routh no sería útil si el problema fuera exclusivamente encontrar si un circuito de retroalimentación es estable o no, una vez que se especifican todos los parámetros del circuito; sin embargo, el problema más importante es determinar los límites de un parámetro específico del circuito

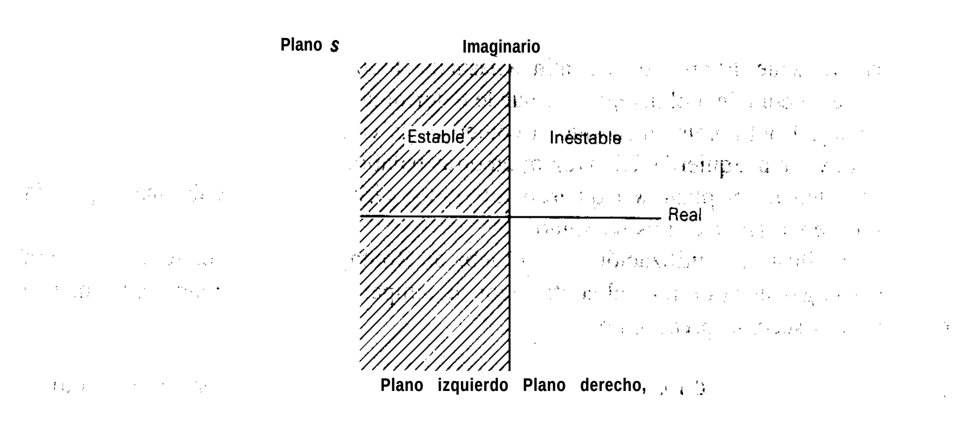


Figura 6-8. **Plano *s* en el** que se **ilustran** las **regiones de estabilidad e** inestabilidad, según la ubicación de las raíces de la ecuación característica.

-generalmente la ganancia del controlador— dentro de los cuales el circuito es estable, y la prueba de Routh es de lo más útil para resolver dicho problema.

La mecánica de la prueba de Routh se puede presentar como sigue: dado un polinomio de grado n,

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad \text{(6-24)}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son los coeficientes del polinomio; se debe determinar cuántas raíces tienen parte real positiva:

Para realizar la prueba, primero se debe preparar el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{fila } 1 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 & 0 \\
\text{fila } 2 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 & 0 \\
\text{fila } 3 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\text{fila } 4 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\text{fila } n & d_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\text{fila } n+1 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

en el cual, los datos de la fila 3 a la $n + 1$ se calculan mediante

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad \text{etc.}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \qquad \text{etc.}$$

y así, sucesivamente. El proceso se continúa hasta que todos los términos nuevos sean cero. Una vez que se completa el arreglo, se puede determinar el número de raíces con parte real positiva del polinomio, mediante el conteo de la cantidad de *cambios de signo* en la columna extrema izquierda del arreglo; en otras palabras, para que todas las raíces del polinomio estén en el plano s izquierdo, todos los términos en la columna izquierda del arreglo deben tener el mismo signo.

Al fin de ilustrar la utilización de la prueba de Routh, se aplica a continuación para determinar la ganancia última del controlador de temperatura del intercambiador que se presentó en la sección precedente.

Ejemplo 6-5. Determinación de la ganancia última de un controlador de temperatura mediante la prueba de Routh.

Se supone que las funciones de transferencia de los diferentes elementos del circuito de control de temperatura de la figura 6-3 son como sigue:

Intercambiador

La respuesta del intercambiador al flujo de vapor tiene una ganancia de 50°C/(kg/s) y una constante de tiempo de 30 s:

$$G_s(s) = \frac{50}{30s + 1} \text{ C/(kg/s)}$$

Sensor-transmisor

El sensor-transmisor tiene una escala calibrada de 50 a 150°C y una constante de tiempo de 10 s.

$$\text{ganancia} = \frac{100\%}{(150 - 50)\text{C}} = 1.0 \text{ \%/C}$$

$$H(s) = \frac{1.0}{10s + 1} \text{ \%/C}$$

Nota: en éste y otros ejemplos se utiliza el "porcentaje de rango" (%) como unidades de las señales del transmisor y el controlador. Para señales electrónicas 100% = 16 mA, y para señales neumáticas, 100% = 12 psi.

Válvula de control

La válvula de control tiene una capacidad máxima de 1.6 kg/s de vapor, características lineales y constantes de tiempo de 3 s.

$$\text{ganancia} = \frac{1.6 \text{ (kg/s)}}{100\%} = 0.016 \text{ (kg/s)/\%}$$

$$G_v(s) = \frac{0.016}{3s + 1} \text{ (kg/s)/\%}$$

(se supone que la caída de presión a través de la válvula es constante.)

Controlador

El controlador es proporcional.

$$G_c(s) = K_c \text{ \%/\%}$$

Entonces, el problema es determinar la ganancia última del controlador, es decir, el valor de K_c al cual el circuito se vuelve marginalmente estable.

Solución. La ecuación característica se obtiene de la ecuación (6-10):

$$1 + H(s)G_s(s)G_v(s)G_c(s) = 0$$

o

$$1 + \frac{1}{10s+1}\cdot\frac{50}{30s+1}\cdot\frac{0.016}{3s+1}\cdot K_c = 0$$

Ahora se debe reordenar la ecuación en forma polinómica:

$$(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1) + 0.80K_c = 0$$
$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 0.80K_c = 0$$

El siguiente paso es preparar el arreglo de Routh:

fila 1	900	43	0
tila 2	420	$1 + 0.80K_c$	0
tila 3	b_1	0	0
fila 4	$1 + 0.80K_c$	0	0

donde:

$$b = \frac{(420)(43) - 900(1 + 0.80K_c)}{420} = \frac{17160 - 720K_c}{420}$$

Para que el circuito de control sea estable, todos los términos de la columna izquierda deben tener el mismo signo, positivo en este-caso, y para esto se requiere que

$$b_1 \geqq 0 \quad o \quad 17160 - 720K_c \geqq 0 \quad K_c \leqq 23.8$$
$$1 + 0.80K_c \geqq 0 \quad o \quad 0.80K_c \geqq -1 \quad K_c \geqq -1.25$$

En este caso, el límite inferior de K_c es negativo, pero no tiene importancia, puesto que una ganancia negativa indica que la acción del controlador no es la correcta (se abre la válvula de vapor al incrementarse la temperatura). El límite superior de la ganancia del controlador es la ganancia última que se busca:

$$K_{cu} = 23.8 \ \%/\%$$

Esto indica que, al ajustar el controlador proporcional para este circuito, la ganancia no debe exceder de 23.8 ni reducirse la banda proporcional por debajo de 100/23.8 = 4.2 %.

En la sección precedente se vio que la desviación o error de estado estacionario inherente a los controladores proporcionales se puede reducir mediante el incremento de la

ganancia del controlador; aquí se ve que la estabilidad impone un límite a la magnitud de la ganancia. Es de interés estudiar la manera en que afectan a la ganancia los otros parámetros del circuito.

Efecto de los parámetros del circuito sobre la ganancia última

Si se supone que la escala de calibración del sensor-transmisor de temperatura se reduce a 75-125°C, entonces la nueva ganancia y función de transferencia del transmisor es

$$\text{ganancia} = \frac{100\%}{(125 - 75)\text{C}} = 2.0\ \%/\text{C}$$

$$H(s) = \frac{2.0}{10s + 1}\ \%/\text{C}$$

Si se repite la prueba de Routb con esta nueva ganancia, se obtiene una ganancia última de

$$K_{cu} = 11.9\ \%/\%\ (\text{PB} = 8.4\%)$$

Ésta es exactamente la mitad de la ganancia última original, con lo que se demuestra que la ganancia última del circuito permanece igual. La ganancia del circuito se define como el producto de las ganancias de todos los bloques del circuito:

$$K_L = K_h K_s K_v K_c \tag{6-25}$$

donde:

K_L = ganancia del circuito (sin dimensiones)
K_h = ganancia del sensor transmisor, %/C
K_s = ganancia del proceso, C/(kg/s)
K_v = ganancia de la válvula de control, (kg/s)/%
K_c = ganancia del controlador,. %/ %

Para los dos casos considerados hasta el momento, las ganancias últimas de circuito son

$$K_{Lu} = (1.0)(50)(0.016)(23.8) = 19.04$$

$$K_{Lu} = (2.0)(50)(0.016)(11.9) = 19.04$$

De manera semejante, si se duplica el tamaño de la válvula de control y, por tanto, su ganancia, la ganancia última del controlador se reduce a la mitad de su valor original.

A continuación se supone que se instala un sensor-transmisor más rápido, con una constante de tiempo de 5 s para reemplazar al instrumento de 10 s; la nueva función de transferencia se expresa mediante

$$H(s) = \frac{1.0}{5s + 1} \; \%/\text{C}$$

Se repite la prueba de Routh con esta nueva función de transferencia:

$$1 + \frac{1.0}{5s + 1} \cdot \frac{50}{30s + 1} \cdot \frac{0.016}{3s + 1} \cdot K_c = 0$$

$$450s^3 + 255s^2 + 38s + 1 + 0.80K_c = 0$$

fila 1	450	38	0
fila 2	255	$1 + 0.80K_c$	0
fila 3	b_1	0	0
fila 4	$1 + 0.80K_c$	0	0

donde:

$$b = \frac{(255)(38) - (450)(1 + 0.80K_c)}{255} = \frac{9240 - 360K_c}{255}$$

Y la ganancia última del controlador es

$$K_{cu} = \frac{9240}{360} = 25.1 \; \%/\%$$

La reducción en la constante de tiempo del sensor da como resultado un ligero incremento en la ganancia última, debido a que se reduce el retardo de medición en el circuito de control. Si se reduce la constante de tiempo de la válvula de control, se obtiene un resultado similar, sin embargo, el incremento en la ganancia última es aún menor; porque la válvula no es tan lenta como el sensor-transmisor; queda al lector la verificación de esto.

Finalmente, se considera el caso donde un cambio en el diseño del intercambiador da como resultado una constante de tiempo del proceso más corta; a saber,. de 30 a 20 s. La nueva función de transferencia es

$$G_s(s) = \frac{50}{20s + 1} \; \text{C/(kg/s)}$$

Nuevamente se repite el procedimiento de la prueba de Routh:

$$1 + \frac{1.0}{10s + 1} \cdot \frac{50}{20s + 1} \cdot \frac{0.016}{3s + 1} \cdot K_c = 0$$

$$600s^3 + 290s^2 + 33s + 1 + 0.80K_c = 0$$

fila 1	600	33	0
fila 2	290	$1 + 0.80K_c$	0
fila 3	b_1	0	0
fila 4	$1 + 0.80K_c$	0	0

donde:

$$b_1 = \frac{(290)(33) - 600(1 + 0.80K_c)}{290} = \frac{8970 - 480K_c}{290}$$

Entonces la ganancia última es:

$$K_{cu} = \frac{8970}{480} = 18.7\ \%/\%$$

Curiosamente, la ganancia última se reduce con una disminución en la constante de tiempo del proceso, lo cual es contrario al efecto que se obtiene al reducir la constante de tiempo del sensor-transmisor; esto se debe a que, cuando se reduce la constante de tiempo más larga o dominante, el efecto relativo de los otros retardos del circuito se vuelve más pronunciado. En otras palabras, en términos de la ganancia última, reducir la constante de tiempo más larga equivale a incrementar proporcionalmente las otras constantes de tiempo del circuito. Lo que no se puede demostrar mediante la prueba de Routh es que el circuito con la constante de tiempo más corta responde más rápido que el original, pero se puede demostrar mediante el método de substitución directa.

Método de substitución directa

El método de substitución directa se basa en el hecho de que las raíces de la ecuación característica varían continuamente con los parámetros del circuito; el punto en que el circuito se vuelve inestable, al menos una, y generalmente dos, de las raíces se encuentra en el eje imaginario del plano complejo, es decir, deben existir raíces puramente imaginarias. Otra manera de ver esto es que, para que las raíces se muevan del plano izquierdo al derecho, deben cruzar el eje imaginario; en este punto se dice que el circuito es "marginalmente estable" y el término correspondiente de la salida del circuito en el dominio de Laplace es

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + \omega_u^2} + \text{(otros términos)} \qquad (6\text{-}26)$$

o, al invertir este término con la tabla 2-1, se ve que es una onda senoidal en el dominio del tiempo:

$$c(t) = b_1' \sin(\omega_u T + \theta) + \text{(otros términos)} \qquad (6\text{-}27)$$

donde:

ω_u = frecuencia de la onda senoidal
θ = ángulo de fase de la onda senoidal
b_1' = amplitud de la onda senoidal (constante)

Esto significa que, en el punto de estabilidad marginal, la ecuación característica debe tener un par de raíces puramente imaginarias

$$r_{1,2} = \pm i\omega_u$$

La frecuencia ω_u con que oscila el circuito es la *frecuencia última.* Justo antes de alcanzar el punto de inestabilidad marginal, el sistema oscila con una amplitud que tiende a decaer, mientras que **después** de ese punto la amplitud de la oscilación se incrementa con el tiempo. En el punto de estabilidad marginal, la amplitud de la oscilación permanece constante en el tiempo. Esto se ilustra en la figura 6-9, donde la relación entre el período último, T_u, y la frecuencia última, ω_u, en **rad/s** se expresa mediante

$$\omega_u = \frac{2\pi}{T_u} \tag{6-28}$$

El método de la substitución directa consiste en substituir $s = i\omega_u$ en la ecuación característica, de donde resulta una ecuación compleja que se puede convertir en dos ecuaciones simultáneas:

Parte real = 0
Parte imaginaria = 0

A partir de esto se pueden resolver dos incógnitas: una es la frecuencia última ω_u, la otra es cualquier parámetro del circuito, generalmente la ganancia última. A continuación se ilustra esto mediante el tratamiento del ejemplo de control de temperatura con el método de substitución directa.

Ejemplo 6-6. Se debe determinar la ganancia y frecuencia últimas **para** el controlador de temperatura del ejemplo 6-5, mediante el **método** de substitución directa.

Solución. Del ejemplo 6-5 se toma la ecuación característica para el caso básico, en forma de polinomio:

$$900s^3 + 420s^2 + 43s + 1 + 0.80K_c = 0$$

Ahora se substituye $s = i\omega_u$ at $K_c = K_{cu}$:

$$900i^3\omega_u^3 + 420i^2\omega_u^2 + 43i\omega_u + 1 + 0.80K_{cu} = 0$$

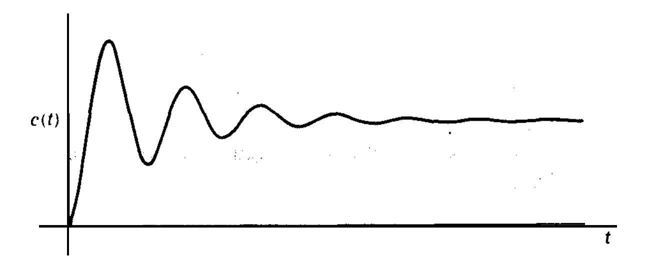


Figura 6-9*a*. Respuesta de un sistema estable.

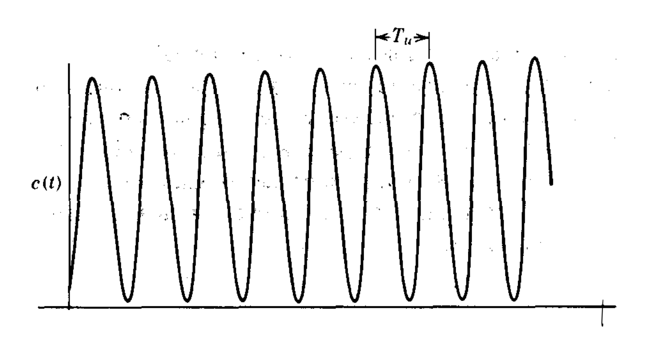


Figura 6-9*b*. Respuesta de un sistema marginalmente estable con período último T_u.

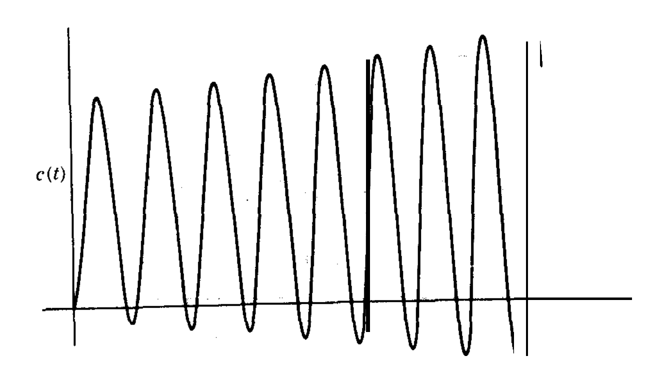


Figura 6-9*c*. Respuesta de un sistema inestable.

Entonces se substituye i^2 = -1 y se separan la parte real e imaginaria:

$$(-420\omega_u^2 + 1 + 0.80K_{cu}) + i(-900\omega_u^3 + 43\omega_u) = 0 + i0$$

De esta ecuación compleja se obtienen las dos siguientes, puesto que tanto la parte real como la imaginaria deben ser cero:

$$-420\omega_u^2 + 1 + 0.80K_{cu} = 0$$

$$-9oowy + 43\omega_u = 0$$

Se tienen las siguientes posibilidades de solución para este sistema:

Para $\omega_u = 0$ $\qquad K_{cu} - 1.25$ %/%

Para w,, = 9.2186 rad/s $\qquad K_{cu} = 23.8$ %/%

La primera solución corresponde a la inestabilidad mono tónica que causa la acción incorrecta del controlador; en este caso el sistema no oscila, sino que se mueve monotónicamente en una dirección u otra; el cruce con el eje imaginario ocurre en el origen (s = 0).

La ganancia última que se obtiene para la segunda solución es idéntica a la que se obtiene mediante la prueba de Routh, pero en esta ocasión se obtiene como información adicional que, con esta ganancia, el circuito oscila con una frecuencia de 0.2186 rad/s (0.0348 hertz) o un período de

$$T_u = \frac{2\pi}{0.2186} = 28.7 \text{ s}$$

A continuación se tabulan los resultados del método de substitución directa para los otros casos que se consideraron antes.

	K_{cu}	ω_u, rad/s	T_u, s
1. Caso básico	23.6	0.2186	28.7
2. $H(s) = \dfrac{2.0}{10s + 1}$	11.9	0.2186	28.7
3. $H(s) = \dfrac{1.0}{5s + 1}$	25.7	0.2906	21.6
4. $G,(s) = \dfrac{50}{20s + 1}$	18.7	0.2345	26.8

Se ve que las ganancias últimas son las mismas que se obtienen con la prueba de Routh, sin embargo, en los resultados del método de substitución directa se aprecia que el circuito

puede oscilar significativamente más rápido cuando la constante de tiempo del sensor-transmisor se reduce de 10 a 5 s. Estos resultados también indican que el circuito oscila ligeramente más rápido cuando se reduce la constante de tiempo del intercambiador de 30 a 20 s, a pesar de la reducción significativa en la ganancia última. También se puede observar que el cambio de las ganancias de los bloques del circuito no tiene efecto sobre la frecuencia de oscilación.

Efecto del tiempo muerto

Ya se vio la manera en que la prueba de Routh y la substitución directa permiten estudiar el efecto de los diferentes parámetros del circuito sobre la estabilidad del circuito de control por retroalimentación; desafortunadamente, estos métodos fallan cuando en cualquiera de los bloques del circuito existe un término de tiempo muerto (retraso de transporte o retardo en tiempo), debido a que el tiempo muerto introduce una función exponencial de la variable de la transformada de Laplace en la ecuación característica, lo cual significa que la ecuación ya no es un polinomio y que los métodos que se aprendieron en esta sección ya no se aplican. Un incremento en el tiempo muerto tiende a reducir rápidamente la ganancia última del circuito, este efecto es, similar al que resulta de incrementar la constante de tiempo no dominante del circuito, puesto que esta en relación con la magnitud de la constante de tiempo dominante. Cuando se estudie el método de la respuesta en frecuencia en el siguiente capitulo, se podrá estudiar el efecto del tiempo muerto sobre la estabilidad del circuito.

Se debe hacer notar que el intercambiador que se utilizó como ejemplo en este capítulo es un sistema de parámetros distribuidos, es decir, la temperatura del fluido que se procesa esta distribuida a lo largo del intercambiador. Las funciones de transferencia de tales sistemas generalmente contienen al menos un término de tiempo muerto, el cual se despreció para efectos de simplicidad.

Mediante una aproximación a la función de transferencia de tiempo muerto, se puede obtener una estimación de la ganancia y frecuencia últimas de un circuito con tiempo muerto. Una aproximación usual es la aproximación de Padé dé primer orden[9] que se expresa mediante

$$e^{-t_0 s} \doteq \frac{1 - \frac{1}{2}t_0 s}{1 + \frac{1}{2}t_0 s} \tag{6-29}$$

donde t_o es el tiempo muerto. También existen aproximaciones de orden superior más precisas, pero son muy complejas y no son prácticas. Con el siguiente ejemplo se ilustra la utilización de la aproximación de Padé con el método de substitución directa.

Ejemplo 6-7. Ganancia y frecuencia últimas de un proceso de primer orden con tiempo muerto.

La función de transferencia de proceso del circuito en la figura 6-4*a* se expresa mediante

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$$

donde:

K es la ganancia
t_0 es el tiempo muerto
τ es la constante de tiempo

Si el controlador es proporcional, se deben determinar la ganancia y frecuencia últimas del circuito en función de los parámetros del proceso:

$$G_c(s) = K_c$$

Solución: Del ejemplo 4-1, se tiene que la ecuación característica del circuito es

$$1 + G_c(s)\, G(s) = 0$$

o para las funciones de transferencia consideradas aquí

$$1 + \frac{KK_c e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} = 0$$

Al substituir la aproximación de Padé de primer orden, ecuación (6-29), se tiene

$$1 + \frac{KK_c(1 - \tfrac{1}{2}t_0 s)}{(\tau s + 1)(1 + \tfrac{1}{2}t_0 s)} = 0$$

Se elimina la fracción

$$\tfrac{1}{2}t_0\tau s^2 + (\tau + \tfrac{1}{2}t_0 - \tfrac{1}{2}KK_c t_0)s + 1 + KK_c = 0$$

Por el método de substitución directa, $s = i\omega_u$ da

$$\tfrac{1}{2}t_0\tau i^2\omega_u^2 + (\tau + \tfrac{1}{2}t_0 - \tfrac{1}{2}KK_c t_0)\, i\omega_u + 1 + KK_c = 0$$

$$(-\tfrac{1}{2}t_0\tau\omega_u^2 + 1 + KK_c) + i(\tau + \tfrac{1}{2}t_0 - \tfrac{1}{2}KK_c t_0)\omega_u = 0$$

Después de reordenar, la solución es

$$(KK_c)_u = 1 + 2\frac{\tau}{t_0}$$

$$\omega_u = \frac{2}{t_0}\sqrt{\frac{t_0}{\tau} + 1}$$

En estas fórmulas se aprecia que la ganancia última del circuito tiende a infinito -sin límite de estabilidad- conforme el tiempo muerto se acerca a cero, lo cual concuerda con el resultado del ejemplo 6- 1, sin embargo, cualquier cantidad finita de tiempo muerto impone un límite de estabilidad a la ganancia del circuito. La ganancia última se incrementa cuando el tiempo muerto decrece, y se vuelve muy pequeña conforme se incrementa el tiempo muerto; esto significa que el tiempo muerto hace que la respuesta del circuito sea lenta.'

A partir de los resultados del análisis de la substitución directa, del ejemplo precedente se pueden resumir los siguientes efectos generales de los diversos parámetros del circuito:

1. La estabilidad impone un límite a la ganancia total del circuito, de manera que un incremento en la ganancia de la válvula de control, el transmisor o el proceso da como resultado un decremento en la ganancia última del controlador.
2. Un incremento en el tiempo muerto, o en cualquiera de las constantes de tiempo no dominantes (las más pequeñas) del circuito, da como resultado una reducción en la ganancia última del circuito, así como en la frecuencia última.
3. Un incremento en la constante de tiempo dominante (la mayor) del circuito da como resultado un incremento en la ganancia última del circuito y un decremento en la frecuencia última del circuito.

A continuación se aborda la importante tarea del ajuste de los controladores por retroalimentación.

6-3. AJUSTE DE LOS CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

El ajuste es el procedimiento mediante el cual se adecúan los parámetros del controlador por retroalimentación para obtener una respuesta especifica de circuito cerrado. El ajuste de un circuito de control por retroalimentación es análogo al del motor de un automóvil o de un televisor; en cada caso la dificultad del problema se incrementa con el número de parámetros que se deben ajustar; por ejemplo, el ajuste de un controlador proporcional simple o de uno integral es similar al del volumen de un televisor, ya que sólo se necesita ajustar un parámetro 0 "perilla"; el procedimiento consiste en moverlo en una dirección u otra, hasta que se obtiene la respuesta (o volumen) que se desea. El siguiente grado de dificultad es ajustar el controlador de dos modos o proporcional-integral (PI), que se asemeja al proceso de ajustar el brillo y el contraste de un televisor en blanco y negro, puesto que se deben ajustar dos parámetros: la ganancia y el tiempo de reajuste; el procedimiento de ajuste es significativamente más complicado que cuando sólo se necesita ajustar un parámetro. Finalmente, el ajuste de los controladores de tres modos o proporcional-integral-derivativo (PID) representa el siguiente grado de dificultad, debido a que se requiere ajustar tres parámetros: la ganancia, el tiempo de reajuste y el tiempo de derivación, lo cual es análogo al ajuste de los haces verde, rojo y azul en un televisor a color.

A pesar de que se plante6 la analogía entre el ajuste de un televisor y un circuito de control con retroalimentación, no se trata de dar la impresión de que en ambas tareas existe el mismo grado de dificultad. La diferencia principal estriba en la velocidad de respuesta del televisor contra la del circuito del proceso; en el televisor se tiene una retroalimentación casi inmediata sobre el' efecto del ajuste. Por otro lado; a pesar de que en algunos circuitos de proceso se tienen respuestas relativamente rápidas, en la mayoría de los procesos se debe esperar varios minutos, o aun horas, para apreciar la respuesta que resulta del'ajuste, lo cual hace que el ajuste de los controladores con retroalimentación sea una tarea tediosa que lleva tiempo; a pesar de ello, éste es el método que más comúnmente utilizan los ingenieros de control e instrumentación en la industria. Para ajustar los controladores a varios criterios de respuesta se han introducido diversos procedimientos y fórmulas de ajuste. En esta sección se estudiarán algunos de ellos, ya que cada uno da una visión acerca del procedimiento de ajuste; sin embargo, se debe tener en mente que ningún procedimiento da mejor resultado que los demás paratodas las situaciones de control de proceso.

Los valores de los parámetros de ajuste dependen de la respuesta de circuito cerrado que se desea, así como de las caracterfsticas dinámicas o personalidad de los otros elementos del circuito de control y, particularmente, del proceso. Se vio anteriormente que, si el proceso no es lineal, como generalmente ocurre, estas características cambian de un punto de operación al siguiente, lo cual significa que un conjunto particular de parámetros de ajuste puede producir la respuesta que se desea únicamente en un punto de operación, debido a que los controladores con retroalimentación estándar son dispositivos básicamente lineales. A fin de operar en un rango de condiciones de operación, se debe establecer un arreglo para lograr un conjunto aceptable de parámetros de ajuste, ya que la respuesta puede ser lenta en un extremo del rango, y oscilatoria en el otro. Con lo anterior en mente,' a continuación se exponen algunos de los procedimientos propuestos para ajustar los controladores industriales.

Respuesta de razón de asentamiento de un cuarto mediante el método de ganancia última

Este método, uno de los primeros, que también se conoce como método de circuito cerrado o ajuste en linea, lo propusieron Ziegler y Nichols[1], en 1942; consta de dos pasos, al igual que todos los otros métodos de ajuste:

Paso 1. Determinación de las caracterfsticas dinámicas o personalidad del circuito de control.

Paso 2. Estimación de los parámetros de ajuste del controlador con los que se produce la respuesta deseada para las caracterfsticas dinámicas que se determinaron en el primer paso -en otras palabras, hacer coincidir la personalidad del controlador con la de los demás elementos 'del circuito.

En este método, los parámetros mediante los cuales se representan las características dinámicas del proceso son: la *ganancia última* de un controlador proporcional, y el *período*

último de oscilación; estos parámetros, que se introdujeron en la sección precedente, se pueden determinar mediante el método de substitución directa, si se conocen cuantitativamente las funciones de transferencia de todos los componentes del circuito, ya que generalmente éste no es el caso. La ganancia y el periodo últimos se deben determinar frecuentemente de manera experimental, a partir del sistema real, mediante el siguiente procedimiento:

1. Se desconectan las acciones integral y derivativo del controlador por retroalimentación, de manera que se tiene un controlador proporcional. En algunos modelos no es posible desconectar la acción integral, pero se puede desajustar mediante la simple igualación del tiempo de integración al valor máximo —o de manera equivalente, la tasa de integración al valor mínimo.
2. Con el controlador en automático (esto es, el circuito cerrado), se incrementa la ganancia proporcional (o se reduce la banda proporcional), hasta que el circuito oscila con amplitud constante; se registra el valor de la ganancia con que se produce la oscilación sostenida como K_{cu}, ganancia última; Este paso se debe efectuar con incrementos discretos de la ganancia,, alterando el sistema con la aplicación de pequeños cambios en el punto de control a cada cambio en el establecimiento de la ganancia. Los incrementos-de la ganancia deben ser menores conforme ésta se aproxime a la ganancia última.
3. Del registro de tiempo de' la variable 'controlada, se registra y mide el período de oscilación como T_u, período último, según se muestra en la figura 6-10.

Para la respuesta que se desea del circuito cerrado, Ziegler y Nichols[1] especificaron una razón de asentamiento de un cuarto. La razón de asentamiento (disminución gradual) es la razón de amplitud entre dos oscilaciones sucesivas; debe ser independiente de las entradas al sistema, y depender únicamente de las raíces de la ecuación característica del circuito. En la figura 6-11 se muestran las respuestas típicas de razón de asentamiento de un cuarto para una perturbación y un cambio en el punto de control.

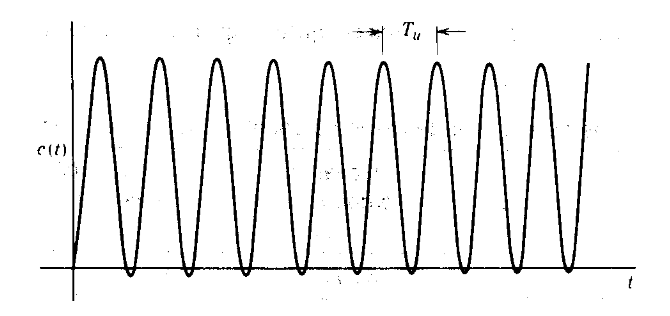


Figura 6-10. Respuesta del circuito cuando la ganancia del controlador se hace igual a la ganancia última K_{cu}; el período último es T_u.

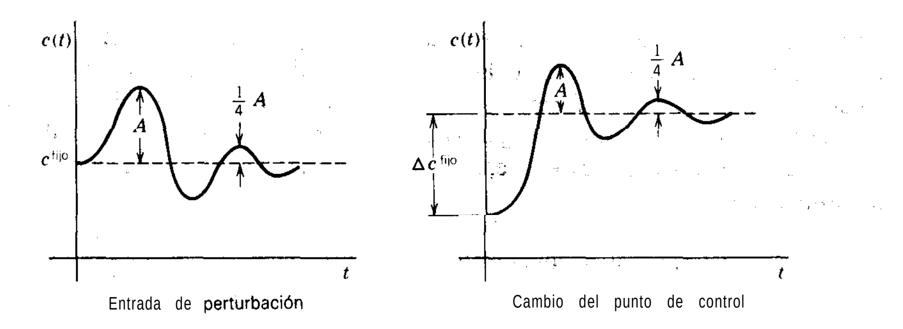


Figura 6-11. Respuesta de razón de disminución gradual de un cuarto al cambio en la entrada de perturbación y el punto de control.

Una vez que se determinan la ganancia última y el período último, se utilizan las fórmulas de la tabla 6-1 para calcular los parámetros de ajuste del controlador con los cuales se producen respuestas de la razón de asentamiento de un cuarto.

Nótese que, cuando se introduce la acción integral, se fuerza una reducción del 10% en la ganancia del controlador PI, en comparación con la del controlador proporcional. Por otro lado, la acción derivativa propicia un incremento, tanto en la ganancia proporcional como en la tasa de integración (un decremento en el tiempo de integración) del controlador PID, en comparación con las del controlador PI, debido a que la acción integral introduce un retardo en la operación del controlador por retroalimentación, mientras que con la acción derivativa se introduce un avance o adelanto. Esto se trata con más detalle en el capítulo 7.

La respuesta con asentamiento de un cuarto no es deseable para cambios escalón en el punto de control, porque produce un sobrepaso del 50% ($A/\Delta c^{\text{fijación}}$ = OS), debido a que la desviación máxima del nuevo punto de control en cada dirección es un medio de la desviación máxima precedente en la dirección opuesta (ver figura 6-11). Sin embargo, la respuesta de la razón de asentamiento de un cuarto es muy deseable para las perturbaciones, porque se evita una gran desviación inicial del punto de control sin que se tenga demasiada oscilación. La mayor dificultad de la respuesta de razón de asentamiento de un cuarto es que el conjunto de parámetros de ajuste requerido para obtenerla no es único,

con ganancia última. en la 283

Tabla 6-1 Fórmulas para ajuste de razón de asentamiento de un cuarto.

Tipo de controlador		Ganancia proporcional K_C	Tiempo de integración τ_I	Tiempo de derivación τ_D
Proporcional	P	$K_{cu}/2$	—	—
Proporcional-integral	PI	$K_{cu}/2.2$	$T_u/1.2$	—
Proporcional-integral-derivativo	PID	$K_{cu}/1.7$	$T_u/2$	$T_u/8$

a excepción del caso del controlador proporcional; en el caso de los controladores PI se puede verificar fácilmente que, para cada valor del tiempo de integración, es posible encontrar un valor de ganancia con el cual se produce una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto y viceversa; lo mismo es válido para el controlador PID. Las puestas a punto que proponen Ziegler y Nichols son valores de campo que producen una respuesta rápida en la mayoría de los circuitos industriales.

Ejemplo 6-8. A partir de la ecuación característica del tanque de calentamiento con agitación continua que se obtuvo en el ejemplo 6-4, se deben determinar los parámetros de ajuste de razón de asentamiento de un cuarto para el controlador PID, mediante el método de la ganancia última; también se deben calcular las raíces de la ecuación característica cuando el controlador se ajusta con esos parámetros.

Solución. En el ejemplo 6-4 se obtuvo la siguiente ecuación característica para el calentador :

$$0.387s^5 + 3.272s^4 + 7.859s^3 + (6.043 + 1.205\, K_c \tau_D)s^2 + (0.617 + 1.205K_c)s + 1.205\, K_c/\tau_I = 0$$

Primeramente se utiliza el método de substitución directa para calcular la ganancia y el período de oscilación últimos de un controlador proporcional. Con $\tau_D = 0$ y $1/\tau_I = 0$, la ecuación característica se reduce a:

$$0.387s^4 + 3.272s^3 + 7.859s^2 + 6.043s + 0.617 + 1.205K_c = 0$$

A continuación se substituye $s = i\omega_u$ y $K_c = K_{cu}$ para obtener, después de simplificar, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-3.272\omega_u^3 + 6.043\omega_u = 0$$

$$0.387\omega_u^4 - 7.859\omega_u^2 + 0.617 + 1.205K_{cu} = 0$$

A partir de éste, se pueden obtener la frecuencia y ganancia últimas:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{6.043}{3.272}} = 1.359 \text{ rad/min}$$

$$K_{cu} = \frac{1}{1.205}(-0.387\omega_u^4 + 7.859\omega_u^2 \quad 0.617) = 10.44 \ \%/\%.$$

El período último es $T_u = \dfrac{2\pi}{1.359} = 4.62$ min. De acuerdo con la tabla 6-1, los parámetros de ajuste para la respuesta a un cuarto de la razón de asentamiento para un controlador PID son

$$K_c = K_{cu}/1.7 = 6.14 \ \%/\%$$
$$\tau_I = T_u/2 = 2.31 \text{ min.}$$
$$\tau_D = T_u/8 = 0.58 \text{ min.}$$

Con estos parámetros de ajuste la ecuación característica es

$$0.387s^5 + 3.272s^4 + 7.858s^3 + 10.34s^2 + 8.017s + 3.20 = 0$$

Con el programa del apéndice D, se encuentra que las raíces de esta ecuación característica son

$$-0.42 \pm i0.99, \quad -1.03 \pm i0.49, \quad -5.55$$

La respuesta de escalón unitario del circuito cerrado tiene la siguiente forma:

$$T(t) = b_0u(t) + b_1e^{-0.42t}\text{sen}(0.99t + \theta_1) + b_2e^{-1.03t}\text{sen}(0.49t + \theta_2) + b_3e^{-5.55t}$$

donde los parámetros b_0, b_1, θ_1, b_2, θ_2 y b_3 se deben evaluar mediante la expansión de fracciones parciales para la entrada particular (punto de régimen, flujo de entrada o temperatura de entrada) considerada. La técnica de expansión de fracciones parciales se abordó en el capítulo 2.

Caracterización del proceso

El método de Ziegler-Nichols para ajuste en línea que se acaba de presentar es el único con que se caracteriza al proceso mediante la ganancia y período últimos. Con la mayoría de los demás métodos para ajuste del controlador, se caracteriza al proceso mediante un modelo simple de primer o segundo orden con tiempo muerto. Para una mejor comprensión de las suposiciones que entran en tal caracterización, considérese el diagrama de

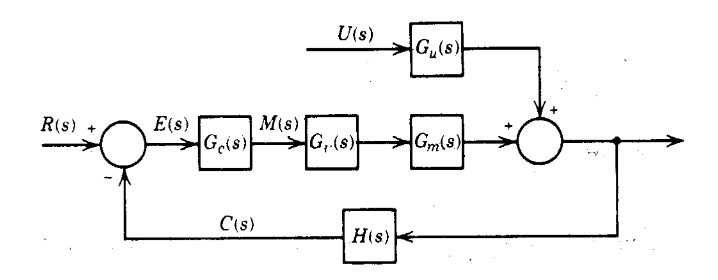


Figura 6-12a. Diagrama de bloques del cortocircuito típico de control por retroalimentación.

bloques de un circuito de control por retroalimentación que se muestra en la figura 6-12*a*: los símbolos que aparecen en el diagrama son

$R(s)$	transformada de Laplace de la señal del punto de control
$M(s)$	transformada, de Laplace de la. señal de salida del controlador
$C(s)$	transformada de Laplace de la señal de salida del transmisor
$E(s)$	transformada de Laplace de la señal de error
$U(s)$	transformada de Laplace de la señal de perturbación
$G_c(s)$	función de transferencia del controlador
$G_v(s)$	función de transferencia de la válvula de control (o elemento final de control)
$G_m(s)$	función de transferencia del proceso entre la variable controlada y la variable manipulada
$G_u(s)$	función de transferencia del proceso entre la variable controlada y el disturbio
$H(s)$	función de transferencia del sensor-transmisor

Para dibujar el diagrama equivalente. de bloques que se muestra en la figura 6-12*b*, se utiliza el álgebra simple de diagramas de bloques que se expuso en el capítulo 3; en este diagrama sólo hay dos bloques en el circuito de control, uno para el controlador y otro para el resto de los componentes del circuito. La ventaja de esta representación simplificada estriba en que se destacan las dos señales del circuito que generalmente se observan y registran: la salida del controlador $M(s)$ y la señal del transmisor C(s). En la mayoría de los circuitos no se puede observar alguna señal o variable, a excepción de esas dos; por lo tanto, la concentración de las funciones de transferencia de la válvula de control, del proceso y del sensor-transmisor, no se hace sólo por conveniencia, sino por razones prácticas; si a esta combinación de funciones de transferencia se le designa como G(s):

$$G(s) = G_v(s)\ G_m(s)H(s) \tag{6-30}$$

Es precisamente esta función de transferencia combinada la que se aproxima mediante los modelos de orden inferior con el objeto de caracterizar la respuesta dinámica del

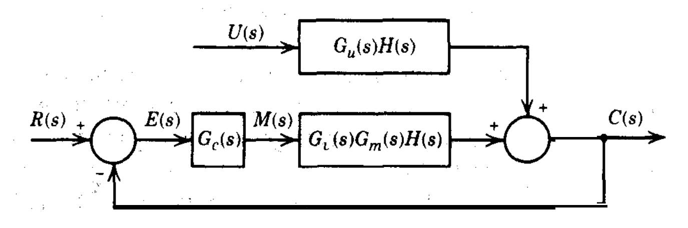


Figura 6-12*b*. Diagrama de bloques equivalente y simplificado en el cual todos los instrumentos de campo y el proceso se concentran en bloques individual?!,

proceso. Lo importante es que en el "proceso" caracterizado se incluye el comportamiento dinámico de la válvula de control y del **sensor/transmisor**. Los modelos que comúnmente se utilizan para caracterizar al proceso son los siguientes:

Modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM)

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \tag{6-31}$$

Modelo de segundo orden más tiempo muerto (SOMTM)

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{6-32}$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \tag{6-33}$$

para procesos subamortiguados ($\xi < 1$), donde:

K = ganancia del proceso en estado estacionario
t_o = tiempo muerto efectivo del proceso
τ, τ_1, τ_2 = constantes de tiempo efectivas del proceso
ξ = razón de amortiguamiento efectiva del proceso

De éstos, el modelo POMTM es en el que se basan la mayoría de las fórmulas de ajuste de controladores. En este modelo el proceso se caracteriza mediante tres parámetros: la ganancia K, el tiempo muerto t_o y la constante de tiempo τ. De modo que el problema consiste en la manera en que se pueden determinar dichos parámetros para un circuito particular; la solución consiste en realizar algunas pruebas dinámicas en el sistema real o la simulación del circuito en una computadora; la prueba más simple que se puede realizar es la de escalón.

Prueba del proceso de escalón

El procedimiento de la prueba de escalón se lleva a cabo como sigue:

1. Con el controlador en la posición "manual" (es decir, el circuito abierto), se aplica al proceso un cambio escalón en la señal de salida del controlador $m(t)$. La magnitud del cambio debe ser lo suficientemente grande como para que se pueda medir el cambio consecuente en la señal de salida del transmisor, pero no tanto como para que las no linealidades del proceso ocasionen la distorsión de la respuesta.
2. La respuesta de la señal de salida del transmisor $c(t)$ se registra con un graficador de papel continuo o algún dispositivo equivalente; se debe tener la seguridad de que la resolución es la adecuada, tanto en la escala de amplitud como en la dé tiem-

po. La **graficación** de c(t) contra el **tiempo** debe cubrir el período completo de la prueba, desde la introducción de la prueba de escalón hasta que el sistema alcanza un nuevo estado estacionario. La prueba 'generalmente dura entre unos cuantos minutos y varias horas, según la velocidad de respuesta del proceso.

Naturalmente, es imperativo que no entren perturbaciones al sistema mientras se realiza la prueba de escalón. En la figura 6- 13 se muestra una gráfica típica de la prueba, la cual se conoce también como *curva de reacción del proceso;* como se vio en el capítulo 4, la respuesta en forma de S es característica de los procesos de segundo orden o superior, con o sin tiempo muerto. El siguiente paso es hacer coincidir la curva de reacción del proceso con el modelo de un proceso simple para determinar los parámetros del modelo; a continuación se hace esto para un modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM) .

En ausencia de perturbaciones y para las condiciones de la prueba, el diagrama de bloques de la figura 6-12*b* se puede redibujar de la manera en que aparece en la figura 6-14. La respuesta de la señal de salida del transmisor se expresa mediante

$$C(s) = G(s)\,M(s)$$

Para un cambio escalón de magnitud Am en la salida del controlador y un modelo POMTM, ecuación (6-31), se tiene

$$C(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \cdot \frac{\Delta m}{s} \tag{6-34}$$

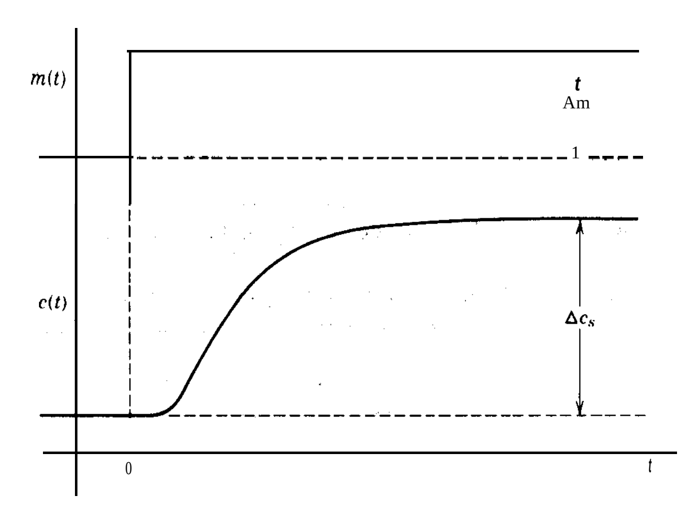


Figura 6-13. Curva de reacción del proceso o respuesta escalón de circuito abierto.

Al expandir esta expresión en fracciones parciales, se obtiene

$$C(s) = K\Delta m\, e^{-t_0 s}\left[\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right] \tag{6-35}$$

Se invierte, con ayuda de la tabla de transformada de Laplace (tabla 2-1), y se aplica el teorema de la traslación real (ver capítulo 2) para obtener

$$\Delta c(t) = K\Delta m\; u(t - t_0)\; [1 - e^{-(t-t_0)/\tau}] \tag{6-36}$$

se incluye la función escalón unitario $u(t - t_o)$, para indicar explícitamente que

$$\Delta c(t) = 0 \qquad \text{para } t \leq t_0$$

El término Δc es la perturbación o cambio de salida del transmisor respecto a su valor inicial:

$$\Delta c(t) = c(t) - c(0) \tag{6-37}$$

En la figura 6-15 se muestra una gráfica de la ecuación (6-36), en ésta el término Δc_s es el cambio, en estado estacionario, de c(t). De la ecuación (6-36) se tiene que

$$\Delta c_s = \lim_{t\to\infty} \Delta c(t) = K\Delta m \tag{6-38}$$

A partir de esta ecuación, y si se tiene en cuenta que la respuesta del modelo debe coincidir con la curva de reacción del proceso en estado estable, se puede calcular la ganancia de estado estacionario del proceso, la cual es uno de los parámetros del modelo:

$$K = \frac{\Delta c_s}{\Delta m} \tag{6-39}$$

Este resultado también se obtuvo en el capítulo 3.

El tiempo muerto t_0 y la constante de tiempo τ se pueden determinar al menos mediante tres métodos, cada uno de los Cuales da diferentes valores.

Método 1. En este método se utiliza la línea tangente a la curva de reacción del proceso, en el punto de razón máxima de cambio; para el modelo POMTM esto ocurre en

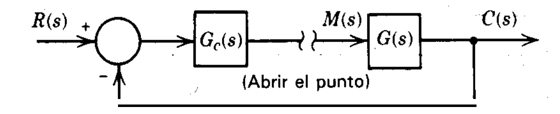


Figura 6-14. Diagrama de bloques para la prueba escalón con circuito abierto.

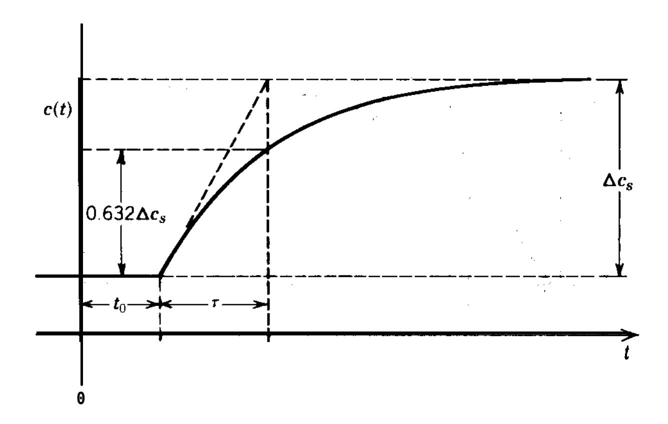


Figura 6-15. Respuesta escalón de un proceso de primer orden más tiempo muerto en la que se ilustra la definición gráfica de tiempo muerto, t_o, y constante de tiempo, τ.

$t = t_o$, como resulta evidente al observar la respuesta del modelo en la figura 6-15. De la ecuación (6-36) se encuentra que esta razón inicial (máxima) de cambio es

$$\left.\frac{d(\Delta c)}{dt}\right|_{t_0} = K\Delta m\left[\frac{1}{\tau}\right] = \frac{\Delta c_s}{\tau} \tag{6-40}$$

En la figura 6-15 se aprecia que tal resultado indica que la línea de razón máxima de cambio interseca la línea de valor inicial en $t = t_0$, y a la línea de valor final en $t = t_o + \tau$. De este descubrimiento se deduce el trazo para determinar t_o y τ que se ilustra en la figura 6-16*a*; la línea se traza tangente a la curva de reacción del proceso real, en el punto de reacción máxima de cambio. La respuesta del modelo en que se emplean los valores de t_o y τ se ilustra con la linea punteada en la figura. Evidentemente, la res-

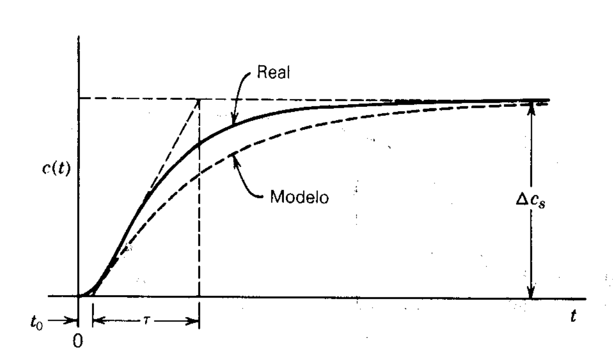


Figura 6-16*a*. Parámetros del modelo POMTM que se obtiene mediante el método 1.

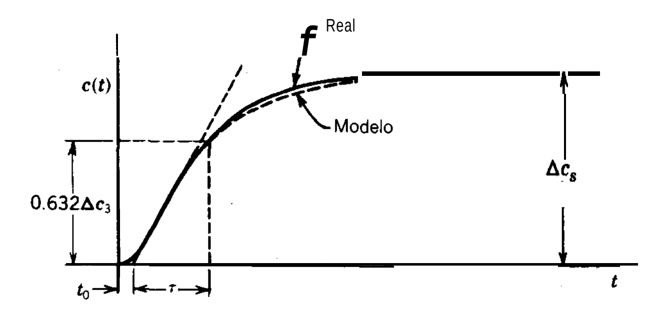


Figura 6-16*b*. Parámetros del modelo POMTM que se obtienen con el método 2.

puesta del modelo que se obtiene con este método no coincide muy bien con la respuesta real.

Método 2. En este método t_0 se determina de la misma manera que en el método 1, pero con el valor de τ se fuerza a que la respuesta del modelo coincida con la respuesta real en $t = t_0 + \tau$. De acuerdo con la ecuación (6-36) este punto es

$$\Delta c(t_0 + \tau) = K\Delta m\,[1 - e^{-1}] = 0.632\ \Delta c_s \tag{6-41}$$

Se observa que la comparación entre la respuesta del modelo y la real es mucho más cercana que con el **método** 1, figura **6-16*b*.** El valor de la constante de tiempo que se obtiene con el método 2 es generalmente menor al que se obtiene con el método 1.

Método 3. Al determinar t_0 y τ con los dos métodos anteriores, el paso de menor precisión es el trazo de la tangente en el punto de razón máxima de cambio de la curva de reacción del proceso. Aun en el método 2, donde el valor de $(t_0 + \tau)$ es independiente de la **tangente,** los valores que se estiman para t_0 y τ dependen de la línea. Para eliminar

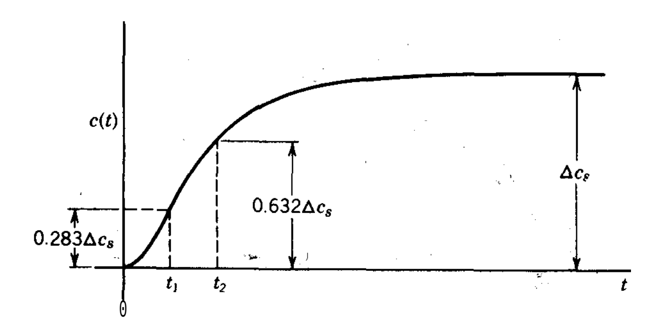


Figura 6-16*c*. Parámetros del modelo POMTM que se obtienen por **medio** del método 3.

esa dependencia, el doctor Cecil L. Smith[2] propone que los valores de t_o y τ se seleccionen de tal manera que la respuesta del modelo y la real coincidan en la región de alta tasa de cambio. Los dos puntos que se recomiendan son $(t_o + 1/3\,\tau)$ y $(t_o + \tau)$, y para localizar dichos puntos se utiliza la ecuación (6-36):

$$\Delta c(t_0 + \tau) = K\Delta m\,[1 - e^{-1}] = 0.632\ \Delta c_s \qquad (6\text{-}42)$$

$$\Delta c\left(t_0 + \frac{1}{3}\tau\right) = K\Delta m\,[1 - e^{-1/3}] = 0.283\ \Delta c_s$$

Estos dos puntos, en la figura 6-16c, se denominan t_2 y t_1, respectivamente. Los valores de t_o y τ se pueden obtener fácilmente mediante la simple resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$t_0 + \tau = t_2 \qquad (6\text{-}43)$$

$$t_0 + \frac{1}{3}\tau = t_1$$

Lo cual se reduce a

$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \qquad (6\text{-}44)$$

$$t_0 = t_2 - \tau$$

donde:

t_1 = tiempo en el cual $\Delta c = 0.283\ \Delta c_s$
t_2 = tiempo en el cual $\Delta c = 0.632\ \Delta c_s$

Con la experiencia se demostró que los resultados obtenidos con este método son más fáciles de reproducir que los que se obtienen mediante los otros dos y, por lo tanto, se recomienda este método para hacer la estimación de t_o y τ a partir de la curva de reacción del proceso. Sin embargo, se debe tener en cuenta que algunas correlaciones para los parámetros de ajuste del controlador se basan en diferentes ajustes de modelos POMTM.

En la bibliografía sobre el tema se proponen varios métodos para estimar los parámetros de un modelo de segundo orden más tiempo muerto (SOMTM) para la curva de reacción del proceso, pero por experiencia se sabe que tales métodos son poco precisos, debido a que la prueba con escalón no proporciona suficiente información para obtener el parámetro adicional -constante de tiempo o razón de amortiguamiento- que se requiere para el SOMTM. En otras palabras, la mayor complejidad del modelo requiere una prueba dinámica más elaborada. La prueba con pulsos es un método adecuado para obtener los parámetros de modelos de segundo orden y superiores. Esta prueba se presenta en la sección 7.3.

Puesto que las formulas de ajuste del controlador que se presentan a continuación se basan en parámetros de modelos POMTM, se pueden encontrar algunas situaciones donde existen parámetros de un modelo de orden superior y se necesita estimar el equivalente a modelos de primer orden; a pesar de que no existe un procedimiento general para hacer esto, con la siguiente regla práctica se puede obtener una estimación somera para una primera aproximación:

Si una de las constantes de tiempo del modelo de orden superior es mucho más grande que las otras, es posible estimar que la constante de tiempo efectiva del modelo de primer orden es igual a la constante de tiempo mayor. Entonces, se puede aproximar el tiempo muerto efectivo del modelo de primer orden mediante la suma de todas las constantes de tiempo menores más el tiempo muerto del modelo de orden superior.

Ejemplo 6-9. Se deben estimar los parámetros POMTM para el circuito de control de temperatura del intercambiador del ejemplo 6-5. La función de transferencia combinada para la vávula de control, el intercambiador y el sensor-transmisor de este ejemplo se expresa mediante

$$G(s) = \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{50}{30s+1} + \frac{0.016}{3s+1}$$

Solución. Si se supone que la constante de tiempo de 30 s es mucho mayor que las otras dos, se puede aproximar en, más o menos:

$$\tau = 30 \text{ s}$$

$$t_0 = 10 + 3 = 13 \text{ s}$$

naturalmente, la ganancia es la misma; es decir, $K = 0.80$. La función de transferencia del modelo POMTM que resulta es, entonces

$$G(s) = \frac{0.80\, e^{-13s}}{30s + 1} \qquad \text{(Modelo A)}$$

Ahora se compara esta aproximación con los parámetros POMTM que se determinan experimentalmente a partir de la curva de reacción del proceso. En la figura 6-17 se ilustra la curva de reacción de proceso para los tres retardos de primer orden en serie, los cuales se supone representan el intercambiador de calor, la válvula de control y el sensor-transmisor. La respuesta de la figura 6-17 se obtiene mediante la simulación de los tres retardos de primer orden en una microcomputadora analógica; se aplicó un *cambio escalón de 5 % a la señal de salida del controlador y se registró la salida del sensor transmisor contra el tiempo; a partir de este resultado es posible calcular los parámetros POMTM, para lo cual se utilizan los tres métodos presentados anteriormente.



Ganancià del proceso

$$K = \frac{\Delta c}{\Delta m} = \frac{4C}{5\ \%} \cdot \frac{100\%}{(150-50)C} = 0.80\ \frac{\%}{\%}$$

Método 1

$t_0 = 1.2$ s $\quad t_3 = 61.5$ s **(ver figura 6-17)**

$$\tau = 61.5 - 1.2 = 54.3 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{0.80\ e^{-7.2s}}{54.3\ s + 1} \qquad \text{(modelo B)}$$

Método 2

$t_0 = 7.2$ s

En $\Delta c(t) = 0.632\ (4\ \text{C}) = 2.53$ C $\quad t_2 = 45.0$ s

$$\tau = 45.0 - 1.2 = 37.8 \text{ s}$$

$$G(s) = \frac{0.80\ e^{-7.2s}}{37.8\ s + 1} \qquad \text{(modelo C)}$$

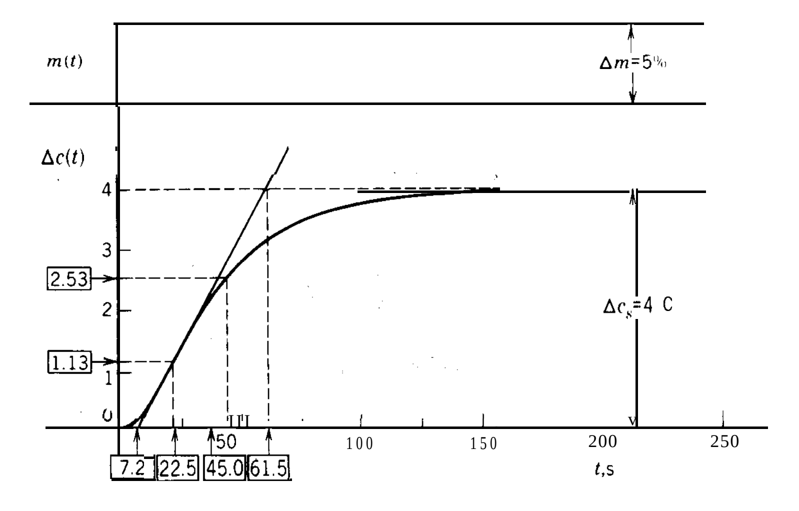


Figura 6-17. Curva de reacción de proceso para el ejemplo 6-9.

Método 3

$$\text{En } \Delta c(t) = 0.283\ (\Delta C) = 1.13\ c \qquad t_1 = 22.5\ s$$

$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) = \frac{3}{2}(45.0 - 22.5) = 33.8\ s$$

$$t_0 = 45.0 - 33.8 = 11.2\ s$$

$$G(s) = \frac{0.80\, e^{-11.2s}}{33.8\, s + 1} \qquad \text{(modelo D)}$$

Como se verá en las secciones siguientes, en términos de ajuste, un parámetro importante es la relación del tiempo muerto con la constante de tiempo. Los valores para los cuatro modelos de aproximación POMTM son los siguientes:

Modelo	A(aproximado)	B(método 1)	C(método 2)	D(método 3)
t_0,s	13.0	7.2	7.2	11.2
τ,s	30.0	54.3	37.0	33.8
t_0/τ	0.433	0.133	0.190	0.331

Se supone que la razón t_0/τ es el parámetro más sensible, y que varía con un factor ligeramente superior a 3: 1. A pesar de que con-los métodos 2 y 3 se obtienen las aproximaciones más cercanas a la respuesta escalón real, se debe tener en cuenta que algunas correlaciones de ajuste se basan en métodos específicos.

Ejemplo 6-10. Para el siguiente proceso de segundo orden

$$G(s) = \frac{C(s)}{M(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \qquad \tau_1 \geq \tau_2$$

se deben determinar los parámetros de un modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM)

$$G'(s) = \frac{K' e^{-t_0' s}}{\tau' s + 1}$$

se debe utilizar el método tres en función de la relación τ_2/τ_1.

Solución: Primeramente se obtiene la respuesta escalón unitario para el proceso real:

$$M(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{1}{s}$$

Por expansión de fracciones parciales, para el caso $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{K}{s} - \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{s + 1/\tau_1} + \frac{K\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{s + 1/\tau_2}$$

Se invierte, con ayuda de una tabla de transformada de **Laplace** (tabla **2-1**), para obtener

$$\Delta c(t) = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}\right]$$

Como

$$t \to \infty \qquad \Delta c(t) \to K$$

y puesto que

$$\Delta m = 1 \qquad K' = \frac{\Delta c}{\Delta m} = K$$

Para el método 3, en $t_1 = t_o' + \tau'/3$

$$\Delta c = (1 - e^{-1/3})K = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_1/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_1/\tau_2}\right]$$

y en $t_2 = t_o' + \tau'$

$$\Delta c = (1 - e^{-1})K = K\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_2/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_2/\tau_2}\right]$$

$$e^{-1/3} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\left[e^{-t_1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1} e^{-t_1/\tau_2}\right] \qquad \text{(A)}$$

$$e^{-1} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\left[e^{-t_2/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1} e^{-t_2/\tau_2}\right] \qquad \text{(B)}$$

Para el caso en que $\tau_1 = \tau_2$, mediante expansión de fracciones parciales

$$C(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)^2 s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{\tau_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)^2} - K \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}}$$

Se invierte, con ayuda de una tabla de transformadas de **Laplace** (tabla **2-1**), para obtener

$$\Delta c(t) = K\left[1 - \frac{t}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_1}\right]$$

de lo que resulta

$$e^{-1/3} = \left[\frac{t_1}{\tau_1} + 1\right] e^{-t_1/\tau_1} \tag{C}$$

$$e^{-1} = \left[\frac{t_2}{\tau_1} + 1\right] e^{-t_2/\tau_1} \tag{D}$$

A partir de las ecuaciones (A) y (B) o (C) y (D), se debe resolver, por ensayo y error, para t_1 y t_2. Entonces, de la ecuación (6-44)

$$\tau' = \frac{3}{2}(t_2 - t_1)$$

$$t_0' = t_2 \quad 7'$$

Para resolver este problema, **Martin**[3] utilizó un programa de computadora; los resultados se **grafican** en la figura 6-18. Como se puede ver en esta figura, el máximo tiempo muerto efectivo tiene lugar cuando las dos constantes de tiempo son iguales:

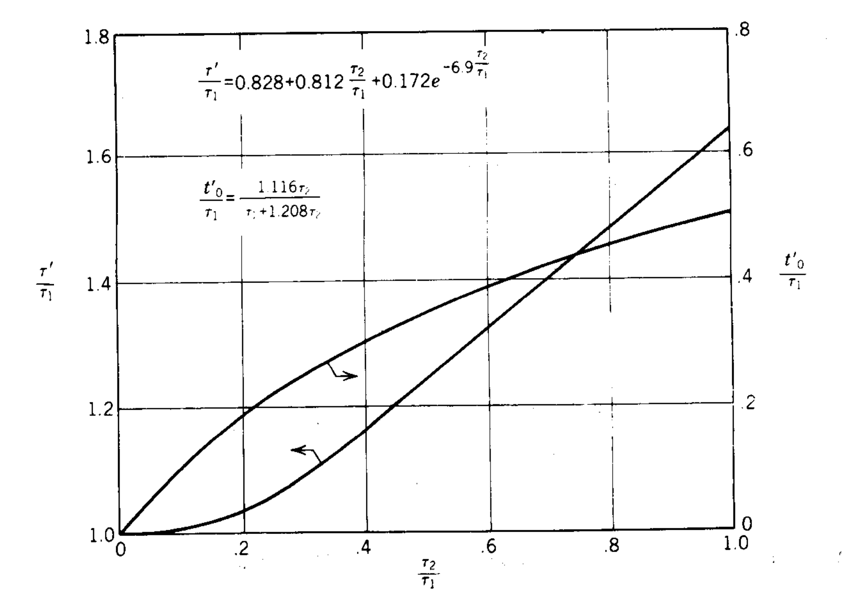


Figura 6-18. Modelo POMTM del tiempo muerto y la constante **de** tiempo para la aproximación del método 3 al sistema sobreamortiguado de segundo orden. (Se reproduce con la debida autorización de la referencia bibliográfica 3.)

$$\text{Para } \tau_1 = \tau_2 \qquad t'_0 = 0.505\tau_1 \qquad \tau' = 1.641\ \tau_1$$
$$\text{Para } \tau_2 << \tau_1 \qquad t'_0 \rightarrow \tau_2 \qquad \tau' \rightarrow \tau_1$$

Ésta es la base de la regla práctica que se presentó anteriormente. Se puede utilizar la figura 6- 18 para mejorar esta regla práctica, y así aplicarla a sistemas que se representan con tres o más retardos de primer orden en serie; por ejemplo, para el **intercambiador** de calor del ejemplo se puede perfeccionar el modelo de aproximación como sigue:

Se supone

$$\tau_1 = 30 \text{ s} \qquad \tau_2 \approx 10 + 3 = 13 \text{ s}$$

Entonces

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{13}{30} = 0.433$$

De la figura 6-18

$$t'_0 = 0.337, = 9.9 \text{ s}$$
$$\tau' = 1.2\tau_1 = 36 \text{ s}$$

Estos valores son más cercanos a los que se obtienen con el método 3, en el ejemplo 6-9, en comparación con los que se obtuvieron mediante la aproximación (modelo A), debido a que τ_2 no es mucho más pequeña que τ_1.

Respuesta de razón de asentamiento de un cuarto

Además de sus fórmulas para ajuste en línea, Ziegler y Nichols[1] proponen un conjunto de fórmulas que se basan en los parámetros de ajuste, para un modelo de primer orden, a la curva de reacción del proceso; dichas fórmulas se muéstran en la tabla 6-2. A pesar de que los parámetros que utilizaron no son precisamente la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto, sus fórmulas se pueden modificar para expresarlas en términos de esos parámetros. Ziegler y Nichols utilizaron el método 1 para determinar los parámetros del modelo.

con Kcu = 268

Tabla 6-2. Fórmulas para ajuste para respuesta de razón de asentamiento de un cuarto.

Tipo de controlador		*Ganancia proporcional* K_c	*Tiempo de integración* τ_I	*Tiempo de derivación* τ_D
Proporcional	P	$\frac{1}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	—	—
Proporcional-integral	PI	$\frac{0.9}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	$3.33\ t_0$	—
Proporcional-integral-derivativo	PID	$\frac{1.2}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-1}$	$2.0\ t_0$	$\frac{1}{2}t_0$

Como se puede ver en la tabla 6-2, las magnitudes relativas de la ganancia, el tiempo de integración y el de derivación en los controladores P, PI y PID, son las mismas que las de las fórmulas de ajuste en línea, las cuales se basan en el período y ganancia últimos (tabla 6-1). En las fórmulas se observa que la ganancia del circuito, KK_c, es inversamente proporcional a la razón del tiempo muerto efectivo, a la constante de tiempo efectiva.

Para utilizar estas fórmulas se debe tener en cuenta que son empíricas y sólo se aplican a un rango limitado de razones de tiempo muerto contra constante de tiempo, lo cual significa que no se debe extrapolar fuera de un rango de t_o/τ entre 0.10 y 1.0.

Como se señal6 al estudiar el ajuste en línea, la dificultad para especificar el desempeño de los controladores PI y PID con una razón de asentamiento de un cuarto, estriba en que existe un número infinito de conjuntos de valores de los parámetros del controlador que pueden producir ese desempeño. Las fórmulas que se dan son justamente uno de tales conjuntos.

Ejemplo 6-11. Se deben comparar los valores de los parámetros de ajuste para controlar la temperatura del intercambiador del ejemplo 6-5, mediante la utilización del ajuste en línea para una razón de asentamiento de un cuarto y los parámetros POMTM que se estimaron en el ejemplo 6-8. En los ejemplos anteriores se encontraron los siguientes resultados para el circuito de control de temperatura del intercambiador:

Por el método de substitución directa:	$K_{cu} = 23.8$ %/%.
(ver ejemplo 6-6)	$T_u = 28.7$ s.
Por aproximación con el método 1:	$K = 0.80$ %/%
(ver ejemplo 6-9)	$t_0 = 7.2$ s
	$\tau = 54.3$ s

Solución. Los parámetros de ajuste para una razón de asentamiento de un cuarto son los siguientes:

Ajuste en línea (tabla 6-1)	(Curva de reacción del proceso (tabla 6-2)

Proporcional

$$K_c = \frac{1}{2}(23.8) = 11.9 \text{ \%/\%} \qquad K_c = \frac{1}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 9.4 \text{ \%/\%}$$

Proporcional-integral

$$K_c = \frac{23.8}{2.2} = 10.8\text{\%/\%} \qquad K_c = \frac{0.9}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 8.5 \text{ \%/\%}$$

$$\tau_I = \frac{28.7}{1.2} = 23.9 \text{ s (0.40 min)} \qquad \tau_I = 3.33\ (7.2) = 24.0 \text{ s (0.40 min)}$$

Proporcional-integral-derivativo

$$K_c = \frac{23.8}{1.7} = 14 \ \%/\% \qquad K_c = \frac{1.2}{0.80}\left(\frac{7.2}{54.3}\right)^{-1} = 11.3 \ \%/\%$$

$$\tau_I = \frac{28.7}{2.0} = 14.3 \text{ s } (0.24 \text{ min}) \qquad \tau_I = 2.0(7.2) = 14.4 \text{ s } (0.24 \text{ min})$$

$$\tau_D = \frac{28.7}{8} = 3.6 \text{ s } (0.06 \text{ min}) \qquad \tau_D = 0.5(7.2) = 3.6 \text{ s } (0.06 \text{ min})$$

La concordancia es evidente, sin embargo, cabe aclarar que esta concordancia depende de la utilización de los parámetros del método 1, los cuales fueron utilizados por Ziegler y Nichols.

Ajuste mediante los criterios de error de integración mínimo

Puesto que los parámetros de ajuste de la razón de asentamiento de un cuarto no son únicos, en la Universidad del Estado de Louisiana se realizó un proyecto substancial de investigación bajo la dirección de los profesores Paul W. Murrill y Cecil L. Smith, para

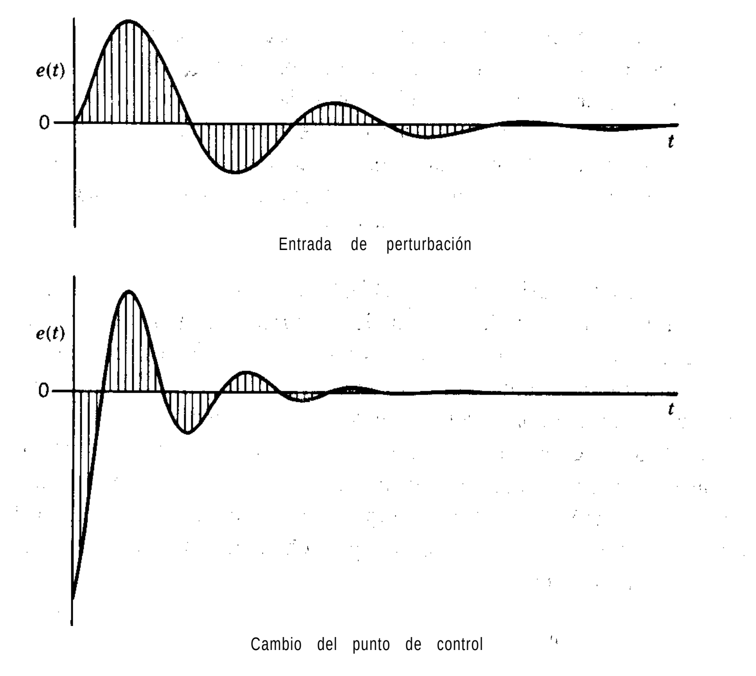


Figura 6-19. Definición de las integrales de error para cambios en la perturbación y al punto de control.

desarrollar relaciones de ajuste únicas. A fin de caracterizar el proceso se.utilizaron parámetros de modelos de primer orden más tiempo muerto (POMTM), la especificación de la respuesta, en circuito cerrado es un error o desviación mínima de la variable controlada, respecto al punto de control. Debido a que el error esta en función del tiempo que dura la respuesta, la suma del error en cada instante se debe minimizar; dicha suma es, por definición, la integral del error en tiempo y se representa mediante el área sombreada en la figura 6-19. Puesto que la integral del error se trata de minimizar mediante la utilización de las relaciones de ajuste, ***éstas se*** conocen como ***ajuste del error de integración mínimo;*** sin embargo, la integral de error no se puede minimizar de manera directa, ya que un error negativo muy grande se volvería mínimo. Para evitar los valores negativos en la función de desempeño, se propone el siguiente planteamiento de la integral:

Integral del valor absoluto del error (IAE)

$$\text{IAE} = \int_0^\infty |e(t)|dt \tag{6-45}$$

Integral del cuadrado del error (ICE)

$$\text{ICE} = \int_0^\infty e^2(t)\ dt \tag{6-46}$$

Las integrales se extienden desde el momento en que ocurre la perturbación o cambio en el punto de control ($t = 0$), hasta un tiempo posterior muy largo ($t = \infty$), debido a que no se puede fijar de antemano la duración de las respuestas. El único problema con esta definición de la integral, es que se vuelve indeterminada cuando no se fuerza el error a cero, lo cual ocurre únicamente cuando no hay acción de integración en el controlador, debido a la desviación o el error de estado estacionario; en este caso, en la definición se reemplaza el error por la diferencia entre la variable controlada y su valor final de estado estacionario.

La diferencia entre el criterio IAE y el ICE, consiste en que con el ICE se tiene más ponderación para errores grandes, los cuales se presentan generalmente al inicio de la respuesta, y menor ponderación para errores pequeños, los cuales ocurren hacia el final de la respuesta. Para tratar de reducir el error inicial, el criterio de ICE mínima da por resultado una alta ganancia del controlador y respuestas muy oscilatorias (es decir, una razón de asentamiento alta), en las cuales el error oscila alrededor del cero por un tiempo relativamente largo. De este fenómeno se deduce que en tal criterio de desempeño debe existir una compensación para el tiempo que transcurre desde el inicio de la respuesta. En las siguientes integrales de error se incluye dicha compensación mediante la ponderación del tiempo transcurrido.

Integral del valor absoluto del error ponderado en tiempo (IAET)

$$\text{IAET} = \int_0^\infty t\ |e(t)|\ dt \tag{6-47}$$

Integral del cuadrado del error ponderado en tiempo (ICET)

$$\text{ICET} = \int_0^{\infty} t\, e^2(t)\, dt \tag{6-48}$$

Las ecuaciones (6-45) a (6-48) constituyen las cuatro integrales básicas de error que se pueden minimizar para un circuito particular, mediante el ajuste de los parámetros del controlador. Desafortunadamente, el conjunto óptimo de valores paramétricos no está únicamente en función de cuál de las cuatro definiciones de integral se elige, sino que también depende del tipo de entrada, esto es, perturbación o punto de control y de su forma; por ejemplo, cambio escalón, rampa, etc. Respecto a la forma de la entrada, generalmente se elige el cambio escalón, porque es el más molesto de los que se presentan en la práctica; por lo que toca al tipo de entrada, para el ajuste se selecciona el punto de control o perturbación, en función de cuál se espera que afecte al circuito con más frecuencia. Cuando el punto de control, como entrada, es lo más importante, el propósito del controlador es hacer que la variable controlada siga la señal del punto de control y a dicho controlador se le conoce como ''servorregulador''. Cuando el objeto del controlador es mantener a la variable controlada en un punto de control constante, en presencia de las entradas de perturbaciones, se dice que el controlador es un "regulador". En términos de la integral mínima de error, los parámetros de ajuste óptimos son diferentes para cada caso. La mayoría de los controladores de proceso se consideran como reguladores, a excepción de los controladores esclavos en las estructuras de control en cascada, los cuales son servorreguladores; el control en cascada se estudiará en la sección 8-3.

Cuando se ajusta el controlador para la respuesta óptima a una entrada de perturbación, se debe hacer una decisión adicional respecto a la función de transferencia del proceso para esa perturbación en particular. Esto es complicado, debido a que la respuesta del controlador no puede ser óptima para cada perturbación, si es que existe más de una perturbación que entre en el circuito. Puesto que la función de transferencia del proceso es diferente para cada perturbación y la señal de salida del controlador, los parámetros óptimos de ajuste dependen de la velocidad relativa de respuesta de la variable controlada a la perturbación; mientras más lenta sea la respuesta a la perturbación, con más rigor se puede, ajustar. el controlador y su ganancia puede ser más alta; en el otro extremo, si la variable controlada responde instantáneamente a la perturbación, el ajuste del controlador será lo menos riguroso posible, lo cual equivale al ajuste para cambios en el punto de

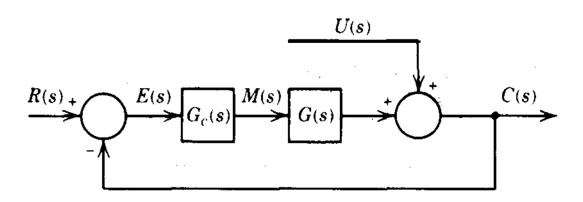


Figura 6-20*a*. Diagrama de bloques para respuesta instantánea a la entrada de una perturbación.

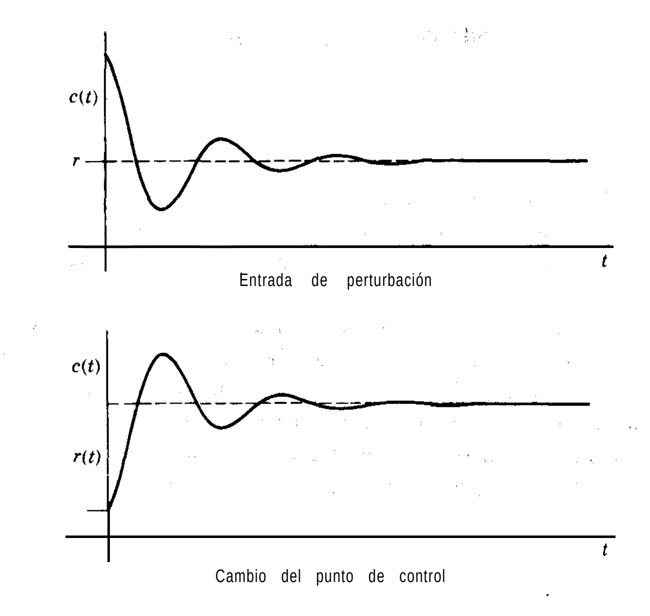


Figura 6-20*b*. La respuesta instantánea a una perturbación es idéntica a la respuesta a un cambio en el punto de control, con excepción del signo.

control. Lo anterior es evidente cuando se examina el diagrama de bloques para el caso en que la respuesta a la entrada de la perturbación es instantánea. Lo anterior se muestra en la figura 6-20*a*; como se puede ver, la perturbación entra en el mismo punto del circuito que el punto de control, lo cual hace que las respuestas a cambios escalón en la perturbación y en el punto de control sean idénticas, excepto por el signo; esto se ilustra en la figura *6-20b.*

López y asociados(5) desarrollaron fórmulas de ajuste para el criterio de integral mínima de error con base en la suposición de que la función de transferencia del proceso para las entradas de perturbaciones es idéntica a la función de transferencia para la señal de salida del controlador. En la figura 6-2 1 se muestra el diagrama de bloques del circuito para este caso, y en la tabla 6-3 se dan las fórmulas de ajuste.

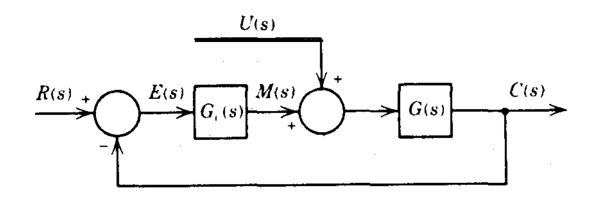


Figura 6-21. Diagrama de bloques para que la respuesta del proceso a la variable manipulada sea idéntica a la respuesta a una perturbación.

En estas fórmulas se aprecia la misma tendencia que en las de razón de asentamiento de un cuarto, con la excepción de que el tiempo de integración, depende, hasta cierto punto, de la constante de tiempo efectiva del proceso, y menos del tiempo muerto del proceso. Se debe tener en mente que estas **fórmulas** son empíricas y **no** se deben hacer extrapolaciones más allá de un rango de (t_0/τ) entre 0.1 y 1 .O. (Dicho rango de valores es el que utilizó **López** en sus correlaciones.) Como en el caso de las fórmulas de ajuste para

REGULATORIO

Tabla 63. Fórmulas de ajuste de integral mínima de error para entrada de perturbaciones.

Modelo del proceso : $G(s) = \dfrac{K e^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$

Controlador proporcional (P): $G_c(s) = K_c$

Integral del error	ICE	IAE	IAET
$K_c = \dfrac{a}{K}\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^b$	a = 1.411	0.902	0.490
	b = -0.917	-0.985	-1.084

Controlador proporcional-integral (PI) respuesta inmediata $e_{ss} = \varnothing$

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Integral de error	ICE	IAE	IAET
$K_c = \dfrac{a_1}{K}\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^{b_1}$	a_1 = 1.305	0.984	0.859
	b_1 = -0.959	0.986	-0.977
$\tau_I = \dfrac{\tau}{a_2}\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^{b_2}$	a_2 = 0.492	0.608	0.674
	b_2 = 0.739	0.707	0.680

Controlador proporcional-integral-derivativo (PID):

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)$$

Integral de error	ICE	IAE	IAET
$K_c = \dfrac{a_1}{K}\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^{b_1}$	a_1 = 1.495	1.435	1.357
	b_1 = -0.945	-0.921	-0.947
$\tau_I = \dfrac{\tau}{a_2}\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^{b_2}$	a_2 = 1.101	0.878	0.842
	b_2 = 0.771	0.749	0.738
$\tau_D = a_3\tau\left(\dfrac{t_0}{\tau}\right)^{b_3}$	a_3 = 0.560	0.482	0.381
	b_3 = 1.006	1.137	0.995

la **razón** de asentamiento de un cuarto, con **estas** fórmulas se predice que, tanto la acción proporcional como la de integración, tienden, a infinito conforme el proceso se acerca a un proceso de primer orden sin tiempo muerto y este comportamiento es típico de: las fórmulas de ajuste para entrada de disturbios.

Rovira y asociados- desarrollaron' las fórmulas de ajuste para cambios del punto de control de la tabla 6-4; ellos consideraron **que** el criterio **de ICE** mínima era inaceptable por su naturaleza altamente oscilatoria; también omitieron las relaciones para los controladores proporcionales, con base en la suposición de que el criterio de integral **mínima** de error no es apropiado para las aplicaciones donde se recomienda el **uso de un controlador** proporcional; por ejemplo, obtener el flujo promedio **mediante el** control' **proporcional** de nivel. Estas fórmulas también son empíricas y no se **deben** extrapolar **más allá** del rango de (t_0/τ) entre 0.1 y 1 .O; con ellas se predice que, **para un** proceso con una sola **capa**citancia, y sin tiempo muerto, el tiempo de integración se aproxima a la constante de tiempo

SERVOCONTROL

Tabla 6-4. Fórmulas de ajuste de integral mínima de error para cambios en el punto de control.

Modelo del proceso: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$

Controlador proporcional-integral (PI):

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Integral del error:

$$K_c = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{b_1}$$

$$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$$

	IAE	IAET
a_1 =	b.758	0.586
b_1 =	-0.861	-0.918
a_2 =	1.02	-1.03
b_2 =	-0.323	-0.165

Controlador proporcional-integral-derivativo (PID):

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)$$

Integral del error

$$K_c = \frac{a_1}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{b_1}$$

$$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$$

$$\tau_D = a_3\tau\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{b_3}$$

	IAE	IAET
a_1 =	1.086	0.965
b_1 =	-0.869	-0.855
a_2 =	0.740	0.796
b_2 =	-0.130	-0.147
a_3 =	0.348	0.308
b_3 =	0.914	0.9292

del proceso; mientras que la ganancia proporcional del proceso tiende a infinito, y el tiempo de derivación a cero. Estas tendencias son típicas de las fórmulas de ajuste del punto de control.

Ejemplo 6-12. Se deben comparar los parámetros de ajuste que se obtienen con los diferentes criterios de integral de error para entrada de perturbaciones en el controlador de temperatura del intercambiador de calor; se debe utilizar la función de transferencia del modelo POMTM del ejemplo 6-9. Se considera *a*) un controlador P, *b*) un controlador PI y c) un controlador PID.

Solución. Los parámetros para el modelo POMTM del ejemplo 6-9 son, para el método 3

$$K = 0.80\ \%/\%; \qquad \tau = 33.8\ s; \quad t_0 = 11.2\ s$$

Los parámetros de ajuste de integral mínima de error para entrada de perturbaciones se pueden calcular con las fórmulas de la tabla 6-3:

a) Controlador P

$$\text{ICE: } K_c = \frac{1.411}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.917}$$

$$= \frac{1.411}{0.80}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{-0.917} = 4.9\ \%/\%$$

$$\text{IAE: } K_c = \frac{0.902}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.985} = 3.3\ \%/\%$$

$$\text{IAET: } K_c = \frac{0.490}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{084} = 2.0\ \%/\%$$

b) Controlador PI

Al aplicar de manera semejante las fórmulas de la tabla 6-3, se obtienen los siguientes parámetros:

Criterio	ICE	IAE	IAET
K_c, %/%	4.7	3.7	3.2
τ_I, s	30.3	25.5	23.7
(min)	(0.51)	(0.42)	(0.39)

c) Controlador PID

Criterio	ICE	IAE	IAET
K_c, %/%	5.3	5.0	4.8
τ_I, s	13.1:	16.8	17.8
(min)	(0.22)	(0.28)	(0.30)
τ_D, s	6.2	4.6	4.3
(min)	(0.104)	(0.077)	(0.072)'

La primera conclusión que se obtiene al comparar estos parámetros de ajuste es que, de todas estas **fórmulas, resultan** valores del mismo orden de magnitud o "encasillados". La segunda es que, del criterio de desempeño **ICE,** resultan parámetros de control más aproximados a lo real (ganancia más alta y tiempo de integración más corto); mientras que con el IAET generalmente se **obtienen** los resultados menos aproximados a lo real.

Ejemplo 6-13. Se deben comparar las respuestas a los cambios de escalón unitario en los disturbios y en el punto de control, que se obtienen cuando se ajusta un controlador PI a IAE mínima, para las entradas de perturbaciones, contra las respuestas que se obtienen con el mismo criterio, pero respecto a cambios en el **punto** de control. El circuito se puede representar mediante el diagrama de bloques de la figura 6-2 **1,** y el proceso mediante el siguiente modelo POMTM:

$$G(s) = \frac{1.0\, e^{-0.5s}}{s + 1} \text{ \%/\%}$$

donde los parámetros de tiempo están **en** minutos.

Solución. Los parámetros POMTM son

$$K = 1.0 \text{ \%/\%}; \qquad \tau = 1.0 \text{ min}; \qquad t_0 = 0.5 \text{ min}$$

Ahora se pueden calcular los **parámetros** de ajuste para un controlador PI con las **fórmulas** de las **tablas** 6-3 y **6-4:**

Criterio IAE para perturbaciones (tabla 6-3)

$$K_c = \frac{0.984}{K}\left(\frac{t_0}{\tau_0}\right)^{-0.986}$$

$$= \frac{0.984}{1.0}(0.5)^{-0.986} = 1.95 \text{ \%/\%}$$

$$\tau_I = \frac{\tau}{0.608}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{0.707}$$

$$= \frac{1.0 \text{ min}}{0.608}(0.5)^{0.707} = 1.01 \text{ min}$$

Criterio IAE para punto de control (tabla 6-4)

$$K_c = \frac{0.758}{K}\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^{-0.861}$$

$$= \frac{0.758}{1.0}(0.50)^{-0.861} = 1.38 \ \%/\%$$

$$\tau_I = \frac{\tau}{1.02 - 0.323\ (t_0/\tau)}$$

$$= \frac{1.0 \text{ min}}{1.02 - 0.323(0.50)} = 1.16 \text{ min}$$

Para calcular las respuestas, se debe resolver para la variable de salida del diagrama de bloques de la figura 6-2 1.

Entrada de perturbación

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\ G_c(s)}; \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

Entrada del punto de control

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)\ G_c(s)}{1 + G(s)\ G_c(s)}; \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

Sin embargo, la presencia de tiempo muerto en la función de transferencia POMTM $[G(s)]$ hace impráctico invertir la transformada de Laplace mediante la expansión de fracciones parciales. Un método más práctico es resolver las ecuaciones del circuito con una computadora digital; las ecuaciones diferenciales para este circuito son las siguientes:

proceso POMTM

$$\tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = K\ [m(t - t_0) + U(t - t_0)]$$

Controlador PID

$$m(t) = m(0) + K_c\left[e(t) + \frac{1}{\tau_I}\int e(t)\ dt + \tau_D \frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

Entrada de disturbio

$U(t) = u(t)$ (escalón unitario)

Entrada del punto de control

$$r(r) = u(t) \text{ (escalón unitario)}$$

Condiciones iniciales

$$c(0) = 0$$
$$m(O) = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, Rovira@) utilizó un programa de computadora, con el cual generó las gráficas de respuesta que se muestran en la figura 6-22. La gráfica de la figura 6-22*a* es para un cambio de **escalón** unitario en la perturbación; se observa que con los parámetros de ajuste para perturbación se obtiene una desviación inicial ligeramente menor, y un retorno al punto de control **más** rápido **que** con los parámetros de ajuste para el punto de control. La figura *6-226* muestra un cambio de escalón unitario en el punto de control, y se observa que con los parámetros de ajuste se obtiene un sobrepaso significativamente menor para el punto de control, menos comportamiento oscilatorio y un tiempo de asentamiento menor que con los parámetros de ajuste para perturbación. Como se esperaba, el **desempeño de** cada conjunto de parámetros de ajuste es mejor en la entrada para la cual se diseñan. Las respuestas que se obtuvieron son resultado directo de la alta ganancia y del tiempo de reposición corto que se logran con el ajuste para perturbación.

Ajuste de controladores por muestreo de datos

La tendencia actual de la industria es hacia la implantación de funciones de control mediante la utilización de microprocesadores (controladores distribuidos) y **minicomputado-**

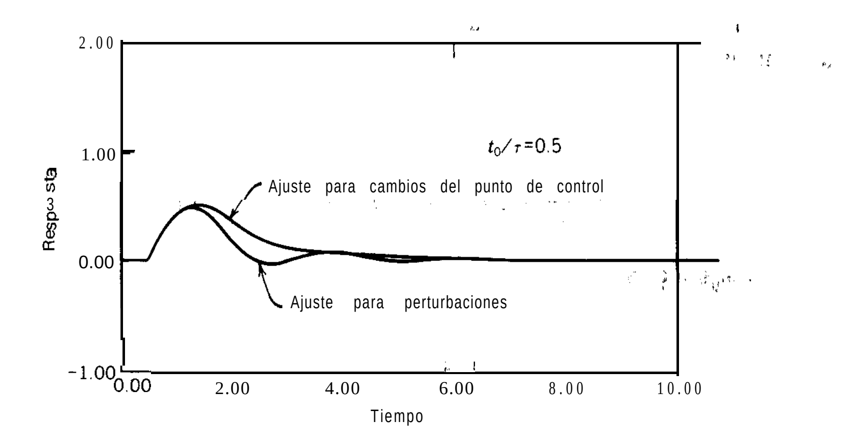


Figura 6-22*a*. Respuesta a un cambio en la perturbación; **perturbación contra ajuste del punto de control.** El controlador es PI y se utiliza criterio de IAE **mínima.** (Se **reproduce de la referencia** bibliográfica 6 con la debida autorización).

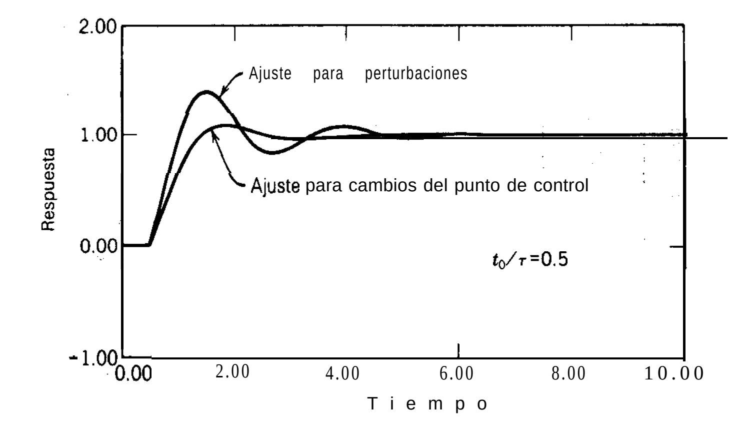


Figura 6-22*b*. Respuesta de un cambio en el punto de control; perturbación contra ajuste del punto de control. El **controlador** es PI y se utiliza criterio de IAE mínima. (Reproducción autorizada de la referencia bibliográfica 6).

ras y computadoras digitales regulares. La característica común de estos equipos es que **los cálculos** de control se **realizan** a intervalos regulares de tiempo *T*, el *tiempo de muestreo;* esto contrasta con los instrumentos analógicos (electrónicos y neumáticos) donde las funciones se realizan continuamente en el tiempo. El muestreo también es característico de algunos analizadores, por ejemplo, los cromatógrafos de gas en línea.

El modo discreto es la característica de operación de las computadoras y, por tanto, se requiere que a cada **instante** de muestreo se muestre la señal del transmisor, se calcule el valor de la variable manipulada y se actualice la señal de salida del controlador; entonces, las **señales** de salida se mantienen constantes durante un intervalo completo de muestreo, hasta la siguiente actualización, lo cual se ilustra en la figura 6-23. Como se podría esperar, esta operación de muestreo **y mantenimiento** tiene efecto sobre el desempeño del controlador y, en **consecuencia**, sobre sus **parámetros** de ajuste.

El tiempo de muestreo de los controladores por computadora varía desde, aproximadamente, 1/3 seg hasta varios **minutos**, en función **de la** aplicación; una buena regla práctica consiste en **que el tiempo de muestreo sea de un décimo** a un **vigésimo** de la constante de tiempo efectiva del **proceso. Cuando el tiempo** de muestreo es de **este** orden de magnitud, en las **fórmulas** de ajuste su **efecto se puede considerar** con la adición de un medio del tiempo de muestreo al tiempo **muerto del** proceso **y, entonces, se** utiliza este tiempo muerto corregido en las fórmulas de ajuste para controladores continuos (tablas **6-2, 6-3** y 64). En este **método**, propuesto por **Moore y asociados**[10], se expresa que el tiempo muerto utilizado en las fórmulas de ajuste es

$$t_{0c} = t_0 + \tfrac{1}{2}T \tag{6-49}$$

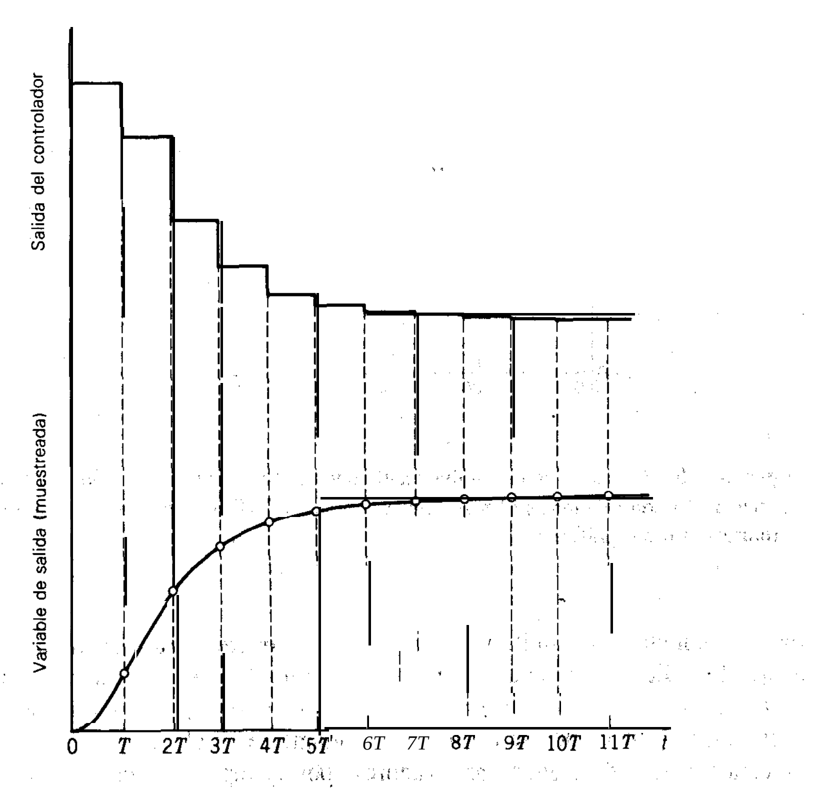


Figura 6-23. La respuesta de un controlador por muestreo de datos (computadora) se mantiene constante durante cada período de muestreo *T*.

donde:

t_{0_c} es el tiempo muerto correcto
t_0 es el tiempo muerto del proceso
T es el tiempo de muestreo

Cabe hacer notar que, con el método de'ajuste en línea, se incorpora implícitamente el efecto del 'muestreo cuando se determinan la ganancia y el período últimos del circuito con el controlador por muestreo de datos en posición de automático.

Chiu y asociados[11] desarrollaron las fórmulas de ajuste especificas para. los controladores por muestreo de datos y Corripio[12] las reprodujo.

Resumen

En esta sección se presentaron dos métodos para medir las características de un proceso con control mediante un circuito de retroalimentación: el de la ganancia última y el

de prueba escalón o curva de reacción, del proceso. También se presentó un conjunto de fórmulas de ajuste para el método de ganancia última y tres conjuntos de fórmulas para los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto. Se observó que, para un proceso dado, con los cuatro conjuntos de fórmulas de ajuste se obtienen parámetros del controlador que se encuentran en el mismo "encajonamiento"; estos parámetros de ajuste son únicamente valores iniciales que se deben ajustar en el campo, de manera que el controlador coincida con la "personalidad" verdadera del proceso específico. Se debe recordar una observación que se hizo al principio de esta sección: según se expuso en los capítulos anteriores, la mayoría de los procesos no son lineales, y sus características dinámicas (i, e., ganancia última y frecuencia última, parámetros del modelo POMTM) varían de un punto de operación a otro, de aquí se concluye que, en el mejor de los casos, los parámetros del controlador a los que se llega mediante el procedimiento de ajuste, son un arreglo entre el comportamiento lento en un extremo del rango de operación y el comportamiento oscilatorio en el otro; en resumen, el ajuste no es una ciencia exacta. Sin embargo, también se debe tener en cuenta que con las fórmulas de ajuste se tiene una visión de la manera en que los diferentes parámetros del controlador dependen de los parámetros del proceso, tales como la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto.

6-4. SÍNTESIS DE LOS CONTROLADORES POR RETROALIMENTACIÓN

En la sección precedente la atención se centró en el ajuste de un controlador por retroalimentación mediante el ajuste de los parámetros en la estmctura de control proporcional-integral-derivativa (PID). En esta sección se hará un enfoque diferente del diseño del controlador, la síntesis del mismo:

> Dadas las funciones dé transferencia de las componentes de un circuito de retroalimentación, se debe sintetizar el controlador que se requiere para producir una respuesta específica de circuito cerrado.

A pesar de que no se tiene la seguridad de que el controlador resultante del procedimiento de síntesis se pueda construir en la práctica, se espera obtener alguna visión que aporte elementos para la selección de los diferentes modos del controlador y su ajuste.

Desarrollo de la fórmula de síntesis del controlador

A continuación se considera el diagrama de bloques simplificado de la figura 6-24, en el cual las funciones de transferencia de todas las componentes del circuito, diferentes del controlador, se concentran en un solo bloque, $G(s)$; del álgebra de diagramas de bloques se tiene que la función de transferencia para el circuito cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \tag{6-50}$$

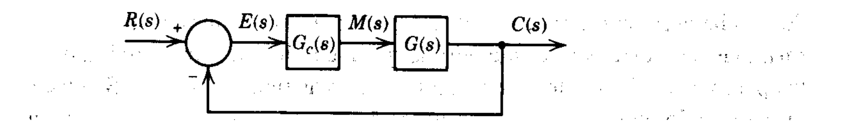


Figura 6-24. Diagrama de bloques simplificado para la síntesis de'un controlador.

Entonces, a partir de esta expresión, para la función de transferencia del controlador se puede resolver:

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{C(s)/R(s)}{1 - [C(s)/R(s)]} \tag{6-51}$$

Ésta es la ***fórmula de síntesis del controlador***, la cual da por resultado la función de transferencia del controlador $G_c(s)$, a partir de la. función de transferencia del proceso $G(s)$ y la respuesta de circuito cerrado que se especifique, $C(s)/R(s)$. Para ilustrar la forma en que se utiliza esta fórmula, a continuación se considera la especificación del control perfecto, es decir, $C(s) = R(s)$ o $C(s)/R(s) = 1$; el controlador que resulta es

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{0} \tag{6-52}$$

Esto indica que, para que la salida sea siempre igual al. punto de control, la ganancia del controlador debe ser infinita; en otras palabras, el control perfecto no se puede lograr con la retroalimentación, debido a que cualquier corrección por retroalimentación se basa en un error.

De la fórmula de síntesis de controlador, ecuación (6-51), resultan diferentes controladores para diferentes combinaciones de especificaciones de respuesta de circuito cerrado y funciones de transferencia de proceso. A continuación se aborda cada uno de estos elementos a la vez.

Especificación de la respuesta de circuito cerrado

La respuesta de circuito cerrado más. simple que se puede lograr es la de retardo de primer orden, en ausencia de tiempo muerto en el proceso; esta respuesta es la que se muestra en la figura 6-25, y resulta de la función de' transferencia de circuito cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau_c s + 1} \tag{6-53}$$

donde τ_c es la constante de tiempo de la respuesta de circuito cerrado y, si se ajusta, se convierte en el único ***parámetro de*** ajuste del controlador sintetizado; mientras más pequeña es τ_c, el ajuste del controlador es más estricto.

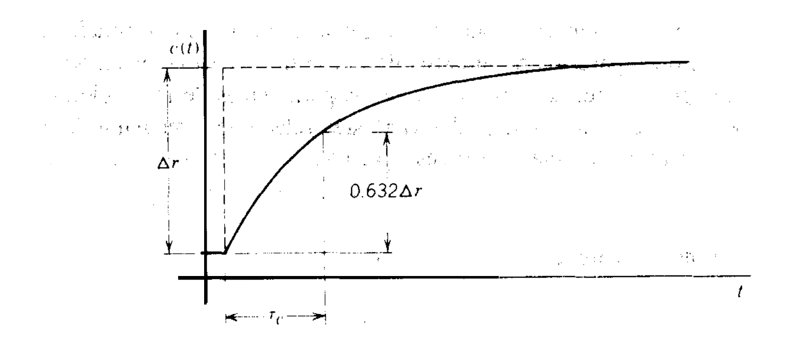


Figura 6-25. Especificación de retardo de primer orden para la respuesta de circuito cerrado de un controlador sintetizado.

Nota:. Dahlin[1] fue quien propuso originalmente esta respuesta y definió el parámetro de ajuste como el recíproco de la constante de tiempo de circuito cerrado, $\lambda = 1/\tau_c$. En este libro se utilizará τ_c

Al substituir la ecuación (6-53) en la ecuación (6-51), se obtiene

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{\frac{1}{\tau_c s + 1}}{1 - \frac{1}{\tau_c s + 1}} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_c s + 1 - 1}$$

o

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \tag{6-54}$$

Se observa que este controlador tiene acción integral, la cual resulta de la especificación de ganancia unitaria en la función de transferencia de circuito cerrado, ecuación (6-53), y asegura la ausencia de desviación.

A pesar de que se pueden especificar- respuestas de segundo orden o superiores para el circuito cerrado, rara vez es necesario hacerlo; sin embargo, cuando el proceso contiene tiempo muerto, en la respuesta de circuito cerrado se debe incluir un término de tiempo muerto igual al tiempo muerto del proceso. A continuación se abordará esto brevemente, pero antes se verá la manera en que la síntesis del controlador puede servir de guía al seleccionar los modos del controlador para diferentes funciones de transferencia del proceso.

Modos del controlador y parámetros de ajuste

La síntesis del controlador permite establecer una relación entre la función de transferencia del proceso y los modos de un controlador PID, debido a que, para funciones de transferencia simples, sin tiempo muerto, el controlador sintetizado se puede expresar en términos

de los modos proporcional, integral y derivativo. De la síntesis del controlador también se obtienen las relaciones para los parámetros de ajuste del controlador en términos de la constante de tiempo de circuito cerrado, τ_c, y los parámetros de la función de transferencia del proceso. A continuación se derivan estas relaciones, mediante la substitución de funciones de transferencia de proceso cada vez más complejas en la ecuación (6-54).

Respuesta instantánea del proceso: $G(s) = K$.

$$G_c(s) = \frac{1}{K\tau_c} \cdot \frac{1}{s} \tag{6-55}$$

donde K es la ganancia del proceso.

Éste es un controlador *integral* puro, el cual es recomendable para procesos muy rápidos, porejemplo, controladores de flujo, gobernadores de turbinas'de vapor y control de la temperatura de salida de hornos de reformación.

Proceso de primer orden: $G(s) = K/(\tau s + 1)$.

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \\ &= \frac{\tau}{K\tau_c}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \end{aligned} \tag{6-56}$$

donde τ es la constante de tiempo del proceso.

Éste es un controlador proporcional-integral **(PI),** con los siguientes parámetros de ajuste:

$$K_c = \frac{\tau}{K\tau_c} \qquad \tau_I = \tau \tag{6-57}$$

o, en otras palabras, el tiempo de integración se iguala con la constante de tiempo de proceso y la ganancia proporcional es ajustable. Se notará que, si se conoce la constante de tiempo del proceso, τ, el ajuste se reduce a ajustar un solo parámetro: la ganancia del controlador, debido a que el parámetro de ajuste τ_c únicamente afecta a la ganancia del controlador.

Proceso de segundo orden: $G(s) = K/[(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)]$.

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \\ &= \frac{\tau_1}{K\tau_c}\left(1 + \frac{1}{\tau_1 s}\right)(\tau_2 s + 1) \end{aligned} \tag{6-58}$$

donde:

τ_1 es la constante de tiempo más larga o predominante del proceso
τ_2 es la constante de tiempo más corta del proceso

La ecuación (6-58) satisface la función de transferencia del controlador industrial PID que se trató en el capítulo 5, siempre y cuando se desprecie el término de filtro de ruido $(\alpha\ \tau_D s + 1)$:

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)\left(\frac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1}\right) \qquad (6\text{-}59)$$

Entonces los parámetros de ajuste son

$$K_c = \frac{\tau_1}{K\tau_c} \qquad \tau_I = \tau_1 \qquad \tau_D = \tau_2 \qquad (6\text{-}60)$$

Nuevamente, el procedimiento de ajuste se reduce a ajustar la ganancia del proceso con el tiempo de integración, igual a la constante de tiempo más larga; y el tiempo de derivación, igual a la constante de tiempo más corta. Esta elección arbitraria resulta de la experiencia que indica que el tiempo de derivación debe ser siempre menor al de integración. En la práctica industrial se utilizan generalmente los controladores PID en circuitos de control de temperatura, de manera que la acción derivativa compense el retardo del sensor. Como se ve, se llega a este mismo resultado mediante la síntesis del controlador.

Se puede apreciar fácilmente que para un proceso de tercer orden se requiere un segundo término de derivación, en serie con el primero y con su constante de tiempo igual a la tercera constante de tiempo del 'proceso más larga, y así, sucesivamente. Una razón para no utilizar esta idea en la práctica es que el controlador sería muy complejo y caro; además, los valores de la tercera y subsecuentes constantes de tiempo de proceso son muy difíciles de determinar en la práctica; el procedimiento común es aproximar los procesos de orden superior con modelos de primer orden más tiempo muerto. A continuación se sintetiza el uontrolador para tal aproximación de la función de transferencia del proceso.

Proceso de primer orden más tiempo muerto: $G(s) = (Ke^{-t_0 s})/(\tau s + 1)$.

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{\tau s + 1}{Ke^{-t_0 s}} \cdot \frac{1}{\tau_c s} \\ &= \frac{1}{K_c}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)e^{t_0 s} \end{aligned} \qquad (6\text{-}61)$$

donde t_0 es el tiempo, muerto del proceso.

Se aprecia inmediatamente que este ***controlador es irrealizable,*** ya que se requiere un conocimiento del futuro, es decir, un tiempo muerto negativo. Esto es aún más obvio cuando la respuesta que se especifica se compara gráficamente con la mejor posible en

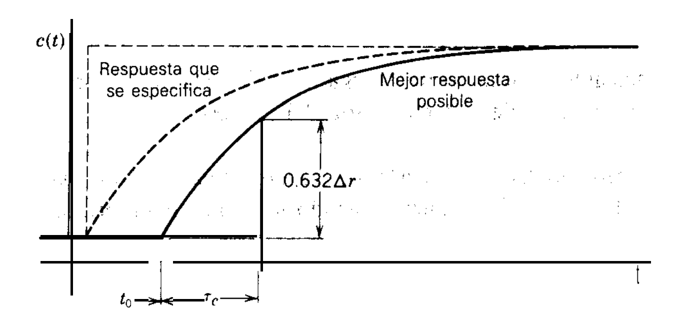


Figura 6-26. Especificación de la respuesta de circuito cerrado de un sistema con tiempo muerto t_o.

circuito cerrado, como se ilustra en la figura 6-26; en esta comparación es evidente que la respuesta especificada se debe retardar mediante algún tiempo muerto en el proceso:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{e^{-t_0 s}}{\tau_c s + 1} \tag{6-62}$$

De esto resulta la siguiente función de transferencia para el controlador sintetizado:

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{Ke^{-t_0 s}} \frac{e^{-t_0 s}}{\tau_c s + 1 - e^{-t_0 s}}$$

o

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{\tau_c s + 1 - e^{-t_0 s}} \tag{6-63}$$

Aunque en principio este controlador se puede realizar actualmente, su implementación esta lejos de ser una práctica común, debido, sobre todo, a que originalmente los controladores PID se implementaron con componentes analógicos, y el término $e^{-t_0 s}$ no se puede implementar en la práctica con dispositivos analógicos. La implementación moderna de los controladores PID con microprocesadores y computadoras digitales hace posible la implantación del término del tiempo muerto; cuando se hace esto, el término se conoce como "predictor" o "compensación de tiempo muerto".

Para convertir el algoritmo de la ecuación (6-63) a la forma PI estándar, se hace la aproximación del término exponencial mediante la expansión de series de Taylor:

$$e^{-t_0 s} = 1 - t_0 s + \frac{1}{2!}(t_0 s)^2 - \frac{1}{3!}(t_0 s)^3 + \ldots \tag{6-64}$$

Si se elimina todo, menos los dos primeros términos, se obtiene una aproximación de primer orden:

$$e^{-t_0 s} \doteq 1 - t_0 s \tag{6-65}$$

Al substituir esta expresión en la ecuación (6-63) y simplificar, se tiene

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{\tau s + 1}{K} \cdot \frac{1}{(\tau_c + t_0)s} \\ &= \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)}\left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \end{aligned} \tag{6-66}$$

Éste es un controlad& PI con el siguiente ajuste:

$$K_c = \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} \qquad \tau_I = \tau \tag{6-67}$$

La aproximación de primer orden por expansión de Taylor sólo es válida mientras el tiempo muerto es pequeña en comparación con velocidad de respuesta en circuito cerrado; en otras palabras, un controlador PI sin compensación de tiempo muerto es una buena aproximación de un controlador sintetizado, siempre y cuando el tiempo muerto del proceso sea pequeño en comparación con la constante de tiempo. En general, éste es el caso cuando el proceso no tiene un tiempo muerto verdadero; con el tiempo muerto del modelo se toma en cuenta principalmente la parte de orden superior del proceso.

La conclusión más importante que se tiene de las relaciones de ajuste de la ecuación (6-67) es que, al incrementar el tiempo muerto, resulta una reducción en la ganancia del controlador para una cierta especificación de la constante de tiempo en circuito cerrado. Si se comparan las ecuaciones (6-57) y (6-67), se observa que con la presencia del tiempo muerto se impone un límite-a la ganancia del controlador; en otras palabras, para el proceso de primer orden sin tiempo muerto, ecuación (6-57), la ganancia se puede aumentar sin límite para obtener respuestas ($\tau_c \rightarrow 0$) cada vez más rápidas; sin embargo, para procesos con tiempo muerto efectivo, ecuación (6-67), se tiene el siguiente límite para la ganancia del controlador:

$$K_{c_{\text{máx}}} = \lim_{\tau_c \to 0} \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} = \frac{\tau}{K t_0} \tag{6-68}$$

Conforme se incrementa la ganancia del controlador, la respuesta en lazo cerrado se desvía de la respuesta de primer orden especificada; esto es, del incremento de la ganancia puede resultar al final un sobrepaso e incluso una inestabilidad de la respuesta de circuito cerrado, debido a que el error de la aproximación de primer orden por expansión de Taylor se incrementa con la velocidad de respuesta, ya que s se incrementa con la velocidad. (Se recordará que s, variable de la transformada de Laplace, está en unidades recíprocas de tiempo o frecuencia y, por tanto, mientras más altas son las velocidades de respuesta o frecuencias, mayor es la magnitud de s.)

Modo derivgtivo para procesos con tiempo muerto

Si se utiliza un modelo de segundo orden más tiempo muerto para aproximar un proceso de orden superior, se sigue un proceso similar al que se utilizó para el modelo. de primer orden más tiempo muerto con que se obtuvo el controlador sintetizado, el cual es equivalente a un controlador PID industrial, ecuación (6-59); esta deducción se deja como ejercicio para el lector. Sin embargo a causa de que es difícil determinar los parámetros de un modelo de segundo orden, es más atractivo derivar las fórmulas de ajuste para un controlador PID con base en los parámetros de un modelo de primer orden más tiempo muerto, lo cual se puede hacer mediante la utilización de una aproximación diferente al término en tiempo muerto de la ecuación (6-63). La aproximación de primer orden de Padé a la exponencial, la cual se presento anteriormente, se expresa con

$$e^{-t_0 s} \doteq \frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s} \tag{6-69}$$

Si se efectúa la división indicada en esta expresión, resulta la siguiente serie infinita:

$$\frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s} = 1 - t_0 s + \frac{1}{2}(t_0 s)^2 - \frac{1}{4}(t_0 s)^3 + \tag{6-70}$$

Por comparación con la ecuación (6-64), se notará que esta expresión coincide en los tres primeros términos con la expansión de la exponencial por series de Taylor y, por tanto, es un poco más precisa que la aproximación que se da en la ecuación (6-65). Esto significa que la ecuación (6-69) es más cercana a la expresión exponencial verdadera para -procesos con tiempo muerto superior y razón de tiempo constante.

Se substituye la ecuación (6-69) en la (6-63) y se simplifica para obtener el siguiente controlador sintetizado:

$$G_c(s) = \frac{\qquad}{\tau_c + t_0)} \; 1 + \frac{1}{\tau s}\Bigg)\left(\frac{1 + \frac{t_0}{2}s}{1 + \tau' s}\right) \tag{6-71}$$

donde:

$$\tau' = \frac{\tau_c t_0}{2(\tau_c + t_0)}$$

Éste es equivalente a un controlador PID industrial, ecuación (6-59), con parámetros de ajuste:

$$K_c = \frac{\tau}{K(\tau_c + t_0)} \qquad \tau_I = \tau \qquad \tau_D = \frac{t_0}{2} \tag{6-72}$$

Aunque en la función de transferencia del controlador industrial existe un término de retardo para evitar la amplificación de ruido de alta frecuencia, generalmente la constante de tiempo τ' es fija y mucho más pequeña que τ_D. Para interpretar el significado del término $(1 + \tau' s)$, primero se debe observar que para tiempos muertos pequeños $(t_o \ll \tau_c)$

$$\tau' = \frac{t_0}{2} \tag{6-73}$$

De la substitución de esta ecuación en la **(6-71)**, resulta exactamente el mismo controlador PI que expresa la ecuación **(6-66)**, con lo cual se confirma la conclusión anterior de que el controlador PI es el adecuado cuando el tiempo muerto es corto. Para tiempos muertos largos y control estricto ($\tau_c \to 0$), el valor de τ' se convierte en

$$\tau' = \frac{\tau_c}{2} \to 0 \tag{6-74}$$

Por lo tanto, para tiempos muertos largos, mientras más estricto es el control, más cercano es, el algoritmo sintetizado, ecuación (6-71), al controlador industrial PID cuyos parámetros de ajuste son los de la ecuación (6-72).

Es interesante notar que el tiempo de derivación de la ecuación (6-72) es exactamente el mismo que el obtenido mediante las formulas de Ziegler-Nichols para razón de asentamiento de un cuarto (ver tabla 6-2). Sin embargo, la ganancia proporcional para razón de asentamiento de un cuarto es 20% más alta que la ganancia máxima por síntesis (τ_c = 0), y el tiempo de integración de la fórmula de síntesis se relaciona con la constante de tiempo del modelo; por su parte, en la fórmula para la razón de asentamiento de un cuarto se relaciona con el tiempo muerto del modelo.

En la tabla 6-5 se resume la selección de modos del controlador y parámetros de ajuste que resulta del procedimiento de síntesis para la respuesta de Dahlin. El hecho de que la ganancia del controlador sea una función del parámetro de ajuste τ_c es tanto una ventaja como una desventaja de las fórmulas de ajuste que se obtienen con el procedimiento de síntesis. Es una ventaja porque permite al ingeniero lograr una respuesta específica mediante el ajuste de un solo parámetro, la ganancia, sin importar cuántos modos existan del controlador; sin embargo, la ganancia ajustable es una desventaja, porque con las fórmulas no se obtiene un valor "encajonado" para ésta. Para remediar tal situación, se dan las siguientes guías:

IAE mínima. Para ***entrada de perturbaciones,*** con τ_c = 0 se minimiza aproximadamente la IAE cuando t_o/τ esta entre 0.1 y 0.5 para los controladores PI (ro = 0), y entre 0.1 y 1.5 para los controladores PID. Para cambios en el punto de control, con las siguientes fórmulas se obtiene una IAE aproximadamente mínima cuando t_o/τ esta en el rango de 0.1 a 1.5:

Tabla 6-5. Modos de controlador y fórmulas de **ajuste** para síntesis Dahlin.

Proceso	*Controlador*	*Parámetros de ajuste*
$G(s) = K$	I	$K_c = \frac{1}{K\tau_c}$ ajustable
$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$	PI	$K_c = \frac{\tau}{K\tau_c}$ ajustable $\tau_I = \tau$
$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ $\tau_1 > \tau_2$	PID	$K_c = \frac{\tau_1}{K\tau_c}$ ajustable $\tau_I = \tau_1$ $\tau_D = \tau_2$
$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$	PID[a]	$K_c = \frac{\tau}{K(t_0 + \tau_c)}$ ajustable $\tau_I = \tau$ $\tau_D = \frac{t_0}{2}$

[a] Este último sistema de **fórmulas** se aplica tanto a los controladores PID como a los PI ($\tau_D = 0$). El controlador **PID** se **recomienda cuando** t_o es mayor que $\tau/4$.

Precaución: Los **parámetros** de **ajuste PID en esta** tabla son para **controladores PID analógicos [Ec. (5-45)].** Para su **utilización con controladores** que se basan en microprocesador& **[Ec. (5-44)], los pa-** rámetros de ajuste de esta tabla se deben **convertir** mediante las siguiente5 fórmulas:

$$K_c' = K_c\left(1 + \frac{\tau_D}{\tau_I}\right)$$

$$\tau_I' = \tau_I + \tau_D$$

$$\tau_D' = \tau_D \frac{\tau_I}{\tau_I + \tau_D}$$

Controlador PI ($\tau_D = 0$)

$$\tau_c = \frac{2}{3} t_0 \qquad (6\text{-}75a)$$

Controlador PID

$$\tau_c = \frac{1}{5} t_0 \qquad (6\text{-}75b)$$

Estas **fórmulas** se usan **con** el **último** renglón de' **la** tabla **6-5**.

Sobrepaso del 5%. **Para** entradas **del punto** de control es deseable tener una respuesta con sobrepaso de 5 % del valor del cambio 'en el punto de control. Para este tipo de respuesta, Martin y asociados@) recomiendan que τ_c se iguale con el tiempo muerto efectivo del modelo POMTM, de lo cual resulta la siguiente formula para la ganancia del controlador con que se produce un sobrepaso de *5%* de los *cambios en el punto de control:*

$$K_c = \frac{0.5}{K}\frac{\tau}{t_0} \tag{6-76}$$

Al comparar esta fórmula con la de la tabla 6-2, se observa que esto es aproximadamente 40% de la ganancia que se requiere en el PID para razón de asentamiento de un cuarto (sobrepaso del 50 %) .

Un punto interesante acerca del método de síntesis de controladores es que, si los controladores se hubieran diseñado desde un principio de este modo, en la evolución de los modos de los controladores se habría seguido el patrón 1, PI, PID, el cual se deduce a partir de la consideración del modelo de proceso más simple hasta el más complejo. Esto contrasta con la evolución real de los controladores industriales: P, PI, PID, es decir, del controlador más simple hasta el más complejo.

Una visión importante que se puede obtener con base en el procedimiento de síntesis del controlador es que el efecto principal de añadir el modo proporcional al modo integral básico, es compensar el ratardo más largo o dominante del proceso; mientras que el del modo derivativo es compensar el segundo retardo más largo o el tiempo muerto efectivo del proceso. El procedimiento entero de síntesis se basa en la suposición de que la especificación principal de la respuesta de circuito cerrado tiene como función eliminar la desviación o el error de estado estacionario, lo cual hace que la acción integral sea el modo básico del controlador.

Ejemplo 6-14. Para el intercambiador de' calor del ejemplo 6-5 se deben determinar los parámetros de ajuste mediante la utilización de las fórmulas que se obtuvieron con el método de síntesis de controlador. Se deben comparar estos resultados con los obtenidos mediante las fórmulas de ajuste de IAE mínima para entradas del punto de control.

Solución. Los parámetros POMTM que se obtuvieron para el intercambiador de calor mediante el método 3 en el ejemplo 6-9 són

$$K = 0.80\ \%/\% \qquad \tau = 33.8\ \text{s} \qquad t_0 = 11.2\ \text{s}$$

Mediante la substitución de estos valores en la ecuación (6-71) se obtiene la función de transferencia del controlador sintetizado:

$$G_c(s) = \frac{33.8}{0.80(\tau_c + 11.2)}\left(1 + \frac{1}{33.8s}\right)\left\{\frac{1 + 5.6s}{1 + \dfrac{5.6\tau_c}{\tau_c + 11.2}s}\right\}$$

Puesto que en este caso el tiempo muerto es mayor que-un cuarto de la constante de tiempo, lo recomendable es utilizar un controlador PID. La ganancia de IAE mínima para perturbación se obtiene con $\tau_c = 0$:

$$K_c = \frac{33.8}{(0.80)(11.2)} = 3.8 \ \%/\%$$

Para IAE mínima de entrada del punto de control, de la ecuación (6-57*b*), se tiene

$$\tau_c = \frac{1}{5}(11.2) = 2.24 \text{ s}$$

$$K_c = \frac{33.8}{(0.80)(2.24 + 11.2)} = 3.1 \ \%/\%$$

Para un sobrepaso de 5% en la entrada del punto de control, de la ecuación (6-76), se tiene

$$K_c = \frac{(0.5)(33.8)}{(0.8)(11.2)} = 1.9 \ \%/\%$$

Los tiempos de integración y derivación son

$$\tau_I = \tau = 33.8 \text{ s} \qquad (0.56 \text{ min})$$

$$\tau_D = \frac{t_0}{2} = 5.6 \text{ s} \qquad (0.093 \text{ min})$$

Para la comparación, los parámetros de IAE mínima para las entradas del punto de control se calculan mediante las fórmulas PID de la tabla 6-4:

$$K_c = \frac{1.086}{0.80}\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{-0.869} = 3.5 \ \%/\%$$

$$\tau_I = \frac{33.8}{0.740 - 0.130(11.2/33.8)} = 48.5 \text{ s} \qquad (0.81 \text{ min})$$

$$\tau_D = 0.348(33.8)\left(\frac{11.2}{33.8}\right)^{0.914} = 4.3 \text{ s} \qquad (0.071 \text{ min})$$

Ambos conjuntos de parámetros están en el mismo encajonamiento.

Ejemplo 6-15. En un proceso de segundo orden más tiempo muerto se tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1.0e^{-0.26s}}{s^2 + 4s + 1}$$

Se deben comparar las respuestas de un controlador PI a un cambio en el punto de control tipo escalón, con ajuste mediante *a)* la razón de asentamiento de un cuarto de Ziegler-Nichols, *b)* IAE mínima para cambios en el punto de control, c) síntesis de controlador con ajuste de ganancia para un sobrepaso del 5%. Se utilizará la figura 6-18 para obtener los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM).

Solución. El primer pasó es aproximar la función de transferencia de segundo orden con un modelo POMTM; se empieza por factorizar el denoniidador en dos constantes de tiempo:

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) = \tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1$$

$$= s^2 + 4s + 1$$

$$\tau_1\tau_2 = 1 \qquad \tau_1 + \tau_2 = 4$$

$$\tau_1 + \frac{1}{\tau_1} - 4 = 0 \qquad \text{or} \qquad \tau_1^2 - 4\tau_1 + 1 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 4}}{2} = 3.73 \text{ min}$$

$$\tau_2 = 4 - 3.73 = 0.27 \text{ min}$$

Entonces, la función de transferencia se puede escribir como

$$G(s) = \frac{1.0e^{-0.26s}}{(3.73s + 1)(0.27s + 1)}$$

El segundo paso consiste en aproximar el retardo de segundo orden con un modelo POMTM, si se usa la figura 6-18:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{0.27}{3.73} = 0.072 \qquad \begin{aligned} \tau' &= 1.0\tau_1 = 3.73 \text{ min} \\ t_0' &= 0.072\tau_1 = 0.27 \text{ min} \end{aligned}$$

se notara que la segunda constante de tiempo es lo suficientemente pequeña como para aplicar la simple regla práctica de la sección 6-3, que es $\tau' = \tau_1, t_o' = \tau_2$. El tiempo muerto efectivo del modelo POMTM se debe añadir al tiempo muerto del proceso real, para obtener el tiempo muerto total;.

$$t_0 = 0.26 + t_0' = 0.53 \text{ min}$$

Entonces, los parámetros POMTM son

$$K = 1.0 \qquad \tau = 3.73 \text{ min} \qquad t_0 = 0.53 \text{ min}$$

El tercer paso es calcular los parámetros de ajuste a partir de las fórmulas que se especificaron. Para un controlador PI:

a) Razón de asentamiento de un cuarto {de la tabla 6-2)

$$K_c = \frac{0.90}{1.0}\left(\frac{0.53}{3.73}\right)^{-1} = 6.3 \text{ \%/\% (16\% P.B.)}$$

$$\tau_I = 3.33 t_0 = 3.33(0.53) = 1.76 \text{ min}$$

b) IAE mínima para cambios en el punto de control (de la tabla 6-4)

$$K_c = \frac{0.758}{1.0}\left(\frac{0.53}{3.73}\right)^{-0.861} = 4.1 \text{ \%/\% (24.6\% P.B.)}$$

$$\tau_I = \frac{3.73}{1.02 - 0.323(0.53/3.73)} = 3.83 \text{ min}$$

c) Síntesis del controlador con ajuste para un sobrepaso del 5% (de la ecuación 6-67).

$$\tau_I = \tau = 3.73 \text{ min}$$

De la ecuación (6-76) se tiene que, para un sobrepaso del 5%

$$\tau_c = t_0 = 0.53 \text{ min}$$

$$K_c = \frac{3.73}{2(0.53)} = 3.57 \text{ \%/\% (28.4\% PB)}$$

El último paso consiste en comparar las respuestas al escalón unitario en el punto de control, mediante la utilización de cada uno de estos tres juegos-de parámetros de ajuste. Martín y asociados[8] publicaron la solución a este problema, misma que obtuvieron mediante la utilización de una computadora analógica para simular el siguiente sistema de ecuaciones (ver figura 6-22, donde aparece el diagrama a bloques correspondiente):

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 4\frac{dc(t)}{dt} + c(r) = m(t - 0.26) \qquad c(0) = 0$$

$$m(t) = K_c\left[e(t) + \frac{1}{\tau_I}\int e(t)\,dt\right] \qquad m(0) = 0$$

$$e(t) = r(t) - c(t) \qquad r(0) = 0$$

$$r(t) = 1 \qquad \text{for } t > 0$$

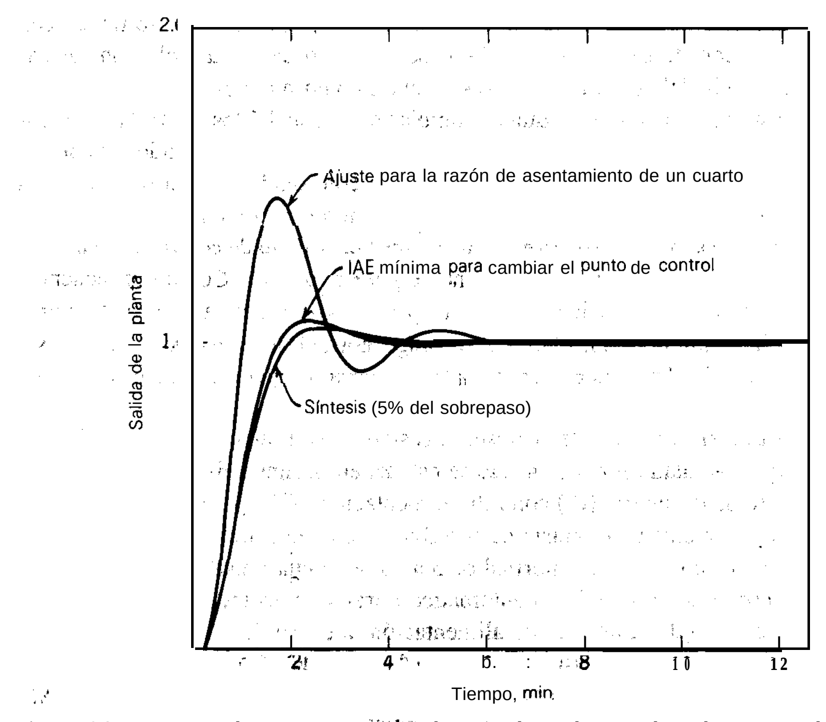


Figura 6-27. Respuesta de circuito cerrado de una planta de segundo orden y controlador PI a un cambio en el punto de control. Los parámetros del modelo son: τ = 3.7 min, t_0 = 0.53 min, K = 1. (Reproducción autorizada de la referencia bibliográfica 8, ©, ISA, 1976).

Se utilizó una aproximación estándar de Padé para simular el tiempo muerto.

En la figura 6-27 se ilustran las repuestas que resultan. En la comparación de las respuestas se observa que con las fórmulas de síntesis del controlador para un sobrepaso del 5 % se obtiene una respuesta muy cercana a la respuesta de IAE mínima para el punto de control. Estas respuestas son superiores a la de razón de' asentamiento de un cuarto, en términos de estabilidad y tiempo de asentamiento para cambios en el punto de control.

Resumen

En esta sección se presentó la técnica de síntesis. De los controladores sintetizados resultantes se obtuvo una nueva visión de las funciones de los modos proporcional, integral y derivativo; también se obtuvo un conjunto de relaciones de ajuste para los controladores PID.

6-5. PREVENCIÓN DEL REAJUSTE EXCESIVO

En las secciones precedentes se vio que la acción de integración o de reajuste es necesaria para eliminar la desviación o error de estado estacionario en los controladores por retroa-

limentación. Como se explicó en el capítulo 5, uno de los perjuicios que se tienen con esta ventaja es el "reajuste excesivo" o sobrepaso excesivo de la variable controlada, cuando la señal de salida del controlador regresa a su rango normal después de un período de saturación; a esto se debe que se requiera cambiar a "manual" los controladores durante el arranque o parada del proceso, ya que bajo esas condiciones es cuando los controladores se saturan con más frecuencia. Se dice que el controlador se satura cuando su señal de salida está en o fuera de los límites de operación de la válvula de control o elemento final de control; cuando esto ocurre, se interrumpe el circuito de control y la variable controlada se desvía del punto de control, como se podría esperar. Como consecuencia de la acción de integración, se puede requerir una gran desviación en la dirección contraria para regresar la salida del controlador a su rango normal de operación. El reajuste excesivo es esta incapacidad para que el controlador se pueda recuperar rápidamente de una condición de saturación.

A fin de repasar el concepto de reajuste excesivo, a continuación se considera el arranque del tanque calentado por vapor que se esboza en la figura 6-28*a*. Se utiliza un controlador proporcional-integral (PI) con retroalimentación (TIC) para controlar la temperatura en el tanque, mediante el ajuste de la válvula de control del vapor. Los instrumentos son neumáticos con un rango normal de 3 a 15 psi y una presión de alimentación de 20 psig. Si el controlador se deja en automático durante el arranque, su salida se va al valor máximo, 20 psig de la presión de alimentación, a causa de la acción de integración, debido a que la temperatura permanece debajo del punto de régimen durante un largo período. En la figura 6-28*b* se ilustra el registro de tiempo durante el arranque del proceso. Al inicio la válvula de vapor se abre totalmente, mientras la variable de salida del contro-

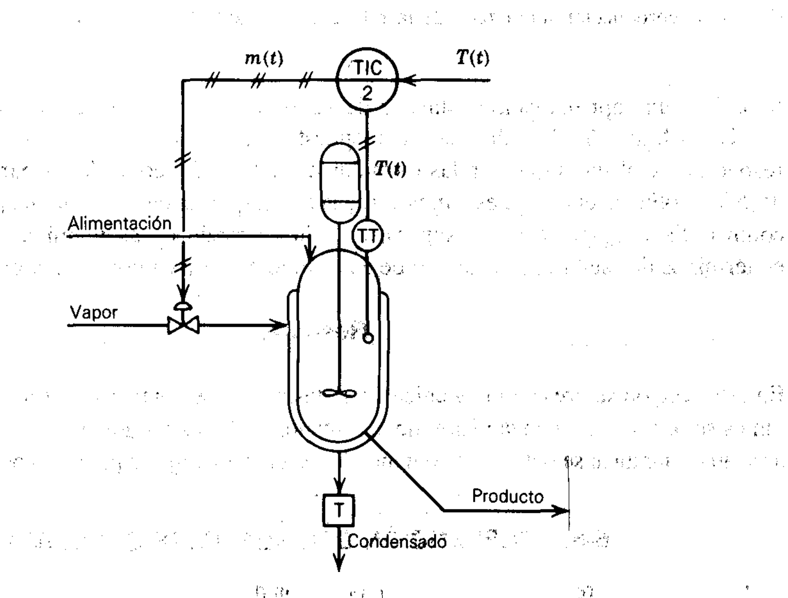


Figura 6-28*a*. Tanque calentado por vapor.

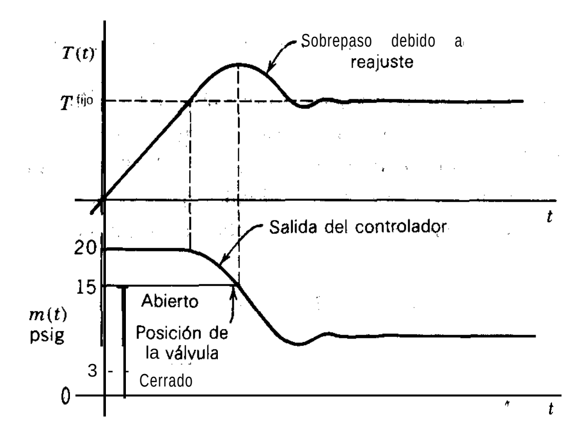


Figura 6-28*b*. Reajuste excesivo al inicializar el tanque calentado por vapor.

lador esta al valor de la presión de alimentación, que es de 20 psig. A pesar de que el controlador se satura, la válvula de vapor se mantiene completamente abierta; esta estrategia és la correcta para calentar en tiempo mínimo el contenido del tanque hasta el punto de control. El problema de exceso empieza a aparecer cuando la temperatura del tanque alcanza el punto de control (punto de régimen, referencia o fijación) y en ese instante la salida del controlador es

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int e(r)\, dt$$

$$= 20 \text{ psig}$$

Esto se debe a que, con la acción de integración, la salida del controlador se lleva al valor de la presión de alimentación. (Se notara que esto equivale a igualar con 20 psig el valor de desviación y el término de integración a cero.) Puesto que la válvula de control del vapor no se empieza a cerrar sino hasta que la salida del controlador alcanza 15 psig, se requiere un error negativo grande para provocar un descenso de 5 psig en la salida del controlador. Por ejemplo, cuando se tiene únicamente acción proporcional y se supone una banda de proporcionalidad de 25 % ($K_c = 4$), el error mínimo requerido para empezar a cerrar la válvula es

$$m = 20 + K_c e \text{ psig}$$

$$e = \frac{m - 20}{K_c} = \frac{15 - 20}{4} = -1.25 \text{ psig } (-10.4\% \text{ de rango})$$

Éste es un error significativo e indica que la temperatura continuará subiendo por arriba del punto de control mientras la válvula de vapor permanezca completamente abierta; pa-

recerá que el controlador no responde a la elevación en la temperatura, entonces se dice que está "excedido".

Con la acción de integración se puede empezar a reducir la salida del controlador tan pronto como el error se hace negativo, de manera que el error puede alcanzar un pico con valor inferior al que se estimó con anterioridad (− 10.4%). Sin embargo, si no fuera por la acción de integración, en primer lugar, el valor de desviación $\overline{m}$ no hubiera llegado a 20 psig. Como se vio en el capítulo 5, la fórmula para un controlador proporcional es

$$m(t) = \overline{m} + K_c e(t)$$

Si se considera un valor de desviación $\overline{m}$ de 9, con el controlador proporcional se empieza a cerrar la válvula de vapor antes de que la temperatura alcance el punto de control. Por lo tanto, la acción de integración es la causa de que exista un gran sobrepaso de temperatura, como se ilustra en la figura 6-28*b* y, puesto que ese efecto es altamente indeseable, ¿cómo se puede evitar?

Una forma de evitar el gran sobrepaso que ocasiona el reajuste excesivo es mantener el controlador en manual hasta que la temperatura llegue al punto de control, y cambiarlo entonces a automático. En este caso la válvula de vapor se mantiene completamente abierta mediante el ajuste manual de la salida del controlador a 15 psig, con lo cual se garantiza que la válvula de control se comenzará a cerrar tan pronto como el controlador se cambia a automático. Una segunda alternativa es instalar un limitador de la salida del controlador para evitar que llegue a valores más allá del rango de la válvula de control, es decir, arriba de 15 psig o abajo de 3 psig, pero, ¿es que esto funciona? Para responder esta pregunta se divide el diagrama de bloques del controlador en sus respectivas partes. La función de transferencia del controlador PI se expresa mediante

$$\begin{aligned} M(s) &= K_c\left[+ \frac{1}{\tau_I s}\right]E(s) \\ &= K_c E(s) + M_I(s) \end{aligned} \tag{6-77}$$

donde:

$$M_I(s) = \frac{1}{\tau_I s} K_c E(s)$$

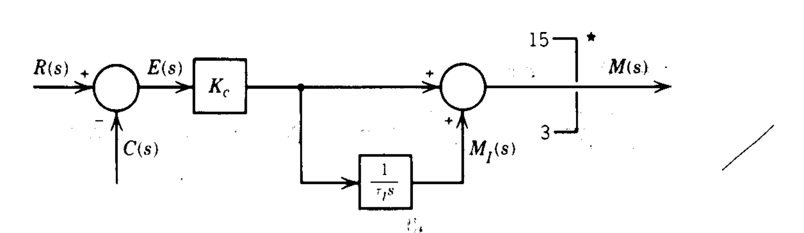


Figura 6-29*a*. La implantación directa de un controlador PI es difícil de limitar.

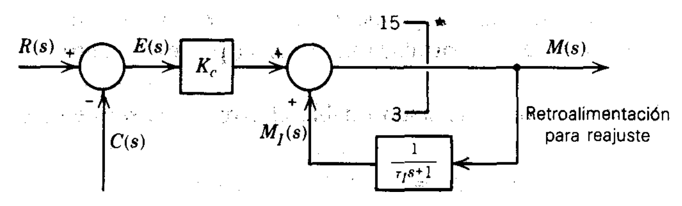


Figura 6-296. "La implantación del reajuste por retroalimentación de un controlador PI es fácil de limitar.

En la figura 6.29*a* se ilustra una construcción directa con base en esta función de transferencia, en diagrama de bloques. En el diagrama se muestra por qué. al instalar un limitador a la salida del controlador no se evita el problema de exceso: la salida de la acción de interacción, $M_I(s)$, aún se irá más allá de las límites de la salida del controlador y causará el exceso. En otras palabras, para evitar el exceso, se debe limitar de alguna manera la salida de la acción de integración; en los controladores analógicos neumáticos y electrónicos se logra esta limitación de una manera muy ingeniosa: primero, a partir de la definición de $M_I(s)$, se tiene

$$\tau_I s M_I(s) = K_c E(s) \tag{6-78}$$

Al resolver para $K_c E(s)$, de la ecuación (6-77), se tiene

$$K_c E(s) = M(s) - M_I(s) \tag{6-79}$$

De combinar las ecuaciones (6-78) y (6-79) y reordenar, resulta

$$M_I(s) = \left[\frac{1}{\tau_I s + 1}\right] M(s) \tag{6-80}$$

Esta construcción para la acción de integración se representa en el diagrama de bloques de la figura 6-293, en el cual se puede observar que, si el limitador se coloca como se muestra, $M_I(s)$ se limita automáticamente. Esto se debe a que $M_I(s)$ siempre esta en retardo respecto a $M(s)$, con una ganancia de 1 .0 y una constante de tiempo ajustable τ_I; por 10 tanto, nunca estará fuera del rango a que se limita $M(s)$. En otras palabras, si $M(s)$ alcanza uno de sus límites, $M_I(s)$ se acercará a ese límite, es decir, 15 psig; entonces, en el momento en que el error se vuelve negativo, la salida del controlador se hace

$$m(t) = 15 + K_c e(t) < 15 \text{ psig ya que } e(t) < 0$$

Esto es, la salida del controlador llega fuera del límite y cierra la válvula de control, ¡en el instante en que la variable controlada pasa por el punto de control!

Se observa que en estado estable el error debe ser cero, ya que

$$M = M_I = M_I + K_c e \quad \therefore e = 0$$

Y, por lo tanto, no debe existir desviación.

El limitador que se muestra en la figura 6-2913 se conoce algunas veces como "conmutador por lotes" (*"batch switch"*) porque en los procesos por lotes se presentan situaciones de exceso con suficiente frecuencia como para justificar el gasto extra por el limitador. Actualmente, en los controladores que se construyen con microprocesadores, el limitador es una característica de control estándar.

La estructura de "retroalimentación de reajuste'? de la figura *6-29b* tiene la ventaja que proporciona, de una manera muy limpia y directa, la eliminación del reajuste excesivo en los sitemas de control por superposición y en cascada. En las secciones en que se cubren tales tópicos se hará mención a esto..

6-6. RESUMEN

El control por retroalimentación es la estrategia básica del control de procesos industriales. En este capítulo se presentaron métodos para determinar la respuesta linealizada de un circuito de control por retroalimentación y sus límites de estabilidad; también se presentaron varias técnicas para ajustar los controladores con retroalimentación y se abordó el problema del reajuste excesivo y la manera de prevenirlo en circuitos simples.

Hasta el momento se expusieron dos métodos para analizar la estabilidad de un circuito de control, la prueba de Routh y la substitución directa, así como un método para medir la dinámica del proceso: la prueba de escalón. En el capítulo siguiente se estudiaran dos métodos clásicos para analizar las respuestas del circuito de control: 'el lugar de raíz y la respuesta en frecuencia; tambitn se presentará un método más eficaz para la identificación del proceso: la prueba de pulso.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ziegler, J. G., y Nichols, N.B., "Optimim Settings for Automatic Controllers," *Transactions ASME,* Vol. 64, Nov. 1942, p. 759.
2. Smith, Cecil L., *'Digital Computer Process Control,* Inext Educational Publishers, Scranton, Pa., 1972.
3. Martin Jacob Jr., Ph.D. dissertation, Department of Chemical Engineering, Louisiana State University , Baton Rouge, 1975.
4. Murrill, Paul W., *Automatic Control of Processes,* International Textbook Company, Scranton, Pa., 1967,.

5. López, A. M., P. W. Murrill y C. L. Smith, "Controller Tuning Relationships Based on Integral Performance Criteria, " *Instrumentation Technology*, Vol. 14, No. ll, Nov. 1967, p. 57.
6. Rovira, Alberto A., Ph.D. dissertation, Department of Chemical Engineering, Louisiana State University, Baton Rouge, 1981.
7. Dahlin, E. B., "Designing and Tuning Digital Controllers," *Znstruments and Control Systems*, Vol. 41, No. 6, Junio 1968, p. 77.
8. Martin, Jacob Jr., A. B. Corripio y C. L. Smith, "How to Select Controller Modes and Tuning Parameters from Simple Prócess Models," *ISA Trunsactions*, Vol. 15, No. 4, 1976, pp. 314-319.
9. Carlson, A., G. Hannauer, T. Carey y P. J. Holsberg, *Handbook of Analog Computation*, 2nd ed., Electronic Associates, Inc., Princeton, N.J., 1967, p. 226.
10. Moore, C. F., C. L. Smith y P., W. Murrill, "Simplifying Digital Control Dynamics for Controller Tuning and Hardware Lag Effects," *Instrument Pructice*, Vol. 23, No. 1, Ene. 1969, p. 45.
11. Chiu, K. C., A. B. Corripio y C. L. Smith, "Digital Control Algorithms. Part III. Tuning PI and PID Controllers," *Instruments und Control Systems*, Vol. 46, No. 12, Dic. 1973, pp. 41-43.
12. Corripio, A. B., "Digital Control Techniques," en Edgar, T. F., Ed., *Process Control*, AIChEMI, Series A. Vol. 3, American Institute of Chemical Engineers, Nueva York, 1982, p. 69.

PROBLEMAS

6-1. En el diagrama de bloques de la figura 6-4*a* se representa un circuito de control con retroalimentación; en el proceso se puede representar con dos retardos en serie:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde la ganancia del proceso es $K = 0.50\%/\%$ y las constantes de tiempo son

$$\tau_1 = 1 \text{ min}$$
$$\tau_2 = 0.5 \text{ min}$$

El controlador es un controlador proporcional: $G_c(s) = K_c$

a) Se debe obtener la función de transferencia de circuito cerrado y la ecuación característica del circuito.

b) ¿Para qué valores de la ganancia del controlador, la respuesta del circuito a un cambio escalón en el punto de control es sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada? ¿Se puede hacer que el circuito sea inestable?

c) Se debe determinar la respuesta del circuito cerrado a un cambio escalón en el punto de control para K_c = 0.16, 0.25 y 0.50.

6-2. Resolver el problema. 6-1 para una función de transferencia

$$G(s) = \frac{6(1 - s)}{(s + 1)(0.5s + 1)} \frac{\%}{\%}$$

Las funciones de transferencia como esta son típicas en los procesos que constan de dos retardos en paralelo con acción opuesta. El controlador es un controlador proporcional, como en el problema 6-1.

6-3. En el diagrama de bloques de la figura 6-4*a* se representa un circuito de control por retroalimentación; el proceso se puede representar mediante un retardo de primer orden y el controlador es proporcional-integral (PI):

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Sin detrimento de la generalidad, la constante de tiempo del proceso τ = 1 y la ganancia del proceso K = 1.

a) Se debe escribir la función de transferencia de circuito cerrado y la ecuación característica del circuito.

b) ¿Existe una ganancia última para este circuito?

c) Se debe determinar la respuesta de circuito cerrado a un cambio de escalón en el punto de control para $\tau_I = \tau$, conforme la ganancia del controlador varía de cero a infinito.

6-4. Se tiene el circuito de control con retroalimentación del problema 6-1 y un controlador puramente integral

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s}$$

a) Se debe determinar la ganancia última del controlador por la prueba de Routh.

b) Se debe recalcular la ganancia última del controlador para τ_2 = 0.10 y τ_2 = 2 ¿Los resultados son los que se esperaban?

c) Se deben verificar las ganancias últimas que se calcularon en las partes *a*) y *b*), mediante el métodó de substitución directa, y determinar la frecuencia última de oscilación del circuito.

6-5. Para el circuito de. control con retroalimentación del problema 6.1 y un controlador proporcional-integral

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

a) Se debe determinar la **ganancia** última del circuito KK_{cu} y la frecuencia última de oscilación como funciones del tiempo de integración τ_I.

b) Se debe determinar la respuesta de circuito cerrado a un cambio escalón en el punto de control; el **controlador se** ajusta para IAE mínima. Se debe utilizar la figura 6- 18 para determinar los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto (POMTM) .

c) Se repetirá la parte *b)* **con el** controlador ajustado para un sobrepaso del 5 %; se utilizarán las **fórmulas** de síntesis del controlador,. ecuaciones (6-67) y 6-76).

6-6. Para el circuito de control con retroalimentación que se representa en la figura 6-4*a*, se debe determinar la ganancia última para un controlador proporcional, mediante la prueba de Routh,. así como cada una de las siguientes **funciones de** transferencia del proceso;

a. $G(s) = \dfrac{1}{(s + 1)”}$

b. $G(s) = \dfrac{1}{(s + 1)^5}$

c. $G(s) = \dfrac{1}{(3s + 1)(2s + 1)(s + 1)}$

íi. $G(s) = \dfrac{(0.5s + 1)}{(3s + 1)(2s + 1)(s + 1)}$

e. $G(s) = \dfrac{1}{(3s + 1)(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$

f. $G(s) = \dfrac{e^{-0.3s}}{3s + 1}$

Cabe anotar que la parte f) es una aproximación de primer orden más tiempo muerto de la parte c), para lo cual se utiliza la regla práctica de la sección 6-3.

6-7. Se debe resolver el problema 6-6 por medio de la. substitución directa, para determinar la ganancia última del controlador y la frecuencia **última de** oscilación del circuito.

6-8. En el diagrama de bloques de la figura 6-21 se representa un circuito de control por retroalimentación; la función de transferencia del proceso se expresa por

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

donde la ganancia del-proceso es K = 2.5 %/% y las constantes. de tiempo son

$\tau_1 = 5$ min $\quad \tau_2 = 0.8$ min $\quad \tau_3 = 0.2$ min

Se deben determinar los parámetros de ajuste para la respuesta de asentamiento de un cuarto, mediante el método de la ganancia última para

a. Un controlador proporcional (P)
b . Un controlador proporcional-integral (PI).
c. Un controlador proporcional-integral-derivativo (PID).

6-9. Se utilizarán los parámetros de ajuste que se calcularon para el circuito del problema 6-8, a fin de encontrar la respuesta de circuito cerrado à un cambio escalón en la perturbación, $U(s) = 1/s$.

Nota: El estudiante puede resolver. este problema mediante la inversión de la transformada de Laplace o la utilización de uno de: los programas de simulación por computadora que se listan en el capítulo 9. En la solución por transformada de Laplace se requiere la utilización del método que se expuso en el capítulo 2 para resolver raíces de polinomios o un programa de computadora como el que se lista en el apéndice D.

6-10. Se tiene el circuito de control con retroalimentación de la figura 6-21 y la siguiente función de transferencia del proceso

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde la ganancia del proceso, las constantes de tiempo y el tiempo muerto son

$K = 1.25\%/\%$ $\quad \tau_1 = 1$ min $\quad \tau_2 = 0.6$ min $\quad t_0 = 0.20$ min

se deben calcular los parámetros de ajuste de primer orden más tiempo muerto (POMTM) , para lo cual se utiliza la figura 6- 18. Después se utilizan estos parámetros para comparar los parámetros de ajuste de un controlador proporcional-integral (PI) con la utilización de las siguientes fórmulas:

a. Respuesta de razón de asentamiento de un cuarto
b. IAE mínima para entradas de perturbaciones
c. IAE mínima para entradas del punto de control
d. Síntesis del controlador para un sobrepaso del 5% con un cambio en el punto de control.

6-11. Se debe resolver el problema 6-10 para un controlador proporcional-integral-derivativo (PID)

6- 12. Se debe resolver el problema 6- 10 para un controlador por muestreo de datos (computadora) con un tiempo de muestreo $T = 0.10$ min.

6-13. Para el lazo de control del programa 6-10 se deben obtener las formulas de ajuste para un controlador industrial **PID**; se **utilizará** el procedimiento de síntesis de Dahlin y se considerarán dos casos:

a. No hay tiempo muerto, $t_0 = 0$.
b. Hay tiempo muerto

Las respuestas se deben verificar con la tabla 6-5.

6-14. En este problema se utiliza el programa de computadora que se lista en el ejemplo 9-5 para obtener las respuestas a los cambios escalón en el punto de control en la perturbación del circuito de control de los problemas 6-10 y 6-11; se deben utilizar los parámetros de ajuste que se determinaron en los mismos. ¿Se puede mejorar el desempeño del control mediante ajuste por ensayo y error de los parámetros de ajuste? Con el programa se imprime la integral del error absoluto (IAE), el cual se puede utilizar para medir el desempeño del control.

Nota: **En** los problemas siguientes se requiere que el estudiante aplique los conocimientos que aprendió en 10s capítulos 1 a 6 de este libro.

6-15. Ahora se considera el filtro de vacío que se muestra en la figura 6-30; este proceso es parte de una planta de tratamiento de desperdicios. La mezcla de desechos entra al filtro con casi 5 % de sólidos; en el filtro de vacío se elimina el agua de la mezcla, con lo que queda cerca del 25 % de sólidos. La capacidad para filtrar la mezcla en el filtro rotatorio depende del pH de la mezcla que entra al filtro. **Una** forma para controlar la humedad en la mezcla que entra al incinerador es añadir compuestos químicos (cloruro férrico) a la mezcla que entra a proceso, para mantener el pH que se necesita. En la figura 6-30 se ilustra la estructura de control que se usa algunas veces; el rango del transmisor de humedad es de 60 a 95 % .

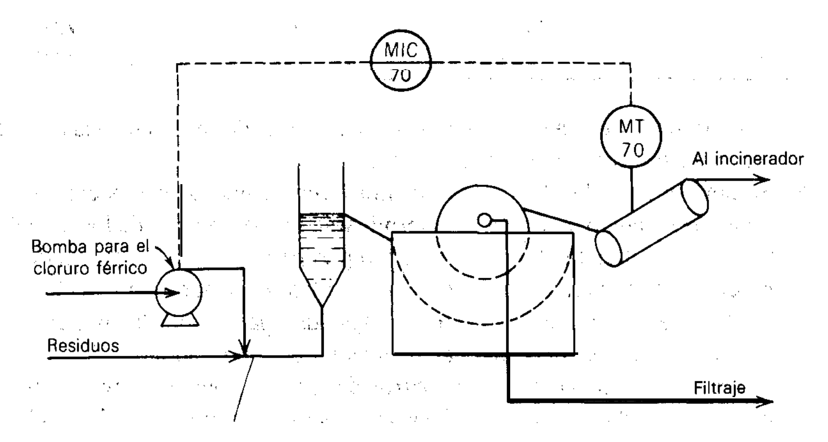


Figura 6-30. Filtro de vacío para el problema 6-15.

Los siguientes datos se obtuvieron con una prueba de escalón sobre la salida del controlador (MIC70) de +2 mA:

Tiempo, min	Humedad, %	Tiempo, min	Humedad, %
0	75.0	10.5	70.9
1	75.0	11.5	70.3
1.5	75.0	13.5	69.3
2.5	75.0	15.5	68.6
3.5	74.9	17.5	68.0
4.5	74.6	19.5	67.6
5.5	74.3	21.5	67.4
6.5	73.6	25.5	67.1
7.5	73.0	29.5	67.0
8.5	72.3	33.5	67.0
9.5	71.6		

Cuando la entrada de humedad al filtro se cambió en 2 %, se obtuvieron los siguientes datos:

Tiempo, min	Humedad, %	Tiempo, min	Humedad, %
0	75	11	75.9
1	75	12	76.1
2	75	13	76.2
3	75	14	76.3
4	75.0	15	76.4
5	75.0	17	76.6
6	75.1	19	76.7
7	75.3	21	76.8
8	75.4	25	76.9
9	75.6	29	77.0
10	75.7	33	77.0

a) Se debe dibujar el diagrama de bloques del circuito de control para la humedad; se incluirán las posibles perturbaciones.

b) Se aproximaran las funciones de transferencia mediante modelos de primer orden más tiempo muerto y se determinaran los parámetros de los modelos; entonces se redibujara el diagrama de bloques para mostrar la función de transferencia de cada bloque, para lo cual se utiliza el método de calculo 3.

c) Se debe expresar una idea sobre la capacidad para controlar la humedad a la salida; además, se debe indicar la acción del controlador.

d) Se obtendrá la ganancia de un controlador proporcional para respuesta de IAE **mínima**. Se deberá calcular la desviación para un cambio del 1% en la humedad de entrada.

e) Se debe obtener la ganancia última y el período último para este circuito de control. El término de tiempo muerto se puede aproximar mediante una aproximación de Padé de primer orden, como se expresa en la ecuación (6.29).

f) Se debe ajustar un controlador PI para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto.

6-16. Ahora se considera el absorbedor que aparece en la figura 6-3 1. Al absorbedor entra un flujo de gas cuya composición es de90 mol % de aire y 10 mol % de amoniaco (NH_3). Antes de arrojar este gas a la atmósfera es necesario remover la mayor parte de NH_3 del mismo, lo cual se puede hacer mediante absorción en agua. La concentración de NH_3 en el vapor que sale no debe sobrepasar los 200 ppm; el absorbedor se diseñó de manera que el vapor de salida tenga una concentración de 50 ppm de NH_3. Durante el diseño se hicieron varias simulaciones dinámicas, de ellas se obtuvieron los siguientes datos:

Respuesta a un cambio escalón en el caudal de agua que llega al absorbedor.

Tiempo, s.	*Caudal de agua, gpm*	*Concentración de NH_3 a la salida, ppm*
0	250	50
0	250	50
0	200	50
10	200	50
20	200	50
30	200	50.12
40	200	50.30
50	200	50.60
60	200	50.77
70	200	50.90
80	200	51.05
90	200	51.20
100	200	51.26
110	200	51.35
120	200	51.4%
130	200	51.55
140	200	51.63
160	200	51.70
180	200	51.76
200	200	51.77
220	200	51.77

a) Se ha de diseñar el circuito de control para mantener la concentración de NH_3 a la salida en un punto de control de 50 ppm y dibujar el diagrama de instrumentos para el circuito. En el mercado se cuenta con algunos instrumentos que se pueden utilizar para tal propósito. Existe un sensor y transmisor de concentra-

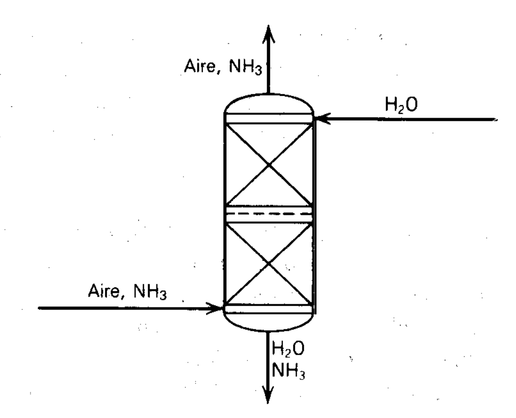


Figura 631. Absorbedor para el problema 6-16.

ción electrónico con calibración de 0-200 ppm, el cual tiene un retardo de tiempo despreciable. También se cuenta con una válvula accionada por aire que, abierta completamente y con la caída de presión de 10 psi de que dispone, permite el paso de 500 gpm; la constante de tiempo del actuador de la válvula es de 5 s. Para completar el diseño se pueden requerir más instrumentos, por lo que se invita al estudiante a utilizar cualquier cosa que se necesite. Se debe especificar la acción de la válvula de control y del controlador.

b) Se debe dibujar el diagrama de bloques de circuito cerrado y obtener la función de transferencia de cada bloque. La respuesta del absorbedor se aproxima con un modelo de primer orden más tiempo muerto, con el método de cálculo 3. Se debe obtener la ganancia y el período últimos del circuito. El tiempo muerto del sistema se puede aproximar con una aproximación de Padé de primer orden, ecuación (6-29).

c) Se debe ajustar un controlador proporcional para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto y obtener la desviación cuando se cambia el punto de control a 60 ppm.

d) Repetir la parte c) para un controlador PID.

Tiempo, min.	*T(t), °F*	*Tiempo, min.*	*T(t), °F*
0	425	5.5	436.6
0.5	425	6.0	437.6
1.0	425	7.0	439.4
2.0	425	8.0	440.7
2.5	426.4	9.0	441.7
3.0	428.5	10.0	442.5
3.5	430.6	11.0	443.0
4.0	432.4	12.0	443.5
4.5	434.0	14.0	444.1
5.0	435.3	16.0	444.5
		19.0	445.0

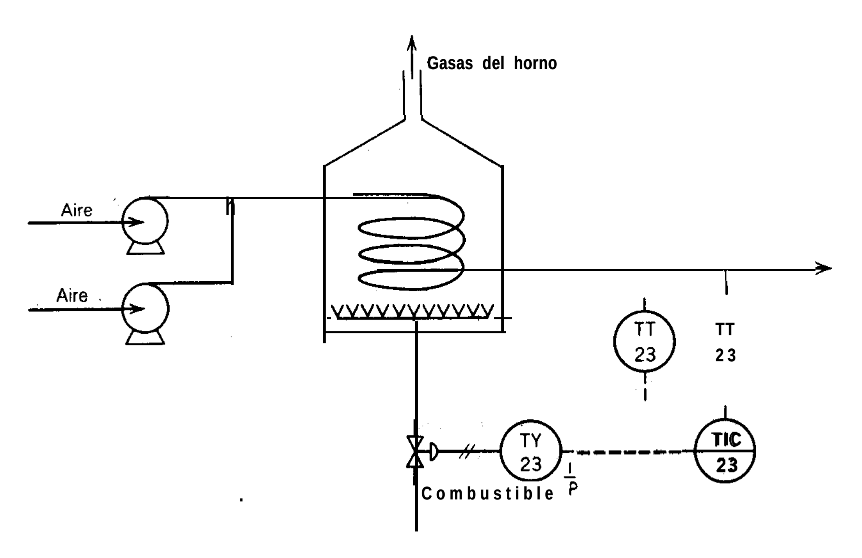


Figura 6-32. Horno para el problema 6-17.

6-17. En este problema se considera el horno mostrado en la figura 6-32, el cual se utiliza para calentar el aire que se suministra a un regenerador catalítico. El transmisor de temperatura se calibra a 300-500°F. Para un cambio escalón del 5 % en la salida del controlador se obtuvieron los siguientes datos de respuesta:

a) Se debe especificar la acción del controlador.
b) Dibujar el diagrama de bloques completo con la especificación de unidades para cada señal desde/hacia cada bloque. Se tiene que identificar a cada bloque.
c) Se deben adecuar los datos del proceso mediante un modelo de primer orden más tiempo muerto con el método de calculo 3; dibujar también el diagrama de bloques donde se ilustre la función de transferencia de cada bloque.
d) Ajustar el controlador proporcional, para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto y obtener la desviación para un cambio escalón de + 5 °F en el punto de control.
e) Se debe ajustar un controlador PI, con el método de síntesis de un controlador, para un sobrepaso del 5 %.

6-18. El tanque de almacenamiento de la figura 6-33 se utiliza para suministrar a dos procesos un gas con peso molecular de 50. En el primer proceso se recibe un flujo

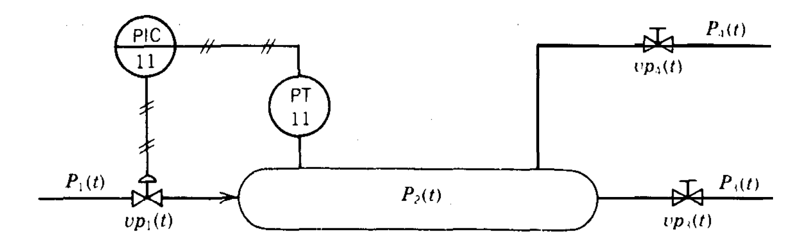


Figura 6-33. Tanque de almacenamiento para el problema 6-18.

normal de 500 scfm y se opera con una presión de 30 psig; mientras que en el segundo se opera con una presión de 15 psig. El gas que llega al tanque de almacenamiento lo proporciona un proceso en el que se opera a 90 psig, y se envía al tanque a una razón de 1500 scfm; la capacidad del tanque es de 550,000 pies^3 y opera a 45 psig y 350°F. Se puede suponer que el transmisor de presión responde instantáneamente con una calibración de 0-100 psig.

a) Se deben dimensionar las tres válvulas con una sobrecapacidad de 50%. Para todas las válvulas se puede utilizar el factor C_f = 0.9 (Masoneilan).
b) Se debe dibujar completo el diagrama de bloques del sistema. Se pueden considerar como perturbaciones $P_1(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$, $vp_4(t)$ y el punto de control del controlador. La constante de tiempo de la **válvula** de control de presión es de 5 seg.
c) ¿Se puede volver inestable el circuito de retroalimentación? En caso afirmativo, ¿cuál es su ganancia última?
d) Si se utiliza un controlador proporcional con una ganancia de 50 % /% , ¿cuál es la desviación que se tiene con un cambio de +5 psi en el punto de control?

6-19. Ahora se considera el sistema de reacción química que se muestra en la figura 6-34. Dentro de los tubos de reacción tiene lugar 'la reacción catalítica exotérmica A + E → C + D. El reactor se enfria con una corriente de aceite que fluye a través del casquillo del reactor; en cuanto el aceite sale del reactor, se le envía a un hervidor, donde se le enfría mediante la producción de vapor a baja presión. La temperatura en el reactor se controla mediante el manejo del flujo que no pasa por el hervidor. Se conocen las siguientes condiciones' del proceso:

Temperatura de diseño del reactor en el punto de medición: 275°F
Flujo de aceite que puede entregar la bomba: 400 gpm, (constante)
Válvula de control de temperatura: caída de presión en las condiciones de diseño: 15 psi
Flujo a las condiciones de diseño: 200 gpm
Rango del transmisor de temperatura: 100—400°F
Densidad del aceite: 55 lbm/pies^3

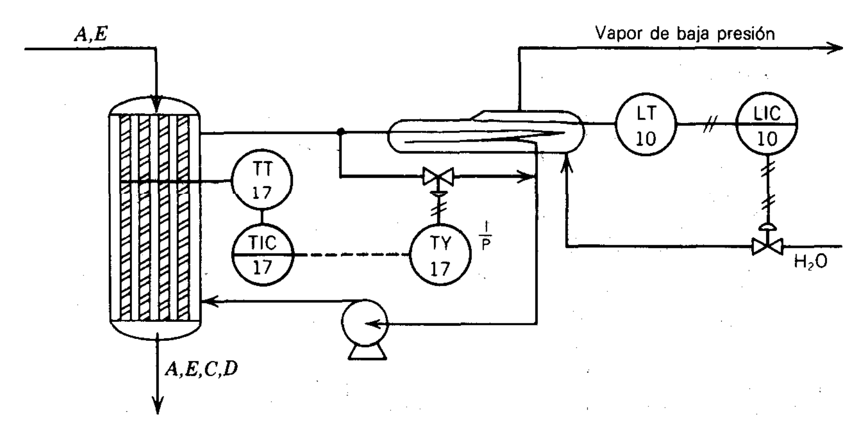


Figura 6-34. Reactor químico para el problema 6-19.

Prueba a circuito abierto: a un decremento de 5% en la posición de la **válvula co**rresponde un cambio de temperatura de **—3°F,** después de un lapso muy largo.

Prueba de circuito cerrado: con una ganancia del controlador de 7 **mA/mA,** el circuito de temperatura empieza a oscilar con una amplitud constante y un período de 15 **min.**

a) La válvula de control de temperatura se debe dimensionar con una sobrecapacidad del 100%. **¿Cuáles** son las acciones de la válvula y el controlador que se recomiendan para el circuito de temperatura?
b) Si la caída de presión a través de los tubos del hervidor varía con el cuadrado del flujo, y la válvula es de porcentaje igual con un parámetro de ajuste en rango de 50, **¿cuál** es el flujo a **través** de la válvula cuando se abre completamente?, **¿cuál** es la posición de la **válvula** en las condiciones de diseño?
c) Se debe dibujar el diagrama general de bloques para el circuito de temperatura.
d) Se debe calcular la ganancia del proceso, a las condiciones de diseño, incluyendo la válvula de control y el transmisor de temperatura.
e) Calcular los parámetros de ajuste de un controlador PID para la respuesta de asentamiento de un cuarto. Se deben escribir los parámetros como banda proporcional, repeticiones/minuto y minutos.
f) Se debe ajustar un controlador proporcional para una respuesta de asentamiento de un cuarto y **calcular** la desviación para un cambio escalón en el punto de control de -10°F.

6-20. Ahora se considerará el sistema de control **típico** para el evaporador de doble efecto que se ilustra en la figura 6-35, estos sistemas de evaporación se caracterizan por su dinámica lenta. La concentración que resulta del efecto final se controla mediante el control del ascenso del punto de ebullición (APE) **(BPR** por sus siglas

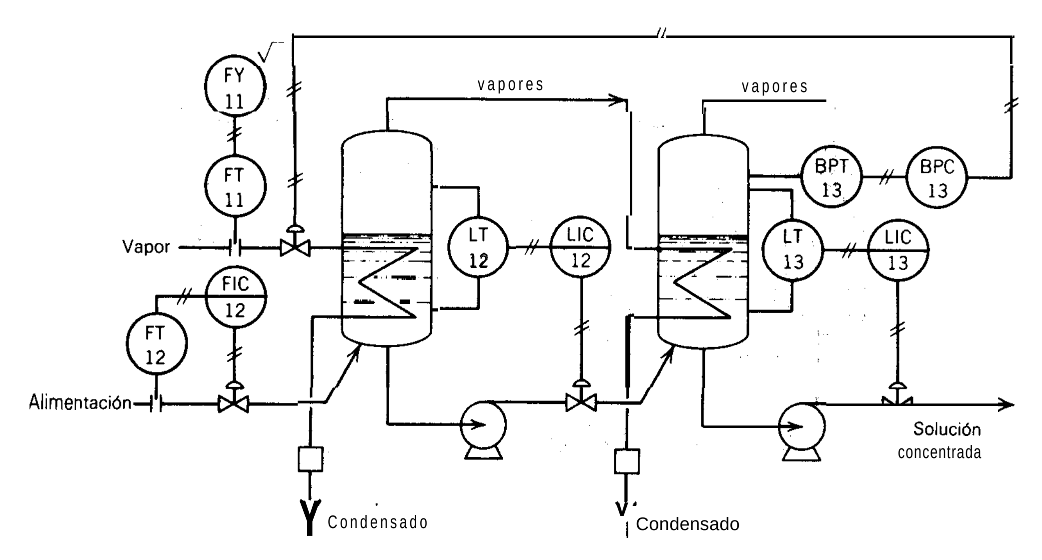


Figura 635. Evaporador para el problema 6-20.

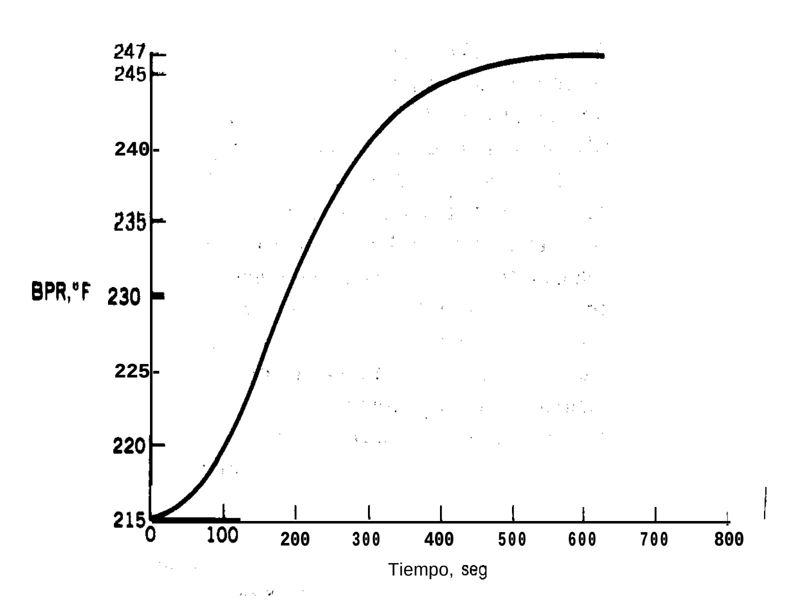


Figura 6-36. Curva de respuesta del problema 6-20 para un cambio escalón en la salida del controlador.

en inglés); es decir, al mantener el APE a un cierto valor, la concentración a la salida se mantiene al valor que se desea. Mientras más alta es la concentración del soluto más alto es el APE. El APE se controla mediante el manejo del vapor que entra al primer efecto.

Se dispone de datos de la prueba escalón. En la figura 6-36 se ilustra la respuesta de la APE a un cambio de 2.5 lbm/ pies^3, en la densidad de la solución que entra al primer efecto. En la figura 6-37 se muestra la respuesta del APE para un cambio de +2 psig en la salida del controlador.

El rango del transmisor de APE es de 150-250°F, y la constante de tiempo de 5 s.

a) Se debe dibujar el diagrama de bloques completo, con la función de transferencia de cada bloque.
b) Con base en los datos que se proporcionan, ¿cuál es la acción de la válvula de control en caso de falla?, ¿cuál es la acción correcta del controlador?
c) Se debe ajustar un controlador proporcional para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto y calcular la desviación cuando la densidad de la solución que entra cambia en +2 lbm/pies^3.
d) Mediante el método de síntesis del controlador, se debe ajustar un controlador PI para un sobrepaso del 5 % .

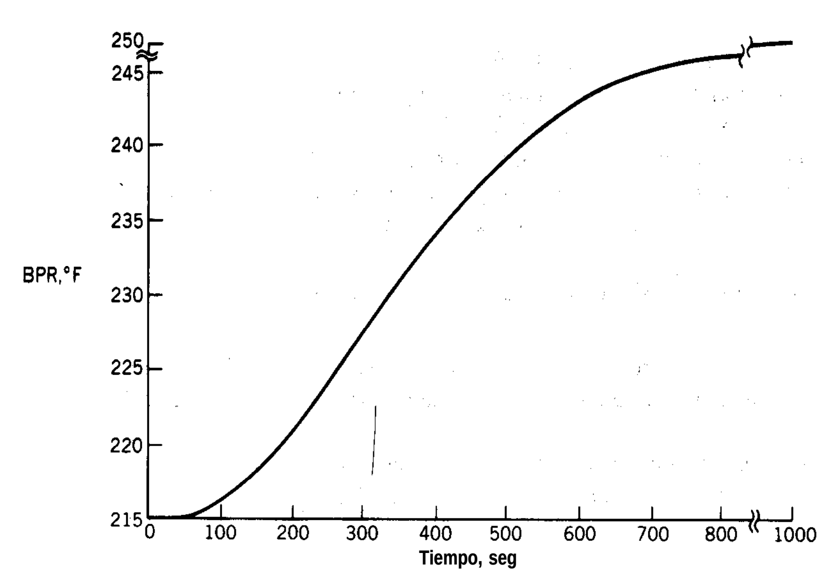


Figura 6-37. Curva de respuesta del problema 6-20 para un cambio escalón en la salida del controlador .

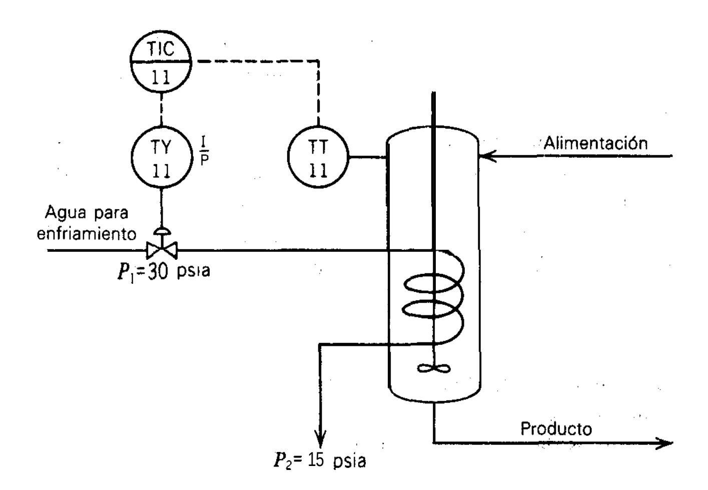


Figura 6-38. Reactor para el problema 6-21.

6-21. La temperatura en un tanque de reacción química exotérmica con agitación continua se controla mediante la manipulación de la cantidad de agua para enfriamiento que pasa por el serpentín, tal como se ilustra en la figura 6-38.

Las condiciones de diseño del proceso son las siguientes:

Temperatura del reactor: 210°F
Razón de agua para enfriamiento: 350 gal/min
Caída de presión en el serpentín: 10 psi
Rango de temperatura del transmisor: 180-230°F
Características de la válvula: de porcentaje igual, con un parámetro de ajuste de rangos de 50; se requiere aire para cerrar.

Se realizaron las siguientes pruebas en el sistema:

Sensibilidad de circuito abierto: con un incremento de 10 gal/min en la razón de entrada de agua se obtiene una caída de temperatura de 3 °F, después de un lapso largo.
Prueba de circuito cerrado: con una ganancia del controlador de 5, la temperatura oscila con amplitud constante y período de 12 min.

a) Se debe determinar el coeficiente de la válvula, C_V, para un factor de sobrecapacidad de 2.
b) Dibujar el diagrama de bloques para el lazo de control y determinar la ganancia total del proceso; se deben incluir el controlador y la válvula de control.

c) Se deben calcular los parámetros para ajustar un controlador PID a una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto; se deben expresar como banda proporcional, repeticiones/minuto y minutos de derivación. ¿Cuál es la acción que se requiere del controlador?

6-22. Ahora se considera el proceso que se muestra en la figura 6-39, para sacar granulado de fosfato. La mezcla de granulado y agua se alimenta a la cama del secador mediante una banda alimentadora; en la cama se seca el granulado mediante el contacto directo con gases en combustión. Del secador se lleva el granulado a un silo para su almacenamiento; es muy importante el control de la humedad del granulado que sale del secador; si el granulado esta muy seco se puede quebrar y pulverizar, de lo cual resultaría una perdida de material; si está muy húmedo, se formarían terrones en el silo.

Para controlar la humedad del granulado se propone regular la velocidad de la banda de alimentación, como se muestra en la figura 6-39. La velocidad del alimentador es directamente proporcional a su señal de entrada. La humedad del granulado que entra es generalmente del **14%**, y en el secador se reduce al 3 % . El rango del transmisor es de 1-6 % de humedad. Una perturbación importante en este proceso es la humedad del granulado de entrada.

a) Se debe dibujar el diagrama de bloques completo del circuito de control, con la ilustración de todas las unidades. Se deben incluir las perturbaciones.
b) En la figura **6-40** se ilustra la respuesta de la humedad de salida a un incremento de 1 **mA** en la salida del controlador; en la figura 6-41 se muestra la respuesta de

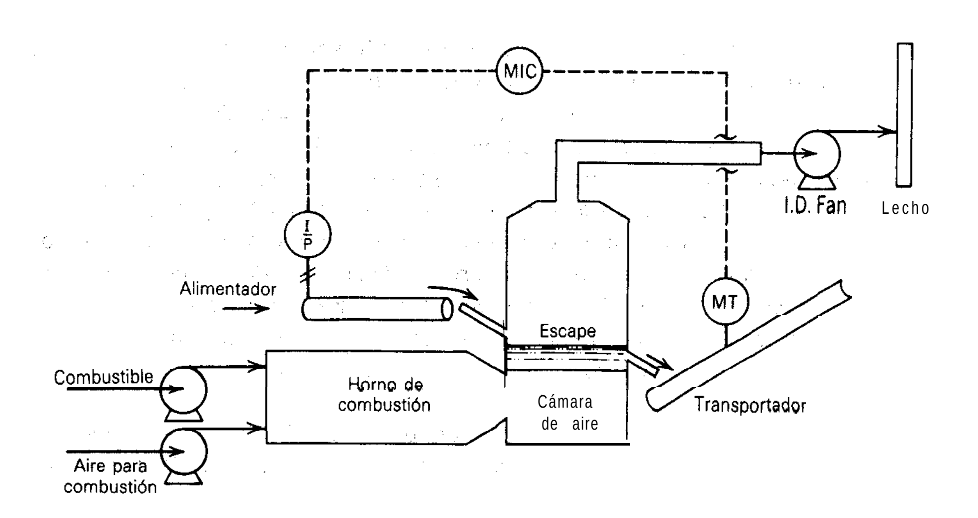


Figura 6-39. Secador para el problema 6-22.

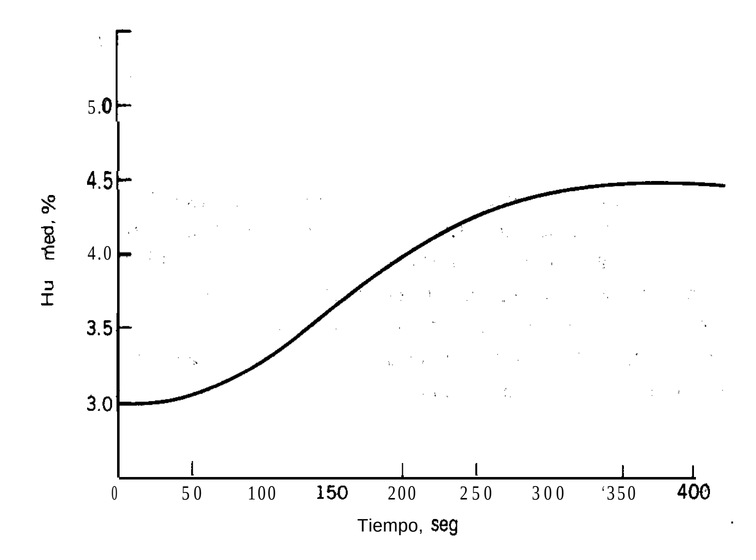


Figura 6-40. Curva de respuesta del problema 6-22 para un cambio escalón en la salida del controlador.

la humedad de salida a un incremento del 2% en la humedad de entrada. Se debe hacer una aproximación a cada curva de proceso, mediante un modelo de primer orden más tiempo muerto, y redibujar el diagrama a bloques con las funciones de transferencia de estos modelos de aproximación. Se debe utilizar el método de cálculo 2.

c) Se debe determinar el ajuste de un controlador PID para respuesta de ICE mínima a la entrada de disturbios. La ganancia del controlador se debe expresar en banda proporcional. ¿Cuál es la acción adecuada del controlador?

d) Se debe determinar la ganancia última y el período último del lazo, mediante la utilización de una aproximación Padé de primer orden para el tiempo muerto.

e) Si la humedad del granulado a la entrada desciende en un 2 %, ¿cuál es el nuevo valor de estado estacionario de la humedad a la salida? Se supone que el controlador es proporcional con ajuste para respuesta de razón de asentamiento de un cuarto, con base a la información que se obtiene en la parte(d).

f) ¿Cuál es la salida del controlador que se requiere (en mA) para evitar la desviación a causa de la perturbación de la parte (*e*)?

Nota: En los siguientes problemas se requiere que el estudiante elabore el modelo del proceso a partir de los principios básicos. Estos problemas son más adecuados para proyectos de fin de curso que para tareas regulares.

6-23. Ahora se utiliza el calentador eléctrico que se ilustra en la figura 6-42. En una "te" se unen dos corrientes de liquido con razón de masa variable, $F_A(t)$ y $F_B(t)$, y

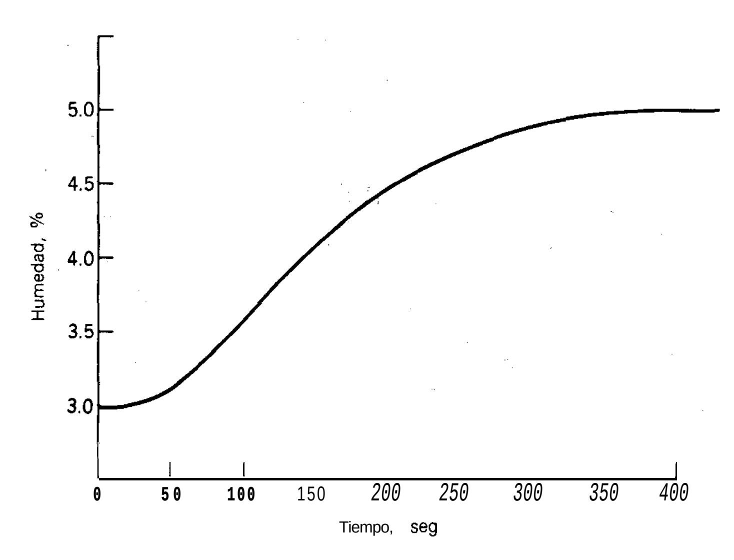


Figura 6-41. Curva de respuesta del problema 6-22, para un cambio escalón en la humedad de entrada.

que pasan a través del calentador en donde se mezclan completamente y se calientan a la temperatura $T(t)$. La temperatura de salida se controla mediante el manejo de la corriente que pasa por una bobina eléctrica. La fracción de masa del componente B en la salida también se controla mediante el manejo del flujo'de entrada de la corriente B. Se conoce la siguiente información:

1. La caída de presión a través de las válvulas se puede suponer constante, de manera que el flujo a través de las válvulas se expresa por

$$F_A(t) = K_{v1}\ vp_1(t) \qquad F_B(t) = K_{v2}\ vp_2(t)$$

   Cada una de las dos corrientes es pura en componente A o B, respectivamente.
2. La manera más fácil de controlar la composición en la salida, la fracción de masa de B, es medir la **conductividad eléctrica** de la corriente que sale. La conductividad de la corriente es inversamente proporcional a la fracción de masa, x_B, es decir

$$\text{conductividad} = \frac{\alpha}{x_B}$$

   donde α es una constante, mho-fracción de masa/m.
   El rango del transmisor de conductividad es de C_L a C_H mho/m.
3. El calentador siempre esta lleno de líquido. En todo momento el caudal de salida es igual al de entrada.
4. La capacidad calorífica y la densidad son constantes.

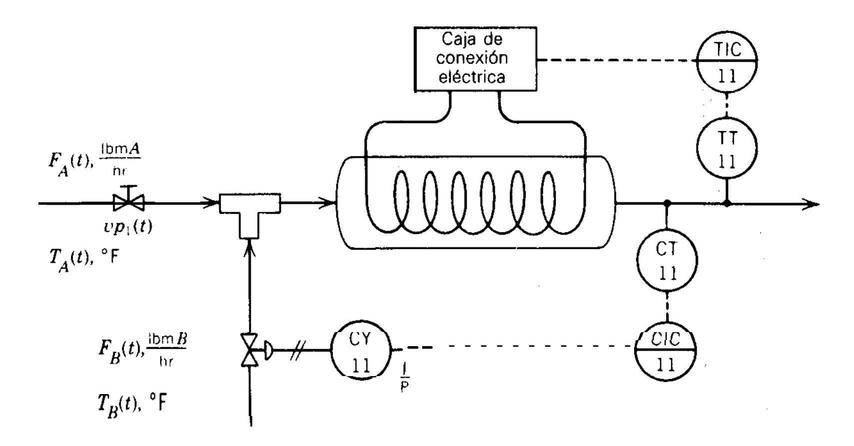


Figura 6-42. Calentador eléctrico para el problema 6-23.

5. Se puede suponer que el calor que se transfiere, q, es directamente proporcional a la salida del controlador. Para una salida de 4 mA, $q = 0$; para 20 mA, $4 = q_{máx}$.
6. El calentador está bien aislado.
7. Las perturbaciones de este sistema son $vp_1(t)$, Z"(f) y $T_B(t)$.

Se debe hacer lo siguiente:

a) Obtener la acción del controlador de conductividad, si se supone que la válvula de control es de aire para abrir. También se debe obtener la acción del controlador de temperatura.
b) Deducir, a partir de los principios **básicos**, el sistema de ecuaciones con que se describe al circuito de control de la composición (conductividad);
c) Linealizar las ecuaciones de la parte (6) y dibujar completo el diagrama de bloques del lazo de conductividad; se debe anotar la función de transferencia de cada bloque.
d) Deducir, a partir de los principios básicos, el sistema de ecuaciones con que se describe al circuito de control de temperatura.
e) Linealizar las ecuaciones de la parte (*d*) y dibujar el diagrama de bloques completo para el circuito de temperatura; se debe mostrar la función de transferencia de cada bloque.
f) Escribir la ecuación característica de cada lazo de control. ¿Se puede hacer inestable al lazo mediante el incremento de la ganancia del controlador? Se debe hacer una exposición breve al respecto.

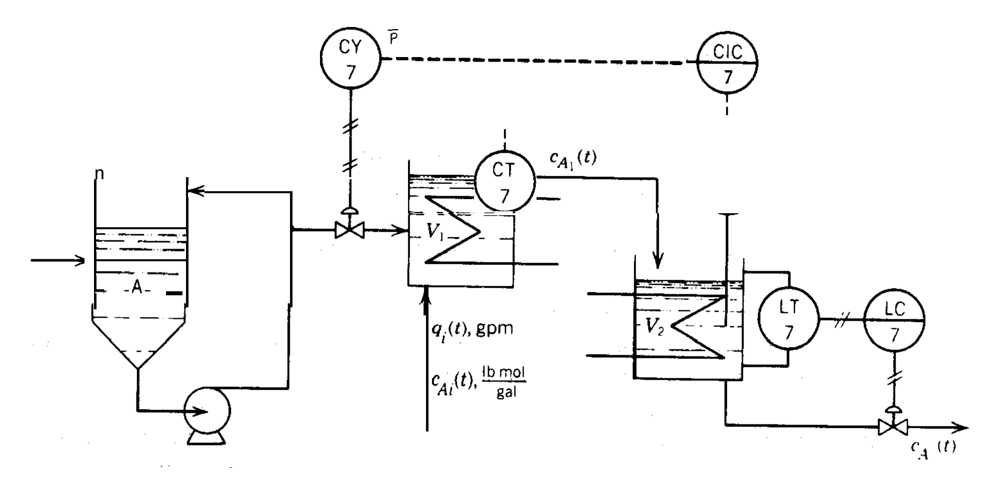


Figura 6-43. Reactores en serie para el problema 6-24.

6-24. Ahora se debe considerar el sistema que se muestra en la figura 6-43. En cada uno de los dos tanques tiene lugar la reacción $A \rightarrow E$ y la razón de reacción se expresa con

$$r(t) = kc_A(t), \ \frac{\text{lb mol}}{\text{gal-min}}$$

donde:

k es el coeficiente de la razón de reacción, min^{-1}

$C_A(t)$ es la concentración, $\frac{\text{lb mol}}{\text{gal}}$

En este proceso las perturbaciones son $q_i(t)$ y $C_{A_i}(t)$. La concentración que sale del segundo reactor se controla mediante el manejo de la corriente de A pura que llega al primer reactor. La densidad de esta corriente es ρ_A en lb mol/gal.

En el primer reactor el nivel es constante, ya que la corriente de salida se forma por desborde. Se puede suponer que el nivel en el segundo reactor también es constante (control perfecto de nivel) y, por tanto, se ignora el circuito de control de nivel. La temperatura en cada reactor se puede suponer constante.

DATOS

Volumen de los reactores, gal: $V_1 = 500$ $V_2 = 500$
Coeficientes de la tasa de reacción, min^{-1}: $k_1 = 0.25$ $k_2 = 0.50$
Propiedades de la corriente A: $\rho_A = 2.0$ lb mol/gal $MW_A = 25$

Condiciones de diseño: $\bar{c}_{Ai}$ = 0.8 Ib mol/gal; $\bar{q}_i$ = 50 gal/min; $\bar{q}_A$ = 50 gal/min.
Válvula de control: *AP* = 10 psi (constante). Características lineales.

El transmisor de concentración tiene un rango de 0.05-0.5 lb mol/gal. La dinámica de este transmisor se puede representar con un retardo de segundo orden cuyas constantes son 0.5 min y 0.25 min.

a) Se debe dimensionar la válvula de control para manejar un caudal del doble de la razón nominal.
b) Se debe deducir, a partir de los principios básicos, el sistema de ecuaciones con que se describe el circuito de control de composición. Se deben exponer todas las suposiciones que se hacen durante la deducción.
c) Se han de linealizar las ecuaciones de la parte (b) y dibujar completo el diagrama de bloques del circuito de control de composición. Se deben anotar los valores numéricos y las unidades de todas las ganancias y constantes de tiempo, excepto los del controlador.
d) Se deben obtener las funciones de transferencia de circuito cerrado:

$$\frac{C_{A_2}(s)}{C^{set}_{A_2}(s)}; \qquad \frac{C_{A_2}(s)}{Q_i(s)}; \qquad \frac{C_{A_2}(s)}{C_{A_i}(s)}$$

e) Se debe determinar la ganancia y frecuencia últimas del circuito de control y los parámetros de un controlador PID que se ajusta para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto.

6-25. Ahora se considera el proceso que se muestra en la figura 6-44. En el primer tanque se mezclan y calientan las corrientes $q_1(t)$ y $q_2(t)$. El medio de calefacción fluye a una razón tan alta que el cambio de temperatura entre la entrada y la salida no es significativo y, por lo tanto, la razón de transferencia de calor se puede describir mediante $UA[T_{c1}(t) - T_3(t)]$. También se puede suponer que el caudal de entrada es igual al de salida (total) y que las densidades y capacidades caloríficas de todas las corrientes son funciones que no dependen demasiado de la temperatura o de la composición.

El caudal que sale del primer tanque entra al segundo tanque, donde se calienta nuevamente, en esta ocasión mediante condensación de vapor. La energía que gana el líquido que se procesa es igual a la que pierde el vapor que se condensa y, por lo tanto, la razón de transferencia de calor se puede describir con $w_s(t)h_{fg}$, donde w,(t) es la razón de flujo de masa de vapor y h_{fg} es el calor latente de la vaporización. Si se supone que la caída de presión en la válvula de vapor es constante, el flujo a través de esta válvula se puede describir como w,(t) = $K_v vp(t)$; la constante de tiempo de dicha válvula es τ_v.

El rango del transmisor de temperatura es $T_L - T_H$, con una constante de tiempo τ_T.

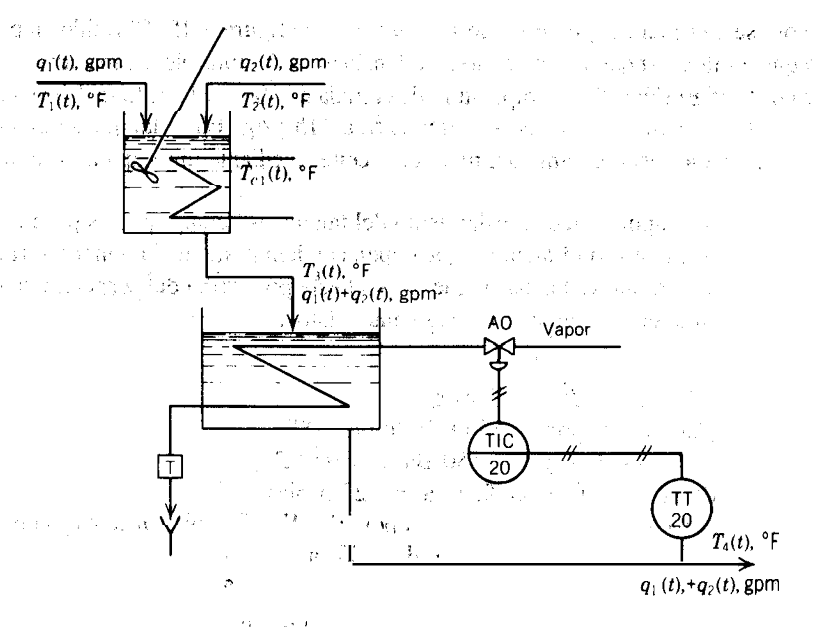


Figura 6-44. Tanques en serie para el problema 6-25.

Si se supone que las pérdidas de calor en ambos tanques son despreciables, y que las perturbaciones importantes son $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_{c1}(t)$ y $T_4^{\text{fijo}}(t)$, se debe obtener el diagrama de bloques completo para el circuito de control de temperatura, así como su ecuación característica. En cada bloque se debe anotar la función de transferencia correspondiente.

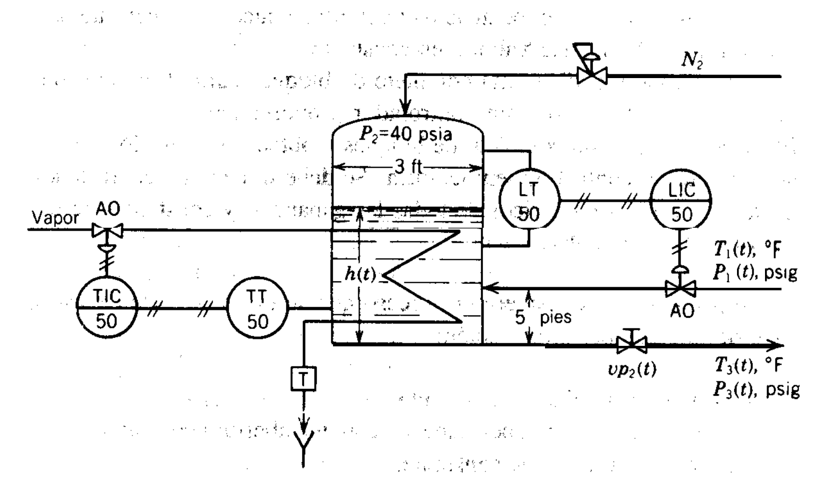


Figura 6-45. Calentador de aceite para el problema 6-26.

6-26. Ahora se considera el proceso que se muestra en la figura 6-45. El fluido en proceso que entra al tanque es un aceite con densidad de 53 lbm/pie^3, capacidad calorífica de 0.45 Btu/lbm-°F y temperatura de entrada de 70°F. El aceite se'debe calentar a 200°F, mediante vapor que se suministra a 115 psig. En el tanque se mantiene la presión a 40 psia, encima del nivel del aceite, mediante una capa de gas inerte, N_2.

Se puede suponer que el aislamiento del tanque es bueno.; que las propiedades físicas del aceite no son funciones que dependan demasiado de la temperatura; que la mezcla del liquido es buena, y que el nivel esta por arriba del serpentín de calefacción. También se conocen los siguientes datos:

$\bar{P}_1$ = 45 psig; $\bar{P}_3$ = 15 psig
h, del lado del vapor = 1500 Btu/h-pies^2-°F
h, en el lado del aceite = 150 Btu/h-pies^2-°F
Área de la superficie calefactora = 127.5 pies^2
Serpentín calefactor: ½ pulg DE, tubos 20 BWG, 974 pies lineales y con espesor de pared 0.035 pulg.
Densidad del tubo = 500 lbm/pies^3
C_p del tubo = 0.12 Btu/lbm-°F
Diámetro del tanque: 3 pies
Transmisor de nivel: Rango: 7-10 pies
Constante de tiempo: 0.01 min
Transmisor de temperatura: Rango: 100-300°F
Constante de tiempo: 0.5 min

a) Las válvulas 1 y 2 se dimensionarán con un factor de sobrecapacidad del 50% ; el flujo nominal de aceite es de 100 gpm. La válvula 3, de vapor, se dimensionará con un factor de sobrecapacidad del 50; se puede suponer que la caída de presión a través de esta válvula es constante.
d) Se debe elaborar el diagrama completo de bloques para el circuito de control de nivel. Se debe utilizar un controlador proporcional.
c) Elaborar el diagrama completo de bloques y obtener la ecuación característica del circuito de control de temperatura. Se'debe utilizar un controlador PID y anotar los valores numéricos 'de todas las ganancias y constantes de tiempo en las funciones de transferencia.

6-27. Para este problema se considera el proceso que se' muestra en la figura 6-46. Se dispone de la siguiente información:

1. La densidad del líquido es constante.
2. Las dos válvulas de salida permanecen con una abertura constante, y la presión de la corriente también es constante.
3. El caudal de la bomba se expresa por

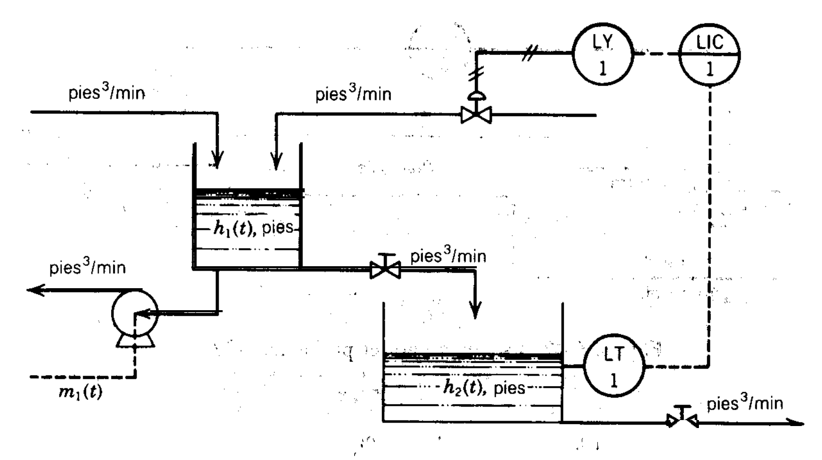


Figura 6-46. Controlador de **nivel** para **el problema** 6-27.

$$q_0(t) = K_p[m_1(t) - 4]$$

4. La bomba de velocidad variable tiene una constante de tiempo en la que se relaciona el caudal con la señal de entrada, $m_1(t)$, de τ_p s.
5. La válvula de control es lineal y mediante su constante de tiempo se relaciona el caudal con la señal neumática, de τ_v s. La caída de presión a **través** de la **válvula de** control es constante.
6. Los **diámetros** de **los tanques son** D_1 y D_2.
7. Los coeficientes de las **válvulas son** C_{V1}, C_{V2} y C_{V3}.
8. El rango del transmisor de nivel es Δh y la constante de tiempo es despreciable.

a) Se debe obtener el diagrama de bloques; con las funciones de transferencia correspondientes, para **este** sistema de control. Las **perturbaciones** son $q_1(t)$ y $m_1(t)$.

b) Se debe escribir la **ecuación característica del** circuito a control de nivel y determinar la ganancia y período últimos en **función** de los **parámetros** del sistema.

6-28. Ahora se considera el proceso que aparece en la **figura 6-47.** En este proceso se enriquece un gas de desecho con gas natural para su **utilización** como combustible en un **horno pequeño. El** gas enriquecido debe tener. un cierto **valor** de calefacción a fin de poder utilizarlo como combustible: por tanto, para la estrategia de control se necesita medir el valor de calefacción del **gas** que sale del proceso **y** manejar el flujo. del gas **natural (con un** ventilador de velocidad variable) con la finalidad de mantener el valor de calefacción en el punto de control.

El **gas de desecho se** compone de metano **(CH_4)** y algunos, combustibles con bajo valor calórico. La composición del gas natural se puede considerar constante

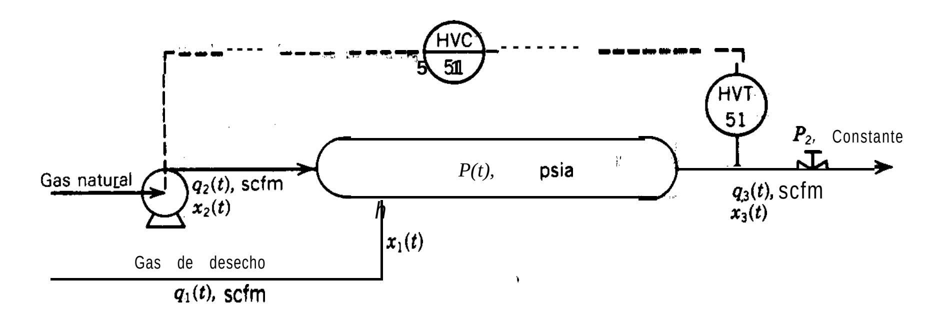


Figura 6-47. Esquema para el problema 6-28.

y lo constituyen principalmente metano y pequeñas cantidades de otros hidrocarburos. El valor calórico del gas de desecho enriquecido esta en relación con la fracción molar del metano, lo cual se expresa mediante la relación:

$$hv(t) = c + d\ x_3(t)$$

donde:

$hv(t)$ es el valor calórico
x_3 es la fracción molar de metano
c, d son constantes

El ventilador de velocidad variable es de naturaleza tal que, a toda velocidad, el flujo es de $q_{2máx}$. Se puede suponer que la relación entre el flujo. y la señal que entra al conductor del ventilador es lineal; la constante de, tiempo del conductor es τ_F.

La abertura de la válvula de salida es constante y se puede utilizar una ecuación de válvulas Masoneilan para describir el flujo a través de esta válvula. Para controlar el valor calórico se utiliza un controlador proporcional-integral. La constante de tiempo del sensor-transmisor es de τ_T min.

La relación entre la grayedad específica del gas enriquecido y la fracción molar de metano se establece mediante

$$G(t) = a + b\ x_3(t)$$

donde a y b son constantes.

a) Se debe determinar el diagrama de bloques completo para este sistemadecontrol; en el mismo se anotaran todas las funciones de transferencia. Las perturbaciones posibles son $q_1(t)$, $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

b) Se debe escribir la ecuación característica del circuito de retroalimentación de control.

c) Se debe determinar lá ganancia última y el período de oscilación del circuito (si es que existen).

CAPÍTULO 7

Diseño clásico de un sistema de control por retroalimentación

En el capítulo anterior se inició el estudio de la estabilidad y el diseño de los sistemas de control mediante dos **técnicas**: la prueba **de Routh** y la substitución directa. En este capitulo se continúa ese estudio y se presentan dos técnicas adicionales: lugar de **raíz** y **respuesta en** frecuencia. El **significado** y **utilización** de **estas técnicas se** aborda desde un punto de vista práctico; finalmente, el capitulo se termina con una **presentación** de la aplicación de la técnica de respuesta en frecuencia para la identificación del proceso.

Antes de abordar el estudio de las técnicas de lugar de **raíz** y respuesta en frecuencia, se deben definir algunos términos importan& para tal estudio; con este objeto se considera el diagrama de bloques general de un **circuito** cerrado que se muestra en la figura 7-1. Como se vio en el capitulo 6, las funciones de transferencia de circuito cerrado son

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_v(s)G_{p_1}(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p_1}(s)} \tag{7-1}$$

Y

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_{p_2}(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p_1}(s)} \tag{7-2}$$

la ecuación característica es

$$1 + H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p_1}(s) = 0 \tag{7-3}$$

La ***función de transferencia de circuito abierto*** (FTCA) (OLTF por sus siglas en inglés) se define como el producto de todas las funciones de transferencia del circuito de control.

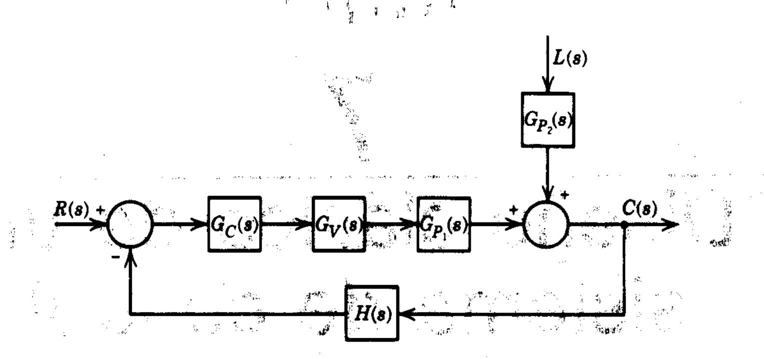


Figura 7-1. Diagrama general de circuito cerrado.

$$\text{FTCA} = H(s)G_c(s)G_v(s)G_{p1}(s) \tag{7-4}$$

Y, por tanto, la ecuación característica se puede escribir también como

$$1 + \text{FTCA} = 0 \tag{7-5}$$

Ahora se supone que las funciones de transferencia individuales se conocen y que la FTCA tiene la forma siguiente:

$$\text{FTCA} = \frac{K_c K_v K_{p1} K_T (1 + \tau_D s)}{(\tau_T s + 1)(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

o

$$\text{FTCA} = \frac{K(1 + \tau_D s)}{(\tau_T s + 1)(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde $K = K_c K_v K_{p1} K_T$.

Se define como *polos* a las raíces del denominandor de la FTCA; en este caso los polos son $-1/\tau_T$, $-1/\tau_1$ y $-1/\tau_2$. Los ceros se definen como las raíces del numerador de la FTCA; en este caso $-1/\tau_D$.

Para generalizar dichas definiciones la FTCA se escribe como sigue:

$$\text{FTCA} = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n} (\tau_j s + 1)}, \quad n > m$$

o

$$\text{FTCA} = \frac{K' \prod_{i=1}^{m} \left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n} \left(s + \frac{1}{\tau_j}\right)}, \qquad n > m \tag{7-6}$$

donde:

$$K' = \frac{K \prod_{i=1}^{m} \tau_i}{\prod_{j=1}^{n} \tau_j}$$

De la ecuación (7-6), se observa inmediatamente que los polos son iguales a $-1/\tau_j$, para $j = 1$ a n; de manera, semejante, los ceros se expresan con $-1/\tau_i$, para. $i = 1$ a m y a $s = 0$. Estas definiciones se utilizan frecuentemente en el estudio de las técnicas de lugar de raíz' y respuesta en frecuencia.

7-1 TÉCNICA DE LUGAR DE RAÍZ

El lugar de raíz es una técnica gráfica que consiste en graficar las raíces de la ecuación característica, esto es, los eigenvalores, cuando una ganancia o cualquier otro de los parámetros del circuito de control cambia. En la gráfica que resulta se puede apreciar de un vistazo si alguna raíz de la ecuación caracterfstica cruza el eje imaginario del lado izquierdo del plano s al lado derecho, lo cual sería indicación de alguna posibilidad de inestabilidad en el circuito de control.

A continuación se presentan varios ejemplos de la manera en que se puede dibujar el lugar de raíz; posteriormente, con base en estos ejemplos, se darán las reglas generales para la graficación. Con estos ejemplos se logra que se entiendan mejor los efectos de los diferentes parámetros del circuito de control sobre la estabilidad del mismo; dichos efectos ya se presentaron en el capitulo 6 y, por lo tanto, lo que sigue sirve también como repaso para el lector.

Ejemplos

Ejemplo 7-1. En el diagrama de bloques de un determinado circuito de control como el que se muestra en la figura 7-2, se tiene la siguiente ecuación caracterfstica para el sistema

$$1 + \frac{K_c}{(3s + 1)(s + 1)} = 0 \tag{7-7}$$

Y

$$\text{FTCA} = \frac{K_c}{(3s + 1)(s + 1)}$$

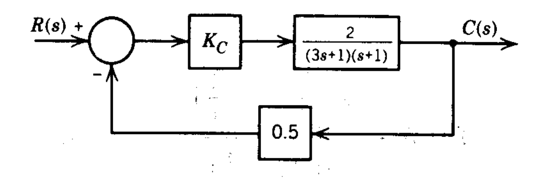


Figura 7-2. Diagrama de bloques del circuito de control -ejemplo 7- 1.

Se notará que en esta FTCA existen dos polos, $-1/3$ y -1, y que no hay ceros. A partir de la ecuación (7-7) se obtiene el siguiente polinomio en s

$$3s^2 + 4s + (1 + K_c) = 0 \tag{7-8}$$

Puesto que este polinomio es de segundo orden, tiéne dos raíces. Se utiliza la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, obtener las raíces, y se desarrolla la siguiente expresión:

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12(1 + K_c)}}{6}$$

$$r_1, r_2 = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1 - 3K_c} \tag{7-9}$$

Figura 7-3. Diagrama del lugar de raíz para el sistema de la figura 7-2.

En la ecuación 7-9 se observa que las **raíces** de la ecuación, característica dependen del valor de K_c, lo cual equivale a decir que la estabilidad del circuito de control depende del ajuste del controlador por retroalimentación. Naturalmente, en el capítulo 6 se vio que también éste era el caso. Los lugares de las **raíces** se determinan mediante la asignación de valores a K_c; en la figura 7-3 se muestra la gráfica de las raíces o lugar de raíz, de la cual, al examinarla, se pueden **aprender** varias cosas:

1. El punto más **importante** es, que este circuito de control particular nunca se vuelve inestable, **no** importa **qué** tan grande se haga el valor de K_c. Conforme se incrementa el valor **de** K_c, la respuesta del circuito se hace más oscilatoria o **subamortiguadá**, pero jamás **inestable.** La-respuesta subamortiguada se reconoce porque las raíces de la ecuación característica se alejan del eje **real** conforme se **incrementa** K_c. El hecho de **que un** circuito de control con una ecuación 'pura de segundo orden (o primer **orden) no** se **vuelva** inestable; se **demostró también** en el capítulo 6, mediante los **métodos** de prueba de Routh y de substitución directa.
2. Cuando $K_c = 0$, los lugares **de raíz** sé originan 'en los polos de la **FTCA**: **— 1/3** y — 1.
3. La **cantidad de lugâres de** raíz o ramas es iguai al número de polos de **la** FTCA, $n = 2$.
4. Conforme se incrementa K_c, los lugares de raíz tienden a infinito.

Ejemplo 7-2. Si ahora se **supone** que la combinación de sensor-transmisor en el ejemplo anterior tiene una constante de tiempo de 0.5 unidades de tiempo, el diagrama de bloques es el que se muestra en la figura 7-4, y la nueva ecuación característica y función de transferencia de circuito abierto son

Ecuación característica

$$1 + \frac{K_c}{(3s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)} = 0$$

o

$$1.5s^3 + 5s^2 + 4.5s + (1 + K_c) = 0$$

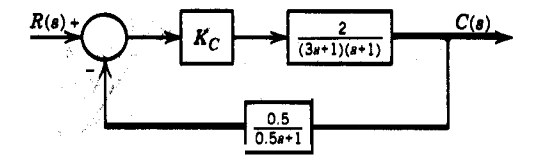


Figura 7-4. Diagrama de bloques: del circuito de control -ejemplo 7-2.

$$\text{FTCA} = \frac{K_c}{(3s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

con polos: $-\frac{1}{3}$, -1, -2; $n = 3$

ceros: ninguno; $m = 0$,

En este caso la ecuación característica es un polinomio de tercer orden y, por lo tanto, el cálculo de las raíces no es directo, se debe utilizar el método de Newton que se estudio en el capítulo 2, o el programa de computadora del apéndice D; sin embargo, como se verá, existe un método más fácil para trazar el lugar de raíz sin necesidad de calcular ninguna raíz.

En la figura 7-5 se muestra el diagrama de lugar de raíz y, nuevamente, se pueden aprender varias cosas de la simple observación de éste.

1. El aspecto más importante es que este sistema de control se puede volver inestable. Con algunos valores de K_c, en este caso $K_c = 14$, los lugares de raíz cruzan el eje imaginario; para valores de K_c mayores de 14, lasraíces de la ecuación característica estarán en el lado derecho del plano s, lo 'que ocasiona que el sistema

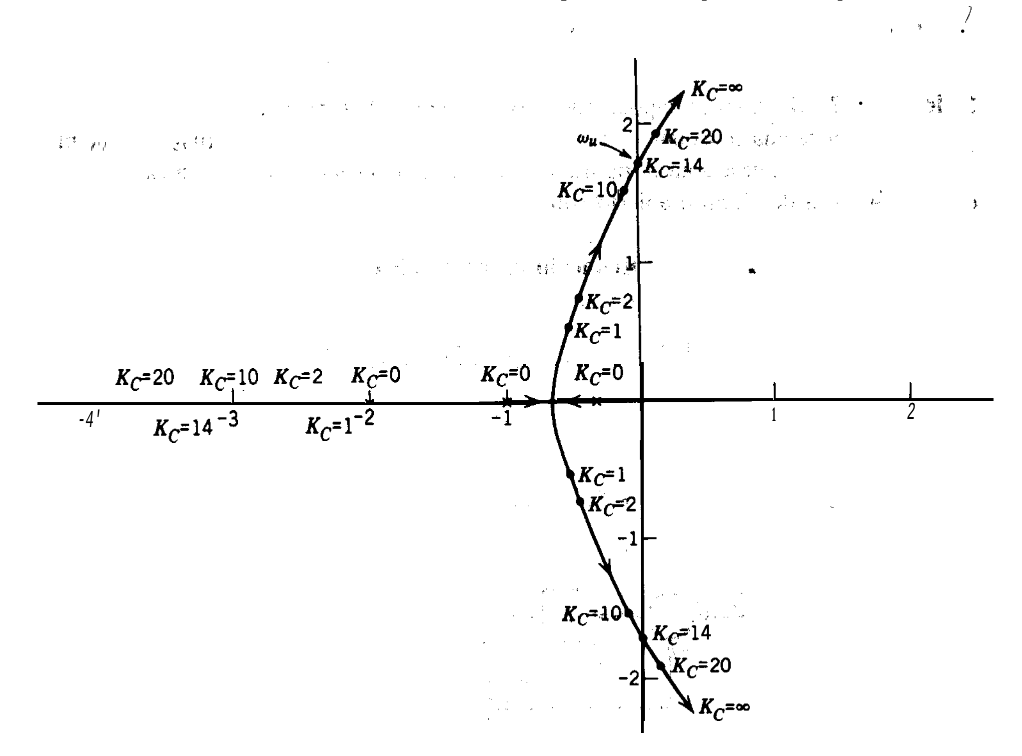


Figura 7-5. Diagrama del lugar de raíz para el sistema de la figura 7-4.

de control sea inestable. 'El valor de K_c con que al lugar de raíz cruza el eje imaginario se conoce como ganancia última, K_{cu}, lo que da lugar a un sistema condicionalmente estable, tal como se vio en el capitulo 6. La frecuencia última, ω_u, se expresa por la ordenada en que la rama cruza el eje imaginario. Cualquier circuito cuya ecuación característica sea de tercer orden o superior se puede volver inestable; los sistemas puros de primer o segundo orden no se vuelven inestables, como se vio en el ejemplo 7-1. Cualquier sistema con tiempo muerto se puede volver inestable, como se verá en este capítulo.

2. Con K_c = 0, los lugares de raíz tienen su origen, nuevamente, en los polos de la FTCA $-1/3$, -1, -2.
3. Nuevamente, la cantidad de lugares de raíz es igual al número de polos de la FTCA, $n = 3$.
4. Finalmente, conforme se incrementa K_c, nuevamente los lugares de raíz se aproximan,& infinito.

Ejemplo 7-3. Ahora se supone que en el circuito de control original, ejemplo 7-1, se utiliza un controlador proporcional-derivativo. En la figura 7-6 se muestra el diagrama de bloques; la nueva ecuación característica y la función de transferencia de circuito abierto son de la forma siguiente:

Ecuación característica

$$1 + \frac{K_c(1 + 0.2s)}{(3s + 1)(s + 1)} = 0$$

o

$$3s^2 + (4 + 0.2K_c)s + (1 + K_c) = 0$$

$$\text{FTCA} = \frac{K_c(1 + 0.2s)}{(3s + 1)(s + 1)},$$

con polos: $-\frac{1}{3}$, -1; $n = 2$,

ceros: -5; $m = 1$

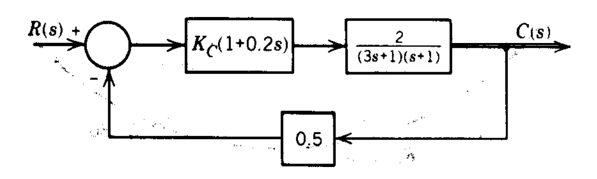


Figura 7-6. Diagrama di: bloques del circuito de control -ejemplo 7-3.

-Puesto que la ecuación característica es.de segundo orden, sus **raíces** se determinan mediante la **fórmula** general para resolver ecuaciones cuadráticas

$$r_1, r_2 = \frac{-(4 + 0.2K_c) \pm \sqrt{4 - 10.4K_c + 0.04K_c^2}}{6}$$

Al darle valores a K_c, **es** posible, obtener **el** lugar de **raíz** para este **sistema**, como se muestra en la figura 7-7.

Al igual que en los otros ejemplos, se pueden aprender varias cosas de este diagrama:

1. Este circuito de control nunca se hace inestable, aún más, conforme se incrementa K_c, los lugares' de **raíz** se alejan del eje imaginario y el **circuito de control se vuelve** más estable. En efecto, con la acción derivativa se adiciona un **término** de "**adelanto**" al circuito de control. Mediante la adición de cualquier **término** de adelanto **(avance)** se "**añade**" **estabilidad** a los circuitos de **control; con** la **adición de un**

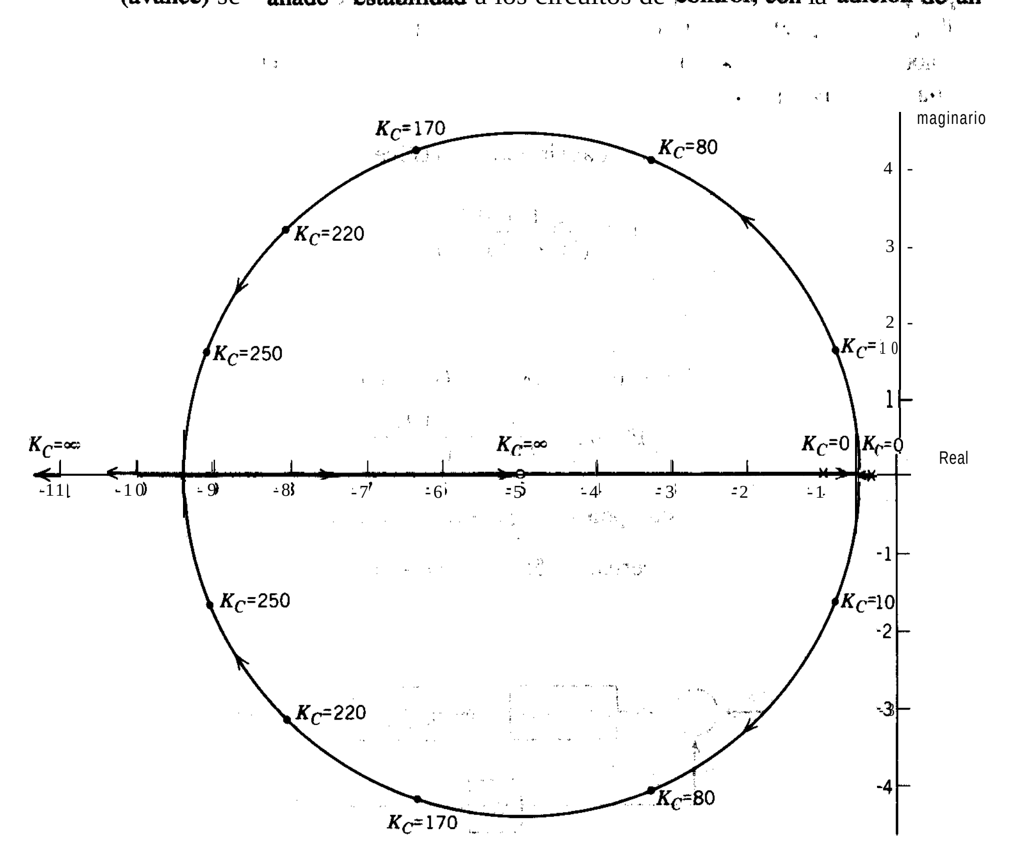


Figura 7-7. Diagrama del lugar de raíz para **el sistema de** la **figura** 7-6.

término de retardo se "remueve" la estabilidad de los sistemas de control, como se. vio en el ejemplo 7-2.

2. Los lugares de raíz tienen su origen en los polos de la FTCA: $-1/3$ y -1, lo cual es similar en los ejemplos anteriores.
3. La cantidad de lugares de raíz es igual al número de polos de la FTCA, $n = 2$. Éste es también el caso en los ejemplos anteriores.
4. Conforme se incrementa K_c, uno de los lugares de raíz se aproxima al cero de la FTCA, -5, y los otros se aproximan a menos infinito.

Reglas para graficar los diagramas de lugar de raíz

En los ejemplos anteriores se mostró el desarrollo de los diagramas de lugar de raíz. Mientras la ecuación característica sea de segundo orden, es bastante fácil desarrollar el diagrama, pero en sistemas de orden superior, la obtenciónde las raíces de la ecuación característica se vuelve bastante tediosa.

Se han desarrollado varias reglas para ayudar al ingeniero a trazar los diagramas de lugar de raíz; para utilizar tales reglas, la ecuación característica y la función de transferencia de circuito abierto se escriben en la siguiente forma:

Ecuación característica

$$1 + \frac{K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)} = 0 \qquad (7\text{-}10)$$

$$\text{FTCA} = \frac{K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)} \qquad (7\text{-}11)$$

donde:

$$z_i = -\frac{1}{\tau_i} = \text{ceros}$$

$$p_j = -\frac{1}{\tau_j} = \text{polos}$$

$$K' = \frac{K \prod_{i=1}^{m} \left(-\frac{1}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{1}{p_j}\right)}$$

K = ganancia total del lazo; es el producto de todas las ganancias en el circuito.

Las reglas que se presentan aquí se desarrollaron con base en el hecho de que el lugar de raíz debe satisfacer lo que se conoce como condiciones de magnitud y ángulo. Con la finalidad de explicar en qué consisten dichas condiciones, se considera nuevamente la ecuación característica que expresa la ecuación (7-10), la cual también se puede escribir como sigue:

$$\frac{K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)} = -1$$

Puesto que la ecuación es de naturaleza compleja, se puede separar en dos partes: magnitud y ángulo de fase; si se realiza la multiplicación y la división en forma polar, como se' presentó en la sección 2-3, se obtiene

$$\frac{K' \prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}{\prod_{j=1}^{n} |s - p_j|} = 1 \tag{7-12}$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \measuredangle (s - p_j) = -\pi \pm 2\pi k \tag{7-13}$$

donde k es un entero positivo con valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n-m-1$.

La ecuación (7- 12) *se* conoce como *condición de magnitud* y la ecuación (7- 13) como *condición de ángulo.* Las raíces o eigenvalores de la ecuación característica deben satisfacer ambos criterios.

La condición de ángulo se utiliza para ubicar los lugares de raíz en el plano s; la de magnitud se usa entonces para calcular el valor de K', con el que se le asigna a la raíz un punto específico en el diagrama de lugar de raíz.

Mediante un ejemplo simple se muestra ahora cómo se utilizan las condiciones de magnitud y de ángulo para localizar una raíz, para ello se considera la figura 7-8 en la cual se ilustra un sistema donde hay dos polos de la FTCA, los cuales se marcan con x, y un cero de la FTCA, el cual se marca como 0. Se elige un valor de s, por ejemplo s_1, y se trata de determinar si es una raíz y, por tanto, es parte del lugar de raíz. El primer paso consiste en verificar la condición de ãngulo, para esto se trazan segmentos de línea que unen al punto s_1 con cada polo y cada cero, como se ve en la figura 7-8; entonces se mide el ángulo que forma cada uno de estos segmentos con el eje real; si se satisface la condición de ángulo, el punto s_1 forma parte del lugar de raíz; si no se satisface la condición de ángulo, se debe elegir otro punto en el plano s y probar -éste es un procedimiento de ensayo y error. Con esto se aumenta la importancia de la utilización de las reglas que se presentan.- Una vez que se identifica un punto en el plano s como parte del

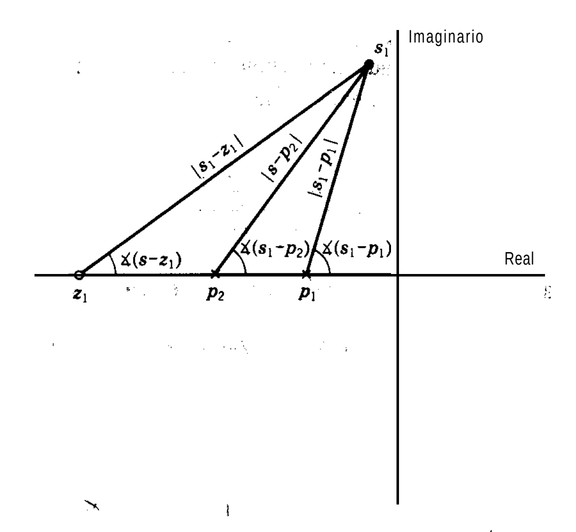


Figura 7-8. Determinación de las raíces de la ecuación característica.

lugar de raíz, entonces se utiliza la condición de magnitud para calcular el valor de K' que corresponde a la raíz. Dicho cálculo se muestra posteriormente en un ejemplo.

En el párrafo precedente se explicó brevemente la manera en que las condiciones de magnitud y ángulo sirven como base para dibujar el lugar de raíz. Las reglas que, se desarrollaron a partir de tales condiciones se pueden utiizar para esbozar de manera cualitativa el lugar de raíz; es posible determinar ciertos puntos tales como la ganancia y la frecuencia últimas, así como la ganancia que se requiere para obtener una cierta razón de amortiguamiento. Se debe tener presente que los lugares de raíz siempre son simétricos respecto al eje real, lo cual es consecuencia del hecho de que las raíces de la ecuación característica son reales o complejas conjugadas. A continuación se dan las reglas correspondientes:

Regla 1. Sobre el eje real el lugar de raíz existe en el punto en que hay una cantidad impar de polos y ceros a la derecha del punto.

Regla 2. Para una ganancia total de lazo = 0, los lugares de raíz se originan siempre en los polos de la FTCA. Los polos repetidos dan origen a lugares de raíz repetidos, es decir, un polo de orden q da origen a q lugares o ramas.

Regla 3. La cantidad de lugares o ramas es igual al numero de polos de la FTCA, n.

Regla 4. Conforme se incrementa la ganancia total del lazo, los lugares o ramas se aproximan a los ceros de la FTCA o a infinito. La cantidad de lugares que tienden a infinito la expresa $n-m$. Los ceros repetidos atraen lugares repetidos, esto es, un cero de, orden q atrae q lugares 0 ramas.

Regla 5. Los lugares que tienden a infinito lo hacen sobre asíntotas. Todas las asíntotas deben pasar por el "centro de gravedad". de los polos y ceros de la FTCA. La ubicación del centro de gravedad (CG) se calcula como sigue:

$$CG = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m} \tag{7-14}$$

Estas asíntotas forman los siguientes ángulos con el eje real positivo:

$$\phi = \frac{180° + (360°)k}{n - m} \tag{7-15}$$

(2K+1)π / np − mz

donde $k = 0, 1, \ldots, n - m - 1$

Regla 6. Los puntos en que los lugares se juntan y separan sobre el eje real, o llegan desde la región compleja del plano *s*, se conocen como "puntos de ruptura", los cuales se determinan, frecuentemente, por ensayo y error, con base en la solución de la ecuación

complejas a ± bi

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - p_j} \tag{7-16}$$

(s − a) / ((s − a)² + b²)

En los puntos de ruptura los lugares siempre se alejan o llegan al eje real con ángulos de $\pm 90°$.

Cuando un lugar se aleja de un polo conjugado complejo, p_k, el ángulo de alejamiento en relación al eje real se encuentra con base, en

$$\text{ángulo de alejamiento} = 180° + \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (p_k - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \measuredangle (p_k - p_j)$$

[El símbolo $\measuredangle (p_k - z_i)$ indica el ángulo, en relación con el eje real, entre el polo p_k y el cero z_i.]

Cuando un lugar llega a un cero conjugado complejo, z_k, el ángulo de llegada respecto al eje real se encuentra a partir de

$$\text{ángulo de llegada} = -180° + \sum_{j=1}^{n} \measuredangle (z_k - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \measuredangle (z_k - z_i)$$

A continuación se presenta la utilización de estas reglas para la graficación de los diagramas de lugar de raíz.

Ejemplo 7-4. Se considera el circuito de control de temperatura del intercambiador de calor que se presentó en el capítulo 6. El diagrama de bloques de la figura 6-3 se dibuja nuevamente en la figura 7-9, con cada una de las funciones de transferencia.

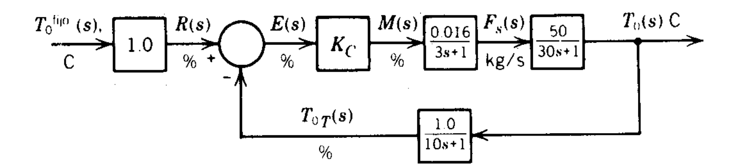


Figura 7-9. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura para el **intercambiador** de calor -controlador P.

Ecuación característica

$$1 + \frac{0.8K_c}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)} = 0$$

$$\text{FTCA} = \frac{0.8K_c}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)}$$

Como se observa en la ecuación (7-1 1), la FTCA se puede escribir también como sigue:

$$\text{FTCA} = \frac{K'}{\left(s + \frac{1}{10}\right)\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)}$$

con polos: $-\frac{1}{10}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{3}$; $n = 3$

ceros: ninguno; $m = 0$

donde:

$$K' = \frac{0.8K_c}{(10)(30)(3)} = 0.000888\ K_c$$

En la figura 7-10 se muestra la ubicación de los polos (x) en el plano s.

- De la regla 1 se tiene que la porción negativa del eje real entre los polos $-1/30$ y $-1/10$, y del polo $-1/3$ a $-\infty$ forma parte del lugar de raíz.
- Con base en la regla 2, se sabe que los lugares de raíz tienen su origen en los polos de la FTCA: $-$ MO, $-1/30$ y $-1/3$.
- Puesto que hay tres polos, $n = 3$, de la regla 3, se tiene que existen tres lugares 0 ramas.
- Puesto que no hay ceros, $m = 0$, la regla 4 indica que, conforme se incrementa K_c, todos los lugares tienden a infinito.
- Con la regla 5 se puede obtener el centro de gravedad a través del cual deben pasar las asíntotas, así como los ángulos que éstas forman con el eje real positivo. -Puesto

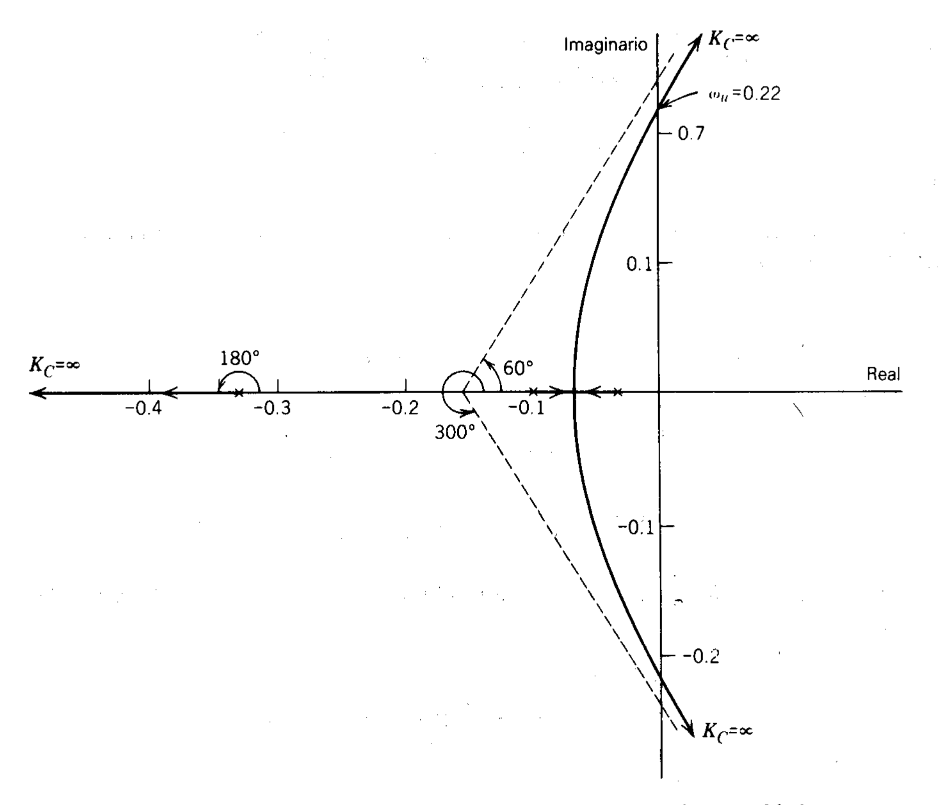


Figura 7-10. Diagrama de lugar de raíz para el circuito de control del **intercambiador** de calor.

que hay tres ramas que tienden a infinito, también debe haber tres asíntotas, de la ecuación (7-14) se tiene

$$CC = \frac{\frac{1}{10} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{3}}{3} = -0.155$$

y de la ecuación (7-15) se tiene

$$\phi = \frac{180° + 360°(0)}{3}, \quad \frac{180° + 360°(1)}{3}, \quad \frac{180° + 360°(2)}{3}$$

$$\phi = 60°, 180°, 300°$$

Los ángulos y las asíntotas se muestran en la figura 7-10. Una de las asíntotas coincide con el eje real, $\phi = 180°$, y se mueve del centro de gravedad hacia menos infinito; las otras dos asíntotas se alejan del eje real hacia la región compleja del

plano s y cruzan el eje imaginario, lo cual indica que existe la posibilidad de inestabilidad, ya que los lugares se acercan a infinito sobre estas asíntotas.

- La regla 6 se utiliza para calcular los puntos de ruptura; al aplicar la ecuación (7-16), se obtiene

$$\frac{1}{s+\frac{1}{30}}+\frac{1}{s+\frac{1}{10}}+\frac{1}{s+\frac{1}{3}}=0$$

de donde se tienen dos posibilidades: -0.247 y -0.063. El único punto de ruptura valido es -0.063, ya que esta en la región del eje real donde los dos lugares se acercan el uno al otro.

Antes de dibujar el diagrama final del lugar de raíz es conveniente conocer el punto en que los lugares cruzan el eje imaginario, con el cual se tiene un punto más para dibujar los lugares de raíz, lo que aumenta la precisión del diagrama. Dicho punto es la frecuencia última, ω_u, y se encuentra fácilmente mediante la aplicación del método de substitución directa que se estudió en el capítulo 6. Al aplicar este método al problema, se encuentra que $\omega_u = \sim 0.22$. El método de substitución directa también se puede utilizar para encontrar la ganancia del controlador a la cual se produce este estado de estabilidad condicional; dicho valor es $K_{cu} = 24.0$. En la figura 7-10 se muestra el diagrama completo del lugar de raíz.

Con este ejemplo se demostró que el trazado del lugar de raíz es bastante simple y que no es necesario encontrar ninguna raíz del sistema. Los lugares entre el punto de ruptura y la frecuencia de cruce se dibujaron a mano, lo cual, por lo regular, es suficiente para la mayor parte del trabajo de control de proceso. Al graficar los lugares de raíz, es conveniente utilizar un instrumento de dibujo que se conoce como curvígrafo, el cual es utilizado principalmente por los ingenieros electricistas.

El diagrama que se muestra en la figura 7-10 sirve como ayuda para ilustrar otro uso del lugar de raíz. Se puede suponer que se desea ajustar el controlador por retroalimentación de modo que la respuesta de circuito cerrado del sistema de control sea oscilatoria con una razón de amortiguamiento de 0.707, $\xi = 0.707$.

En el capítulo 4 se definió la razón de amortiguamiento como parámetro de un sistema de segundo orden. Al utilizar, tal especificación de desempeño; ξ, se supone que el proceso es de segundo orden o que hay dos constantes de. tiempo considerablemente más largas que las otras. Estas dos constantes de tiempo pueden "dominar" la dinámica del proceso y son el origen de las raíces que se encuentran más hacia la derecha (las más cercanas al eje imaginario) y que se conocen como ***raíces dominantes.*** El ajustar un controlador por retroalimentación para las especificaciones anteriores significa que con las dos raíces dominantes de la ecuación característica se debe satisfacer la ecuación

$$\tau^2 s_1^2 + 2\tau\xi s_1 + 1 = 0$$

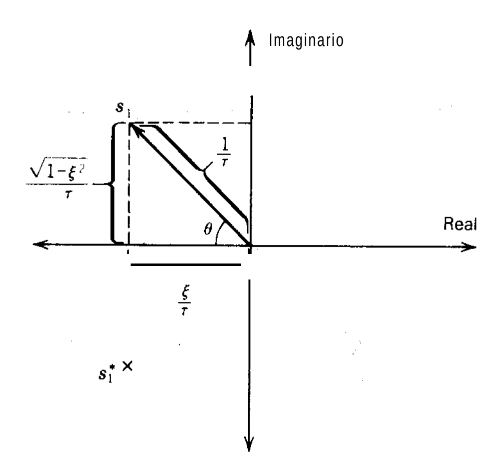


Figura 7-11. Raíces s_1 y s_1^* de un sistema de segundo orden.

con ξ = 0.707, estas raíces son

$$s_1, s_1^* = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{1}{\tau}\sqrt{1-\xi^2}\, i$$

En la figura 7-11 se muestran gráficamente dichas raíces. A partir de esta figura se'puede determinar lo siguiente:

$$\theta = \cos^{-1} \xi$$

entonces, para

$$\xi = 0.707$$
$$\theta = \cos^{-1} 0.707 = 45"$$

En la figura 7-12 se muestra cómo encontrar lasrafces, s y s^*, del sistemacon este factor de amortiguamiento. En tal caso las **raíces** se localizan, de manera aproximada, en $-$ 0.06 $\pm$ **0.6*i*.** Ahora se-debe calcular la ganancia del controlador con que se obtiene dicho comportamiento de lazo cerrado, para lo cual se utiliza el criterio de magnitud, ecuación **(7-12),** y, por tanto, se debe medir la distancia entre la raíz s, cada polo y cero; la medición se puede hacer simplemente con una regla (utilizando la misma escala de magnitud que en el eje) o mediante el teorema de Pitágoras, se prefiere este último, ya que se minimizan los errores de medición. Para tal sistema, el criterio de magnitud es

$$\frac{K'}{|s-p_1||s-p_2||s-p_3|} = 1$$

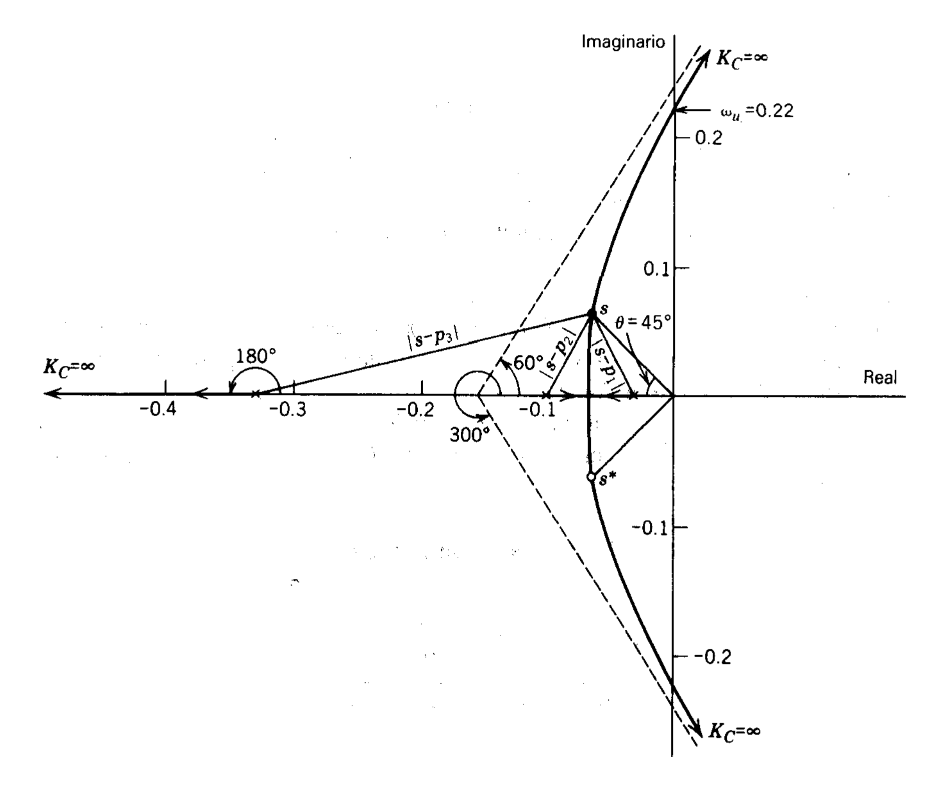


Figura 7-12. Utilización del diagrama de lugar de **raíz** para ajustar un controlador.

Puesto que el primer polo se presenta en $p_1 = -0.033 + 0i$, se tiene que, al calcular la distancia $|s - p_1|$ mediante el teorema de Pitágoras, ésta es

$$|s - p_1| = \sqrt{(0.060 - 0.033)^2 + (0.06 - 0)^2} = 0.066$$

de manera semejante

$$|s - p_2| = \sqrt{(0.060 - 0.1)^2 + (0.06 - 0)^2} = 0.072$$

$$|s - p_3| = \sqrt{(0.060 - 0.33)^2 + (0.06 - 0)^2} = 0.276$$

entonces

$$\frac{K'}{(0.066)(0.072)(0.276)} = 1$$

$$K' = 0.00131$$

y puesto que

$$K' = 0.000888 K_c$$

la ganancia del controlador es

$$K_c = 1.415$$

Esta ganancia del controlador da lugar a una respuesta oscilatoria del circuito de control, con un factor de amortiguamiento de 0.707.

A continuación se presenta un ejemplo más detallado.

Ejemplo 7-5. Se desea utilizar un controlador PI para controlar el intercambiador de calor del ejemplo 7-4. Grafíquese el diagrama de lugar de raíz para este nuevo sistema de control, para lo cual se utiliza un tiempo de reajuste de 1 min. ¿Cuál es el efecto de añadir la acción de reajuste al controlador?

El diagrama de bloques se muestra en la figura 7-13; se notará que el tiempo de reajuste está dado en segundos (60), en lugar de minutos (1 min), a fin de mantener la consistencia en las unidades.

Ecuación característica

$$1 + \frac{0.8K_c\left(1 + \frac{1}{60s}\right)}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)} = 0$$

$$\text{FTCA} = \frac{0.8K_c\left(1 + \frac{1}{60s}\right)}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)}$$

o

$$\text{FTCA} = \frac{K'\left(s + \frac{1}{60}\right)}{s\left(s + \frac{1}{10}\right)\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)}$$

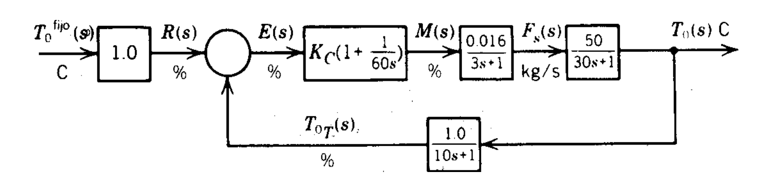


Figura 7-13. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura para el intercambiador de calor -controlador PI.

donde:

$$K' = \frac{0.8K_c}{(10)(30)(3)} = 0.000888K_c$$

$$\text{con polos: } 0, \ -\frac{1}{10}, \ -\frac{1}{30}, \ -\frac{1}{3}; \qquad n = 4$$

$$\textbf{ceros: } -\frac{1}{60}; \qquad m = 1$$

En la figura 7-14 se muestra la ubicación de los polos (x) y los ceros (0) en el plano s.

- De la raíz 1, se tiene que el eje real negativo forma parte del lugar de raíz, entre el polo en 0 y el cero en $-1/60$. Éste es **también** el caso entre los polos en $-1/30$ y $-1/10$, y del polo en $-1/3$ a $-\infty$.
- De la regla 2, se tiene que el origen del lugar de raíz esta en 0, $-1/10$, $-1/30$ y $-1/3$, que son los polos de la **FTCA**.
- Puesto que hay cuatro polos, $n = 4$, en la regla 3 se establece que existen cuatro lugares 0 ramas.

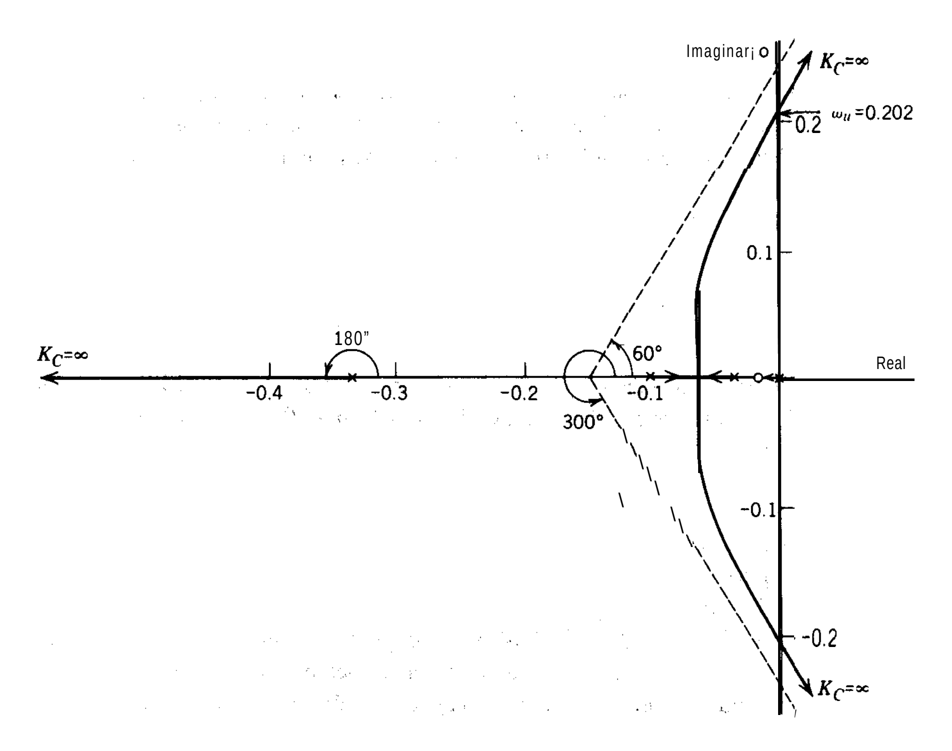


Figura 7-14. Diagrama de lugar de **raíz** para el circuito de, control del **intercambiador** de calor -controlador PI.

- Puesto que existe un cero, $m = 1$, en la regla 4 se establece que una de las ramas debe terminar en este cero; en tal caso, es la rama que se origina en el polo igual a cero. Las otras ramas, $n - m = 3$, tenderán a infinito conforme se incremente K_c
- El centro de gravedad se determina mediante la regla 5, así como los ángulos que forman las asíntotas con el eje real positivo. Puesto que hay tres ramas que se aproximan a infinito, debe haber tres asíntotas. De acuerdo con la ecuación (7-14)

$$CG = \frac{-\frac{1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{3} + \frac{1}{60}}{3} = -0.15$$

y, de la ecuación (7-13), se tiene

$$\phi = \frac{180° + 360°(0)}{3}, \quad \frac{180° + 360°(1)}{3}, \quad \frac{180° + 360°(2)}{3}$$

$$\phi = 60°, 180°, 300°$$

En la figura 7-14 se muestran estas asíntotas y los ángulos; una de las asíntotas coincide con el eje real y se mueve del centro de gravedad hacia menos infinito; las otras dos asíntotas se alejan del eje real, cruzan el eje imaginario y entran en la región compleja del plano s, lo cual indica una posible inestabilidad.
- Con la regla 6 se obtienen los puntos de ruptura; al aplicar la ecuación (7-16), se obtiene

$$\frac{1}{s + \frac{1}{60}} = \frac{1}{s + 0} + \frac{1}{s + \frac{1}{10}} + \frac{1}{s + \frac{1}{30}} + \frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

De las cuatro posibilidades que se obtuvieron: $-0.0137 \pm 0.0149i$, -0.0609, -0.245, el único punto de ruptura válido está en -0.0609, ya que es el único que coincide con la región del eje real donde se acercan dos lugares de raíz.

Al aplicar el método de substitución directa a la ecuación característica de este sistema, se determina que la frecuencia de cruce o última es $\omega_u = 0.202$, y la ganancia del controlador con que se produce esta condición es $K_{cu} = 20.12$. En la figura 7-14 se muestra el diagrama final del lugar de raíz.

Al comparar la figura 7-10 con la 7-14, se observa que, al añadir la acción de reajuste al controlador proporcional, no se afecta significativamente la forma del lugar de raíz. El efecto más importante es el decremento en la ganancia última y en la frecuencia última. Se puede decir que con la acción de reajuste se hace que el circuito de control sea más inestable, ya que no tolera mucha ganancia del controlador antes de que se vuelva inestable. ¿Cuál es el efecto de hacer τ_I más grande o más pequeña?

Resumen del lugar de raíz

En esta sección se presentó la técnica de lugar de raíz para el análisis y diseño del control de proceso. Se mostró que el desarrollo del diagrama de lugar de raíz es simple y no se requiere de matemáticas complicadas. Probablemente la mayor ventaja de este método es su naturaleza gráfica; por otro lado, su mayor desventaja es que no se puede aplicar a los procesos donde hay tiempo muerto. En este aspecto es similar a las técnicas que ya se estudiaron: prueba de Routh y substitución directa. En los ejemplos que se utilizaron se mostró tambitn el efecto de las acciones derivativa y de reajuste sobre la estabilidad del circuito de control.

7-2. TÉCNICAS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Las de respuesta en frecuencia son algunas de las técnicas más populares para el análisis y diseño de sistemas de control de sistemas lineales. En esta sección se presenta el **significado** de respuesta en frecuencia y la forma en que se utiliza tal técnica para analizar y sintetizar los sistemas de control.

Para empezar, se considera el diagrama de bloques general que se muestra en la figura 7-15; el circuito de control se abre antes de la válvula y **después** del transmisor. La señal de entrada a la válvula se obtiene de un generador de frecuencia variable, $x(t) = X_o$ sen ωt; la señal de salida del transmisor y la de entrada a la válvula se registran en un dispositivo de registro; en la figura 7-16 se muestran ambos registros. Después de que cesan los transitorios, la respuesta de la salida del transmisor se hace senoidal, $y(t) = Y_o$ sen $(\omega t + 13)$. Este experimento se conoce como "prueba senoidal".

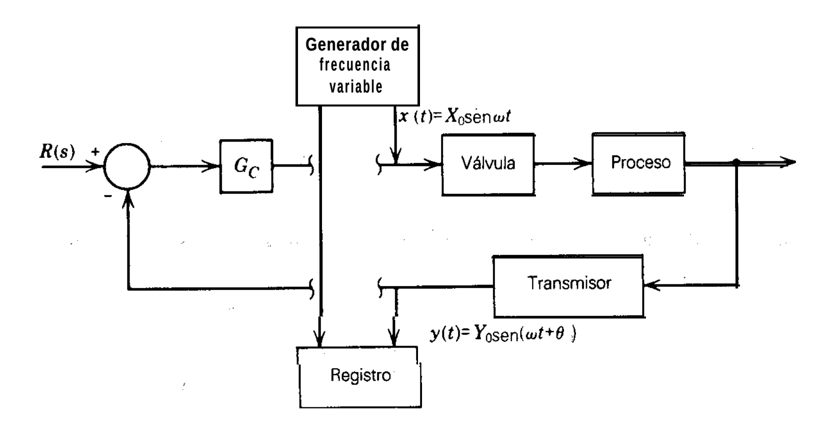


Figura 7-15. Diagrama de bloques donde se aprecian el generador de frecuencia variable y el dispositivo de registro.

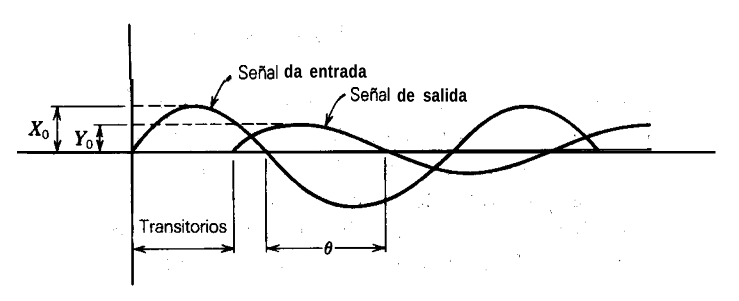


Figura 7-16. Registros para la prueba senoidal.

Ahora se "realiza" el **mismo** experimento, pero se utilizan las funciones de transferencia con que se describe al proceso. Se **propone** la siguiente función de transferencia simple:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{7-17}$$

Con esta función de transferencia se describe la **combinación** de válvula, proceso y transmisor. La señal de entrada a la **válvula** es

$$x(t) = X_0 \operatorname{sen} \omega t$$

0

$$X(s) = \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \tag{7-18}$$

En consecuencia

$$Y(s) = \frac{KX_0 \omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)}$$

Para obtener la expresión en el dominio del tiempo se utilizan las **técnicas** que se estudiaron en el capítulo 2:

$$y(t) = \frac{KX_0 \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} e^{-t/\tau} + \frac{KX_0}{1 + \omega^2\tau^2}[-\omega\tau \cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t]$$

Finalmente, se utiliza la identidad

$$A \cos at + B \operatorname{sen} at = r \operatorname{sen}(at + \theta)$$

donde:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Y

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A}{B}$$

para cambiar la expresión de $y(t)$ a

$$y(t) = \frac{KX_o\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}e^{-t/\tau} + \frac{KX_o}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad (7\text{-}19)$$

con

$$\theta = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \qquad (7\text{-}20)$$

En la ecuación (7-19) se observa que, conforme se incrementa el tiempo, el término exponencial se hace cero; éste es el término transitorio que caduca. Cuando esto ocurre, la expresión de salida se convierte en

$$Y(t)_{t \text{ muy grande}} = \frac{KX_o}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad (7\text{-}21)$$

la cual constituye el comportamiento senoidal de la señal de salida. La amplitud de esta salida es

$$Y_o = \frac{KX_o}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

En la ecuación (7-20), con el signo negativo se indica que la señal de salida "se retarda", respecto a la señal de entrada, en una cantidad θ, que se calcula a partir de la ecuación. En la figura 7-16 se muestra toda esta información en forma gráfica.

Aquí se hace necesaria una advertencia: se debe tener cuidado cuando se calcula el término seno en la ecuación (7-21); el término ω está dado en radianes/tiempo, y el término ωt, en radianes; por lo tanto, para que el resultado de la operación $(\omega t + \theta)$ esté expresado en las unidades correctas, θ debe estar en radianes. Si se utilizan grados, el término se debe escribir como

$$\left(\frac{180}{\pi}\omega t + \theta\right)$$

en breve, se debe estar alerta y ser cuidadoso con estas unidades.

A continuación se definen algunos términos utilizados en el estudio de la respuesta en frecuencia.

Razón de amplitud (RA) se define como la razón de la amplitud de la señal de salida respecto a la amplitud de la señal de entrada. Esto es

$$\text{RA} = \frac{Y_o}{X_o}$$

Razón de magnitud (RM) se define como la división de la razón de amplitud entre la ganancia de estado estacionario

$$\text{RM} = \frac{\text{RA}}{K}$$

Ángulo de fase (θ) es la cantidad, en grados o radianes, en que la señal de salida se retarda o adelanta respecto a la señal de entrada. Cuando θ es positiva, se trata de un ángulo de adelanto; cuando θ es negativa, se trata de un ángulo de retardo.

De la función de transferencia de primer orden que se vio anteriormente:

$$\text{RA} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \qquad \text{RM} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \qquad \theta = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

Cabe hacer notar que los tres términos están en función de la frecuencia de entrada. Naturalmente, cuando los procesos son diferentes, la forma en que RA (RM) y θ dependen de w, también es diferente.

Lu respuesta en frecuencia es esencialmente el estudio de la manera en que se comportan la RA (RM) y θ de diferentes componentes o sistemas cuando se cambia la frecuencia de entrada. En los párrafos siguientes se muestra que la respuesta en frecuencia es una técnica eficaz para analizar y sintetizar los sistemas de control. Primero se cubre el desarrollo de la respuesta en cuanto a frecuencia de los sistemas de proceso y se continúa con su utilización para el análisis y la síntesis.

En general, existen dos forinas diferentes para generar la respuesta en frecuencia:

1. Métodos experimentales. Esto consiste esencialmente en el experimento que se mostró anteriormente, con el generador de frecuencia‘variable y el dispositivo de registro. La idea es realizar el experimento con diferentes frecuencias, para obtener una tabla de RA VS w y de θ VS w. Dichos métodos experimentales se cubren, posteriormente en este capítulo; con los mismos se tiene también una forma para identificar el sistema de proceso.

2. Transformación de la función de transferencia de circuito abierto después de una perturbación senoldal. Este método consiste en utilizar la función de transferencia de lazo abierto para obtener la respuesta del sistema a una entrada senoidal. La amplitud y el ángulo de fase de la salida se pueden determinar a partir de la respuesta.

Éstas son esencialmente las manipulaciones matemáticas que se vieron anteriormente y de las que resultan las ecuaciones (7-20) y (7-21).

Afortunadamente, con las matemáticas operacionales se tiene un método muy simple para determinar RA (RM) y θ. Las matemáticas que se necesitan se presentaron en el capítulo 2. Ahora en esta sección se desarrollará el método general para determinar RA (RM) y θ. Si se considera

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

para $x(t) = X_o$ sen ωt, con base en la tabla 2-1, se tiene

$$X(s) = \frac{X_o\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Entonces

$$Y(s) = G(s)\frac{X_o\omega}{s^2 + \omega^2}$$

De la expansión por fracciones parciales, resulta

$$Y(s) = \frac{A}{s + i\omega} + \frac{B}{s - i\omega} + [\text{términos para los polos de } G(s)] \quad (7\text{-}22)$$

Para obtener A, se utiliza

$$A = \lim_{s \to -i\omega}\left[\frac{(s + i\omega)X_o\omega G(s)}{(s^2 + \omega^2)}\right] = \frac{G(-i\omega)X_o\omega}{-2i\omega}$$

Como se demostró en el capítulo 2, cualquier número complejo se puede representar mediante una magnitud y un argumento, entonces

$$A = \frac{X_o|G(i\omega)|e^{-i\measuredangle G(i\omega)}}{-2i} = \frac{X_o|G(i\omega)|e^{-i\theta}}{-2i}$$

Para obtener B se utiliza

$$B = \lim_{s \to i\omega}\left[\frac{(s - i\omega)X_o\omega G(s)}{(s^2 + \omega^2)}\right] = \frac{X_o|G(i\omega)|\ e^{i\theta}}{2i}$$

Entonces, al substituir las expresiones para A y B en la ecuación (7-22) se obtiene

$$Y(s) = \frac{X_o|G(i\omega)|}{2i}\left[\frac{-e^{-i\theta}}{s + i\omega} + \frac{e^{i\theta}}{s - i\omega}\right] + [\text{términos de } G(s)]$$

Al regresar al dominio del tiempo se tiene

$$y(t) = \frac{X_o|G(i\omega)|}{2i}[-e^{-i\theta}e^{-i\omega t} + e^{i\theta}e^{i\omega t}] + [\text{términos transitorios}]$$

Después de un tiempo muy largo cesan los términos transitorios y entonces

$$Y(t) = X_o|G(i\omega)|\frac{e^{i(\omega t+\theta)} - e^{-i(\omega t+\theta)}}{2i}$$
$$Y(r) = X_o|G(i\omega)|\operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{7-23}$$

Ésta es la respuesta para G(s) después de que cesan los transitorios.

La razón de amplitud es

$$RA = \frac{Y_o}{X_o} = \frac{X_o|G(i\omega)|}{X_o} = |G(i\omega)| \tag{7-24}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \measuredangle G(i\omega). \tag{7-25}$$

De manera que para obtener la RA y θ, se substituye $i\omega$ por s en la función de transferencia y entonces se calcula la magnitud y el argumento del número complejo que resulta. La magnitud es igual a la razón de amplitud (RA) y el argumento al ángulo de fase (0).

Inclusive con esto se simplifican tremendamente los cálculos que se requieren.

Ahora se aplican estos resultados al sistema de primer orden que se utilizó anteriormente:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Ahora se substituye $i\omega$ por s

$$G(i\omega) = \frac{K}{i\omega\tau + 1}$$

de lo que resulta una expresión con números complejos, la cual se compone de la razón de los términos: el numerador es un número real y el denominador un número complejo. Las ecuaciones también se pueden escribir como sigue:

$$G(i\omega) = \frac{G_1}{G_2} = \frac{K}{i\omega\tau +} \tag{7-26}$$

Como se vio, la RA es igual a la magnitud de este número complejo:

$$\text{RA} = |G(i\omega)| = \frac{|G_1|}{|G_2|} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \tag{7-27}$$

la cual es la misma RA que se obtuvo anteriormente.

La θ es igual al argumento del número complejo:

$$\theta = \measuredangle G(i\omega) = \measuredangle G_1 - \measuredangle G_2 = 0 - \tan^{-1}(\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{7-28}$$

la cual es también la misma θ que se obtuvo anteriormente.

A continuación se propondrán varios ejemplos.

Ejemplo 7-6. Se considera el siguiente sistema de segundo orden:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}$$

Se deben determinar las expresiones para AR y θ.

El primer paso es substituir $i\omega$ por s.

$$G(i\omega) = \frac{K}{-\omega^2\tau^2 + i2\tau\xi\omega + 1} = \frac{K}{(1 - \omega^2\tau^2) + i2\tau\xi\omega}$$

Una vez más, resulta una expresión con. números complejos, la cual es una razón entre otros dos números.

$$G(i\omega) = \frac{G_1}{G_2} = \frac{K}{(1 - \omega^2\tau^2) + i2\tau\xi\omega}$$

La razón de amplitud es

$$\text{RA} = |G(i\omega)| = \frac{|G_1|}{|G_2|} = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\xi\omega)^2}} \tag{7-29}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \measuredangle G(i\omega) = \measuredangle G_1 - \measuredangle G_2$$

$$= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2\tau\xi\omega}{1 - \omega^2\tau^2}\right)$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\tau\xi\omega}{1 - \omega^2\tau^2}\right) \tag{7-30}$$

Ejemplo 7-7. Se considera la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K(1 + \tau s) \quad (7\text{-}31)$$

Esta función de transferencia es una ganancia que multiplica a un adelanto de primer orden. Se deben determinar las expresiones para RA y 8.

De la substitución de $i\omega$ por s resulta la siguiente expresión de número complejo:

$$G(i\omega) = K(1 + i\omega\tau)$$

en la cual también se puede suponer que está formada por otros dos números:

$$G(i\omega) = G_1 G_2 = K(1 + i\omega\tau)$$

La razón de amplitud es

$$\text{RA} = |G(i\omega)| = |G_1||G_2| = K\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \quad (7\text{-}32)$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \measuredangle G(i\omega) = \measuredangle G_1 + \measuredangle G_2 = 0 + \tan^{-1}(\omega\tau)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\omega\tau) \quad (7\text{-}33)$$

Los ángulos de fase de los sistemas que se describen mediante las ecuaciones (7-17) y (7-31) se pueden comparar. Los sistemas que se describen por medio de la ecuación **(7-17),** a los cuales se hizo referencia en el capítulo 3 como retardos de primer orden, tienen ángulos de fase negativos, como se ve en la ecuación (7-28); los sistemas que se describen mediante la ecuación (7-3 1), a los cuales se hizo referencia en el capítulo 3 como adelantos de primer orden, tienen ángulos de fase positivos, como se aprecia en la ecuación (7-33). Este hecho es importante en el estudio de la estabilidad del control de proceso mediante técnicas de respuesta en frecuencia.

Ejemplo 7-8. Se deben determinar las expresiones para RA y θ cuando hay tiempo muerto:

$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

Al substituir $i\omega$ por s, se tiene

$$G(i\omega) = e^{-it_0\omega}$$

Puesto que la expresión ya está en la forma polar, se utilizan los principios estudiados en el capítulo 2, para obtener

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\measuredangle G(i\omega)} = e^{-it_0\omega}$$

lo que significa que

$$RA = |G(i\omega)| = 1 \tag{7-34}$$

Y

$$\theta = \measuredangle G(i\omega) = -t_0\omega \tag{7-35a}$$

Se debe recordar, como se aclaró antes respecto a las unidades de θ, que en la ecuación (7-35a) las unidades de θ son radianes. Si se desea expresar θ en grados, entonces

$$\theta = \left(\frac{180°}{\pi}\right)(-t_0\omega) \tag{7-35b}$$

Es interesante, y *muy importante,* observar que θ se vuelve cada vez más negativa conforme se incrementa ω. La razón en que cae θ, depende de t_0; mientras más grande es t_0, más rápido cae θ. Este hecho se vuelve importante en el análisis de los sistemas de control de proceso. El tiempo muerto no afecta la razón de amplitud ni la razón de magnitud.

Ejemplo 7-9. Se deben determinar las expresiones de RA y θ para un integrador:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Al substituir $i\omega$ por s, se tiene

$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

del cual se puede pensar que lo constituyen dos números complejos:

$$G(i\omega) = \frac{G_1}{G_2} = \frac{1}{i\omega}$$

La razón de amplitud de

$$\text{RA} = |G(i\omega)| = \frac{|G_1|}{|G_2|} = \frac{1}{\omega} \tag{7-36}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \measuredangle G(i\omega) = \measuredangle G_1 - \measuredangle G_2$$
$$= 0 - \tan^{-}\left(\frac{\omega}{0}\right) = -\tan^{-1}(\infty) \tag{7-37}$$
$$\theta = -90”$$

De modo que, para un integrador, la razón de amplitud decrece conforme se incrementa la frecuencia; en cambio, el ángulo de fase permanece constante a $-90°$; es decir, con el integrador se obtiene un retardo de fase constante.

En este punto se pueden generalizar las expresiones para RA y θ. Se considera la siguiente FTCA general:

$$\text{FTCA}(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s + 1)\, e^{-t_0 s}}{s^k \prod_{j=1}^{n}(\tau_j s + 1)}, \qquad (n + k) > m \tag{7-38}$$

Entonces se substituye s por $i\omega$, para obtener

$$\text{FTCA}(i\omega) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(i\tau_i\omega + 1)\, e^{-i\omega t_0}}{(i\omega)^k \prod_{j=1}^{n}(i\tau_j\omega + 1)}$$

y, finalmente, se llega a

$$\text{RA} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}|i\tau_i\omega + 1|}{|(i\omega)^k| \prod_{j=1}^{n}|i\tau_j\omega + 1|}$$

o

$$\text{RA} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}[(\tau_i\omega)^2 + 1]^{1/2}}{\omega^k \prod_{j=1}^{n}[(\tau_j\omega)^2 + 1]^{1/2}} \tag{7-39}$$

Y

$$\theta = \sum_{i=1}^{m}\tan^{-1}(\tau_i\omega) - t_0\omega\left(\frac{180°}{\pi}\right) - \sum_{j=1}^{n}\tan^{-1}(\tau_j\omega) - k(90°) \tag{7-40}$$

Hasta ahora, las expresiones para RA y θ se desarrollaron como funciones de w. Existen varias formas para representar gráficamente estas expresiones; las más comunes son los diagramas de Bode, los diagramas de Nyquist y la carta de Nichols. En la siguiente sección se presentan los diagramas de Bode a detalle.

Diagramas de Bode

El diagrama de Bode es la representación gráfica más común de las funciones RA (RM) y θ. Este diagrama consta de dos gráficas: 1) logaritmo de RA (o logaritmo de RM) con-

tra logaritmo de w,. y 2) θ contra logaritmo de ω. Algunas veces, en lugar de **graficar** logaritmo de RA, se grafica 20 logaritmo de RA, lo cual se conoce como decibeles; este término se utiliza extensamente en el campo de la ingeniería eléctrica y algunas veces también en el de control de proceso; en este libro se grafica logaritmo de RA. A continuación se presenta el diagrama de Bode para las funciones de transferencia de proceso más comunes.

Elemento de ganancia. En un elemento con ganancia pura se tiene como función de transferencia,

$$G(s) = K$$

Al substituir $i\omega$ por s, se obtiene

$$G(i\omega) = K$$

se utiliza el manejo matemático que se presentó anteriormente para obtener

$$\text{RA} = |G(i\omega)| = K$$

Y

$$\theta = \tan^{-1} G(i\omega) = 0''$$

En las figuras 7-17 y 7-18*a* se muestra el diagrama de Bode para este elemento; en la figura 7- 17 se grafica **logaritmo** de RA; por otra parte, en la figura 7- 18*a* se grafica logaritmo de RM. Se notará que en ambos casos se utiliza papel logarítmico-logarítmico y semilogarítmico.

Retardo de primer *orden.* Para un retardo de primer orden, la RA y θ se representan mediante las ecuaciones (7-27) y **(7-28),** respectivamente..

$$\text{RA} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \tag{7-27}$$

o

$$\text{RM} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$$

y

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{7-28}$$

En la figura 7-18*b* se muestra el diagrama de Bode para este sistema.

En el diagrama de la razón de magnitud de la figura 7-18*b* aparecen dos líneas punteadas, que son las asíntotas de la respuesta en frecuencia del *sistema, a baja y alta **frecuen-**

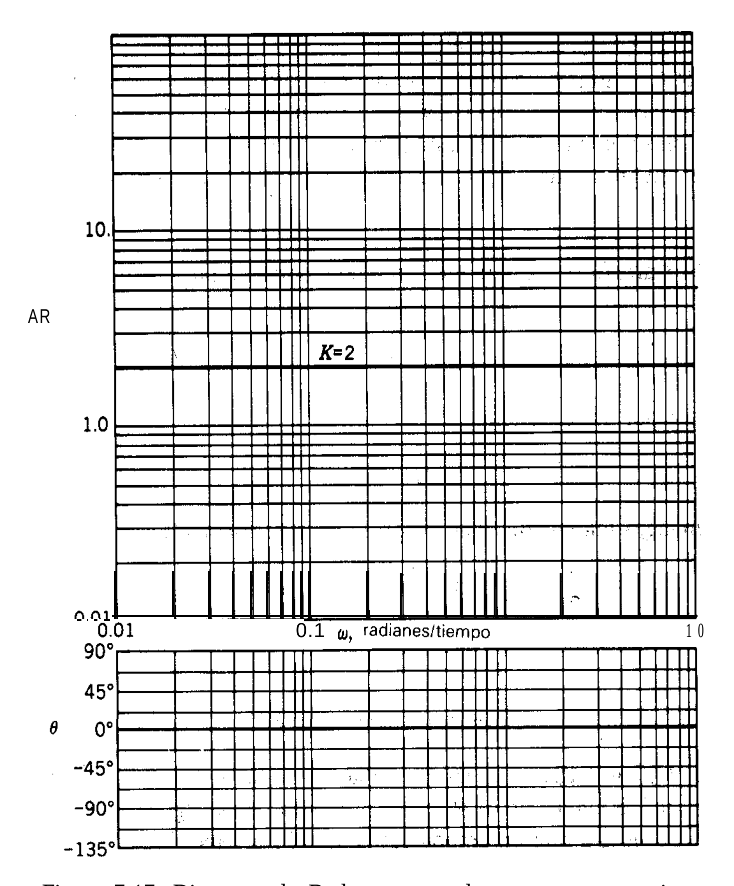


Figura 7-17. Diagrama de Bode para un elemento con ganancia.

cia. Estas asintotas son muy importantes en el estudio de la respuesta en frecuencia. Como se puede apreciar en la figura, éstas no se desvían mucho de la respuesta en frecuencia real y, por lo tanto, el **análisis** de respuesta en frecuencia casi siempre se hace mediante asíntotas, ya que éstas son más **fáciles** de dibujar y su utilización no implica mucho error. A continuación se muestra el desarrollo de **tales** asíntotas.

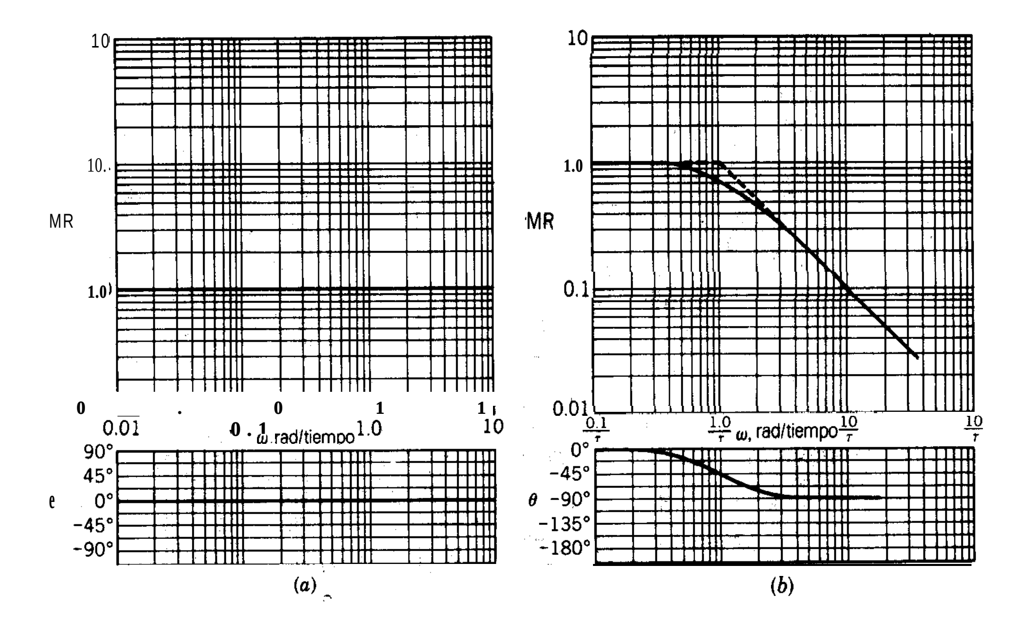
En la ecuación de razón de magnitud se observa que, conforme $\omega \to 0$, RM $\to$ 1, de lo cual resulta la **asíntota** horizontal.

Antes de desarrollar la **asíntota** de alta frecuencia, se escribe la ecuación de razón de magnitud en forma logarítmica:

$$\log \text{RM} = -1/2 \log (\tau^2\omega^2 + 1)$$

ahora, conforme $\omega \to \infty$

$$\log \text{RM} \to -1/2 \log \tau^2\omega^2 = -\log \tau\omega$$
$$\log \text{RM} \to -\log \tau - \log \omega \tag{7-41}$$



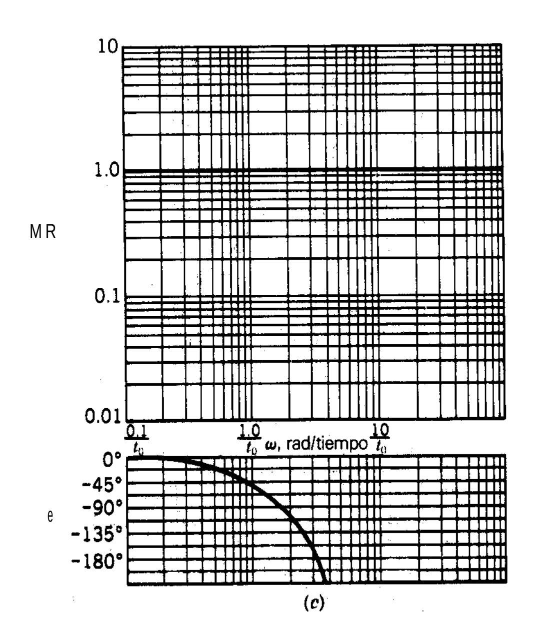


Figura 7-18. Diagramas de Bode para: *a*) elemento de ganancia, b) retardo de primer orden, c) tiempo muerto, *d*) retardo de segundo orden, e) adelanto de primer orden, *f*) integrador.

MR

$\xi=0.1$ $\xi=0.2$ $\xi=0.4$ $\xi=0.8$ $\xi=1.0$

$\frac{0.1}{\tau}$ $\frac{1}{\tau}$ ω, rad/tiempo $\frac{10}{\tau}$

θ

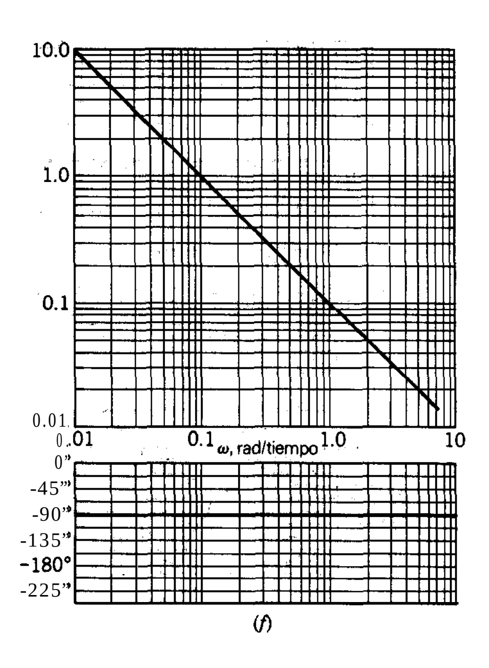
(*d*)

MR

$\frac{0.1}{\tau}$ $\frac{1.0}{\tau}$ ω, rad/tiempo $\frac{10}{\tau}$

θ

(*e*)



(*f*)

Figura 7-18. (*Continuación*).

la cual es la expresión de una línea recta en una gráfica logaritmo-logaritmo de RM vs ω, la pendiente de esta línea recta es -1. Ahora se debe determinar la ubicación de dicha línea en la gráfica; el modo más simple de hacer esto es localizar el lugar donde la asíntota de alta frecuencia interseca a la de baja frecuencia; se sabe que, cuando $\omega \to 0$, RM $\to 1$, de manera que:

$$\log \text{RM} = 0$$

Al igualar esta ecuación con la (7-41), se tiene

$$\omega = \frac{1}{\tau} \tag{7-42}$$

En esta frecuencia, conocida como ***frecuencia de vértice*** (ω_c) ***o frecuencia de punto de corte,*** se juntan ambas asíntotas, como se muestra en la figura 7-18*b*. También es a esta frecuencia donde se presenta el error máximo entre la respuesta en frecuencia y las asíntotas. La razón de magnitudes verdadera es

$$\text{RM} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

y no RM = 1, como se aprecia en las asintotas.

Antes de concluir con el diagrama de Bode de este sistema, vale la pena observar qué sucede con θ a bajas y altas frecuencias. A bajas frecuencias

$$\omega \to 0$$
$$\theta \to -\tan^{-1}(\omega) = -\tan^{-1}(0)$$
$$\theta \to 0°$$

A altas frecuencias

$$\omega \to \infty$$
$$\theta \to -\tan^{-1}(\infty)$$
$$\theta \to -90°$$

Estos valores del ángulo de fase, $0°$ y $-90°$, son las asíntotas para el diagrama de ángulo de fase. A la frecuencia de vértice

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}, \qquad \theta = -\tan^{-1}(1) = -45°$$

Para resumir, las características más importantes del diagrama de Bode de un retardo de primer orden son las siguientes:

1. **Gráfica de RA** (RM). La pendiente de la asintota de baja frecuencia es 0, mientras que la de la de alta frecuencia es -1. La frecuencia de vértice, donde se juntan estas dos asíntotas, es de $1/\tau$.

2. Gráfica del ángulo de fase. A bajas frecuencias el ángulo de fase tiende a 0°; en cambio; a altas frecuencias tiende a $-90°$. A la frecuencia de vértice, al ángulo de fase es de $-45°$.

Retardo de segundo orden. Como se muestra en el ejemplo 7-6, las expresiones de RA y θ para un retardo de segundo orden las dan las ecuaciones (7-29) y (7-30), respectivamente:

$$RA = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\xi\omega)^2}} \qquad (7\text{-}29)$$

y

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\tau\xi\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right) \qquad (7\text{-}30)$$

La expresión de RM se obtiene a partir de la expresión de RA:

$$RM = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\xi\omega)^2}}$$

Al darle valores a ω para una cierta τ y ξ, la respuesta en frecuencia se determina como se muestra en la figura 7-18*d*.

Las asíntotas se obtienen de manera similar que en el caso del retardo de primer orden. A bajas frecuencias:

$$\omega \to 0$$
$$RM \to 1$$

y

$$\theta \to 0°$$

A altas frecuencias

$$\omega \to \infty$$
$$\log RM \to -1/2 \log [(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\xi\omega)^2]$$
$$\log RM \to -1/2 \log (\omega^2\tau^2)^2 = -2 \log \tau - 2 \log w$$

La cual es la expresión de una línea recta con pendiente -2. El ángulo de fase a estas altas frecuencias tiende a

$$\theta \to -180°$$

Para encontrar la frecuencia de vértice, ω_c, a la cual se encuentran las asíntotas,, se sigue el mismo procedimiento que para el retardo de primer orden, y se obtiene .

$$\omega_c = \frac{}{\tau}$$

En la figura 7-18*d* se observa que la transición de la respuesta en frecuencia de baja a alta frecuencia depende de ξ.

A la frecuencia de vértice

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\infty) = -90^\circ$$

Para resumir, las características importantes del diagrama de Bode para un retardo de segundo orden son las siguientes:

1. **Gráfica de RA** (RM). La pendiente de la **asíntota** de baja frecuencia es 0; en cambio, la pendiente de la **asíntota** de alta frecuencia es — 2. La frecuencia **de** vértice, ω_c, ocurre a $1/\tau$. La transición de **RA** de **baja** a alta frecuencia depende del valor de ξ.

2. **Gráfica del ángulo de fase.** A bajas frecuencias, el ángulo de fase tiende a 0°; por el contrario, a altas frecuencias tiende a — 180". A la frecuencia de vértice, el ángulo de fase es de — 90°.

Tiempo muerto. Como se vio en el ejemplo 7-8, las expresiones de RA y 19 para el tiempo muerto se dan mediante las ecuaciones (7-34) y **(7-35)**, respectivamente:

$$RA = RM = 1 \tag{7-34}$$

Y

$$\theta = -\omega t_0 \tag{7-35a}$$

o

$$\theta = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(-\omega t_0) \tag{7-35b}$$

El diagrama de Bode se ilustra en la figura **7-18*c*;** se notará que, conforme aumenta la frecuencia, el ángulo de fase se vuelve más negativo. Tanto más grande es el valor del tiempo muerto cuanto más rápido cae el ángulo de fase (se vuelve cada vez más negativo). El diagrama del ángulo de fase no tiende de manera asintótica a ningún valor final.

Adelanto *de primer orden.* Como se ve en el ejemplo 7-7, las expresiones de RA y θ para el adelanto de primer orden se tienen en las ecuaciones (7-32) y **(7-33)**, respectivamente:

$$\text{RA} = K\sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \qquad (7\text{-}32)$$

o

$$\text{RM} = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

Y

$$\theta = \tan^{-1}(\omega\tau) \qquad (7\text{-}33)$$

El diagrama de Bode se muestra en la figura 7-18*e*. Cabe hacer notar que la pendiente de la asíntota de baja frecuencia es 0; en cambio, la de la asíntota de alta frecuencia es + 1. A bajas frecuencias, el ángulo de fase tiende a 0°; por el contrario, a altas frecuencias tiende a +90°; a la frecuencia de vértice el ángulo de fase es de +45° y, por lo tanto, en un adelanto de primer orden se tiene "adelanto de fase".

Integrador. Como se ve en el ejemplo 7-9, las expresiones de RA y θ para un' integrador se tienen en las ecuaciones (7-36) y (7-37), respectivamente:

$$\text{RA} = \text{RM} = \frac{1}{\omega} \qquad (7\text{-}36)$$

Y

$$\theta = 90° \qquad (7\text{-}37)$$

El diagrama de Bode se ilustra en la figura 7-18*f*. Se notará que la gráfica de RM consta de una línea recta cuya pendiente es – 1, lo cual se demuestra fácilmente al obtener el logaritmo de la ecuación (7-36):

$$\log \text{RM} = -\log \omega$$

En esta ecuación también se ve que RM = 1, con $\omega = 1$ radián/tiempo.

Desarrollo del diagrama de Bode para sistemas complejos. La mayoría de las funciones de transferencia complejas de sistemas de proceso se forman como producto de componentes más simples. El diagrama de Bode para estas funciones de transferencia complejas se puede obtener mediante la adición de los diagramas de Bode de las componentes simples, las cuales se presentaron, en su mayor parte, en las secciones precedentes. Ahora se considera la siguiente función:

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)e^{-t_0 s}}{(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \qquad (7\text{-}43)$$

Se puede considerar que esta función de transferencia se compone de las siguientes cinco funciones de transferencia simples:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)$$

donde:

$$G_1(s) = K$$
$$G_2(s) = (\tau_1 s + 1)$$
$$G_3(s) = e^{-t_0 s}$$
$$G_4(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}$$
$$G_5(s) = \frac{1}{\tau_3 s + 1}$$

El desarrollo del diagrama de Bode para la **ecuación** (7-43) es muy simple; para RA y RM se tiene

$$\begin{aligned} \text{RA} &= |G(i\omega)| \\ &= |G_1(i\omega)|\,|G_2(i\omega)|\,|G_3(i\omega)|\,|G_4(i\omega)|\,|G_5(i\omega)| \end{aligned} \qquad (7\text{-}44)$$

$$\begin{aligned} \text{RM} &= \frac{|G(i\omega)|}{K} \\ &= |G_2(i\omega)|\,|G_3(i\omega)|\,|G_4(i\omega)|\,|G_5(i\omega)| \end{aligned} \qquad (7\text{-}45)$$

o, dado que frecuentemente se **grafican** los logaritmos, se ve que

$$\begin{aligned} \log \text{RA} = {} & \log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| + \log |G_3(i\omega)| \\ & + \log |G_4(i\omega)| + \log |G_5(i\omega)| \end{aligned} \qquad (7\text{-}46)$$

$$\begin{aligned} \log \text{RM} = {} & \log |G_2(i\omega)| + \log |G_3(i\omega)| \\ & + \log |G_4(i\omega)| + \log |G_5(i\omega)| \end{aligned} \qquad (7\text{-}47)$$

y, para el ángulo de fase; se tiene

$$\measuredangle G(i\omega) = \measuredangle G_1(i\omega) + \measuredangle G_2(i\omega) + \measuredangle G_3(i\omega) + \measuredangle G_4(i\omega) + \measuredangle G_5(i\omega) \qquad (7\text{-}48)$$

En las ecuaciones (7-47) y (7-48) se observa que, para obtener el diagrama de Bode compuesto, se suman los diagramas de Bode individuales. Para obtener la **asíntota** compuesta, se suman las asíntotas individuales.

Ejemplo 7-10. Ahora se considera la siguiente **función** de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s + 1)e^{-s}}{s(2s + 1)(3s + 1)}$$

Se utilizan los principios que se expusieron y se ve que

$$\text{RM} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{4\omega^2 + 1}\,\sqrt{9\omega^2 + 1}}$$

o

$$\log \mathrm{RM} = \frac{1}{2}\log(\omega^2 + 1) - \log(\omega) - \frac{1}{2}\log(4\omega^2 + 1) - \frac{1}{2}\log(9\omega^2 + 1)$$

Y

$$\theta = \tan^{-1}(\omega) - \left(\frac{180°}{\pi}\right)\omega - 90° - \tan^{-1}(2\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$$

Como se muestra en la figura 7-19, el diagrama de Bode se desarrolla a partir de estas dos últimas ecuaciones. Cabe señalar que la asíntota compuesta se obtiene mediante la adición de las asíntotas individuales. A bajas frecuencias, $\omega < 0.33$, la pendiente es -1, a causa del término integrador; con $\omega = 0.33$, uno de los retardos de primer orden empieza a contribuir en la gráfica y, entonces, la pendiente cambia a -2 con dicha fre-

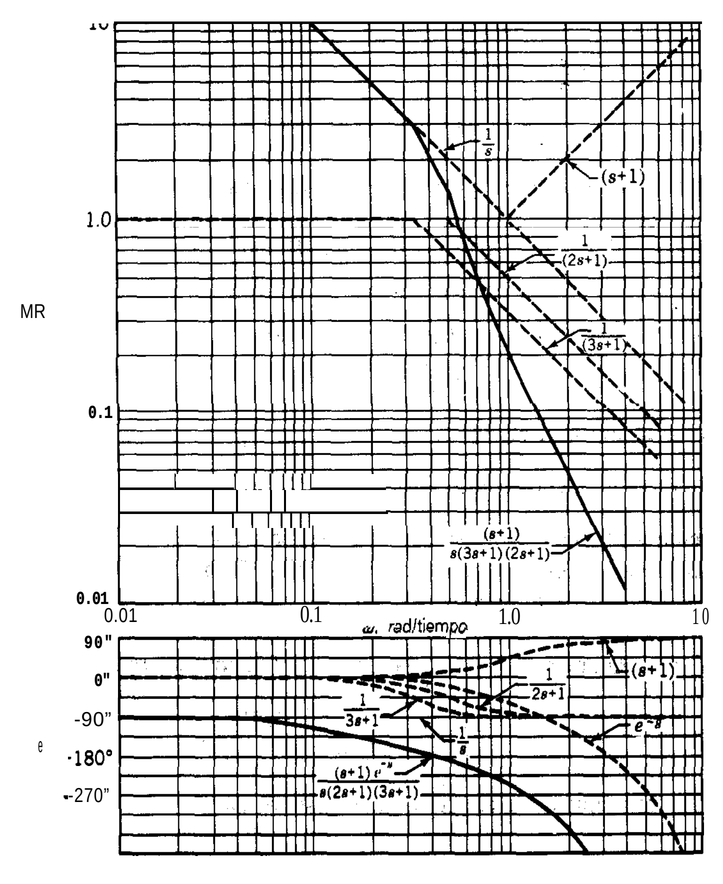


Figura 7-19. Diagrama de Bode de $G(s) = [K(s + 1)e^{-s}]/[s(2s + 1)(3s + 1)]$.

cuencia; con $\omega = 0.5$, se agrega la contribución del otro retardo de primer orden y la pendiente de la **asíntota** cambia a -3; finalmente, con $\omega = 1$, entra el adelanto de primer orden con una pendiente de $+1$, y la pendiente de la **asíntota** se hace de nuevo -2. El diagrama del ángulo de fase compuesto se obtiene de manera similar, mediante la suma algebraica de los ángulos individuales.

Acerca de la pendiente de las asintotas de alta y baja frecuencia (pendiente inicial y final) y de los ángulos de los diagramas de Bode, se puede hacer un comentario final: si se considera una función de transferencia general, por ejemplo

$$G(s) = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + 1)}{s^k(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + 1)} \qquad (n + k) > m \tag{7-49}$$

La pendiente de la **asíntota** de baja frecuencia se expresa mediante

$$\text{pendiente de RA (RM)}\Big|_{\omega \to 0} \to (-1)k$$

y el ángulo con

$$\theta\Big|_{\omega \to 0} \to (-90°)k$$

La pendiente de la **asíntota** de alta frecuencia se expresa mediante

$$\text{pendiente de RA (RM)}\Big|_{\omega \to \infty} \to (n + k - m)(-1)$$

y el ángulo, por medio de

$$\theta\Big|_{\omega \to \infty} \to (n + k - m)(-90°)$$

La mayoría de los sistemas siguen estas pendientes y ángulos; **tales** sistemas se conocen como *sistemas de fase mínima*. Sin embargo, existen tres excepciones, las cuales se conocen como *sistemas de fase no mínima;* las excepciones son:

1. Sistemas con tiempo muerto: $G(s) = e^{-t_0 s}$
2. Sistemas con respuesta inversa (ceros positivos): $G(s) = (1 - \tau_1 s)/(1 + \tau_2 s)$
3. Sistemas de circuito abierto inestable (polos positivos), por ejemplo, algunos reactores químicos exotérmicos: $G(s) = 1/(1 - \tau s)$

En cada uno de estos casos, la gráfica de razón de magnitud no cambia, pero la gráfica de ángulo de fase sí; el ángulo de fase siempre se hace más negativo de lo que se predice. El termino de tiempo muerto se presentó anteriormente; el diagrama de Bode de los otros dos sistemas es el tema de uno de los problemas que se presentan al final del capítulo.

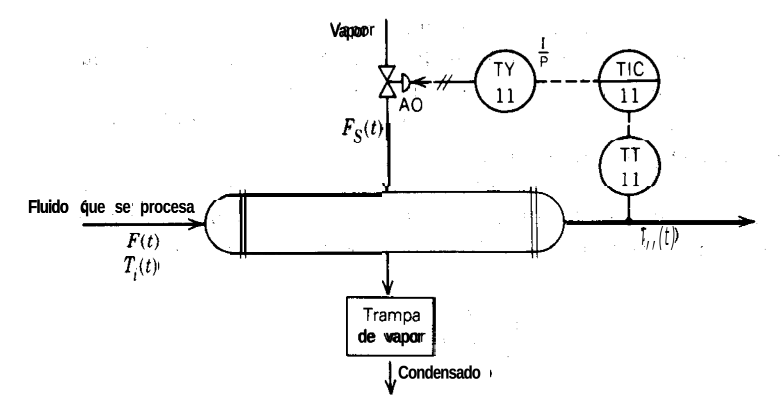


Figura 7-20. Circuito de control por retroalimentación para el control de temperatura del intercambiador de calor.

En la expresión de la pendiente de la asíntota de alta frecuencia también se observa por qué en la función de transferencia debe haber más retardos que adelantos. Si $(n + k - m) < 0$, entonces la pendiente final es positiva y el ruido de una frecuencia muy alta se amplifica con ganancia infinita,

Criterio de estabilidad de la respuesta en frecuencia. Ahora se desarrolla el criterio de estabilidad de la respuesta en frecuencia, por medio de un ejemplo, con el fin de facilitar la comprensión del significado del criterio.

Se considera el circuito de control de temperatura del intercambiador de calor que se presentó en el capítulo 6 y que se utilizó en el ejemplo 7-4. Por conveniencia se vuelve a mostrar el intercambiador de calor en la figura 7-20, y el diagrama de bloques en la figura 7-2 1. La función de transferencia de circuito abierto es

$$\text{FTCA} = \frac{0.8\,K_c}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)} \tag{7-50}$$

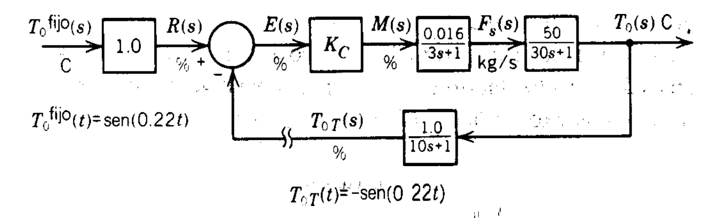


Figura 7-21. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura para el intercambiador de calor -controlador P.

Las expresiones de RM y θ son

$$\text{RM} = \frac{RA}{0.8K_c}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2 + 1}\sqrt{(30\omega)^2 + 1}\sqrt{(3\omega)^2 + 1}} \quad (7\text{-}51)$$

$$\theta = -\tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega) \quad (7\text{-}52)$$

En la figura 7-22 se muestra el diagrama de Bode. En esta figura se ve que la frecuencia a la que $\theta = -180°$ (o $-\pi$ radianes) es de 0.22 rad/s; a esta frecuencia

$$\frac{RA}{0.8K_c} = 0.052$$

La ganancia del controlador con la que se produce RA = 1 es

$$K_c = \frac{RA}{0.8(0.052)} = \frac{1}{0.8(0.052)} = 24.0$$

Estos cálculos son altamente significativos. El valor $K_c = 24.0$ es la ganancia del controlador con que se produce RA = 1; se recordará que RA se define como la razón de la amplitud de la señal de salida respecto a la amplitud de la señal de entrada, Y_o/X_o, lo cual significa que, si el punto de control de entrada al controlador de temperatura se varía como sigue:

$$T_o^{\text{fijo}}(t) = \text{sen}(0.22t)$$

entonces la señal que sale del transmisor, después de que desaparecen los transitorios, variará de la siguiente manera:

$$T_{oT}(t) = \text{sen}(0.22t - \pi) = -\text{sen}(0.22t)$$

Se notará que la señal de retroalimentación se desconecta en el controlador, como se aprecia en el diagrama de bloques de la figura 7-21, y que la frecuencia de oscilación del punto de control es 0.22 rad/s, que es la frecuencia a la cual $\theta = -180° = -\pi$ radianes y RA = 1.

Si ahora se supone que en algún tiempo $t = 0$ cesa la oscilación del punto de control, $T_o^{\text{fijo}}(t) = 0$, y que la señal del transmisor se conecta al controlador, entonces, ***la señal de error, E(s), dentro del controlador permanece sin alteraciones y las oscilaciones se mantienen.*** Si en el circuito de control no se cambia nada, las oscilaciones se mantienen indefinidamente.

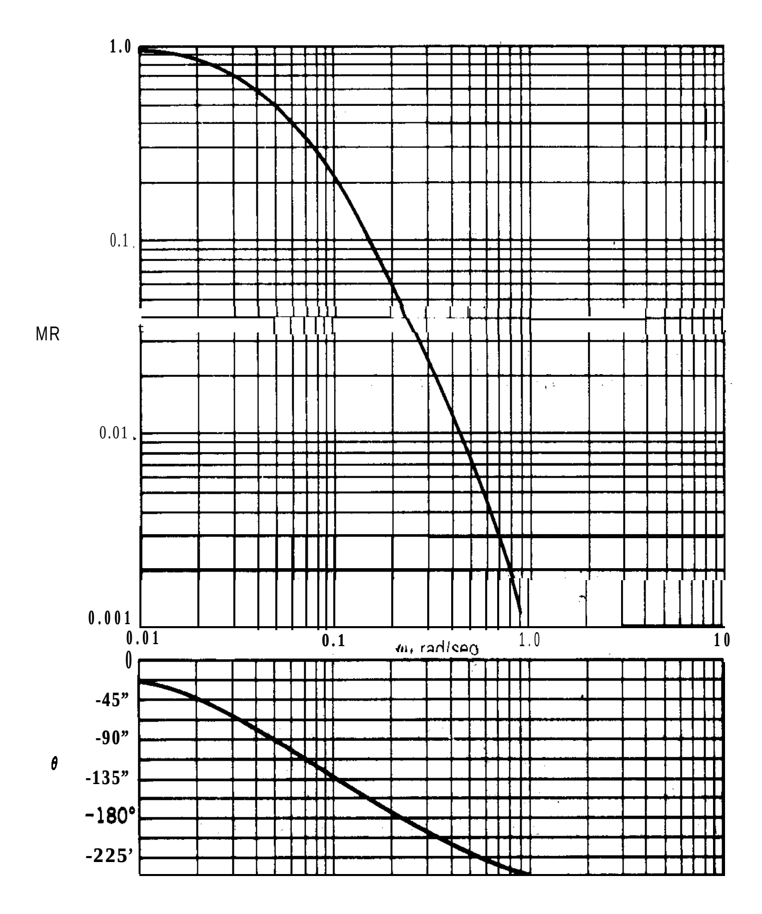


Figura 7-22. Diagrama de Bode para el circuito de control de temperatura del **intercambiador** de calor -controlador P.

Si en algún momento la ganancia del controlador se incrementa ligeramente a 25.0, la razón de amplitud se hace de 1.04:

$$RA = 0.052\ (0.8)\ K_c$$

$$RA = 0.052\ (0.8)(25) = 1.04$$

Esto significa que la señal se amplifica conforme pasa a través del circuito de control. Después de la primera vez, la señal de salida del transmisor es $-$ 1.04 sen (0.220; después de la segunda vez, es $-$ $(1.04)^2$ sen (0.220, y así, sucesivamente. En caso de que esto no se detenga, la temperatura de salida se incrementa continuamente, lo que produce un circuito de control inestable.

Por otro lado, si la ganancia del controlador se decrementa ligeramente a 23.0, entonces la razón de amplitud se hace de 0.957:

$$RA = 0.052(0.8)23 = 0.957$$

Esto significa que la señal decrece en amplitud conforme pasa a través del circuito de control. Después de la primera vez, la señal de salida del transmisor es $-0.957 \text{ sen } (0.22t)$; después de la segunda vez, es $-(0.957)^2 \text{ sen } (0.22t)$, y así, sucesivamente. El resultado de esto es un circuito de control estable.

En resumen, con base en la respuesta en frecuencia, el criterio de estabilidad se puede enunciar como sigue:

> Para que un sistema de control sea estable, la razón de amplitud debe ser menor a la unidad cuando el ángulo de fase es $-180°$ ($-\pi$ radianes).

Si RA < 1, con $\theta = -180°$, el sistema es estable. Sin embargo, si RA > 1 con $\theta = -180°$, el sistema es inestable, lo cual se demostró en el ejemplo anterior.

La ganancia del controlador con la que se cumple la condición de que RA = 1 y $\theta = -180°$ es la ganancia-última, K_{cu}; en el ejemplo anterior $K_{cu} = 24$. La frecuencia a la que se presenta esta condición es la frecuencia última, ω_u; como se vio en el capítulo 6, el período último se puede calcular a partir de dicha frecuencia.

Antes de proceder con más ejemplos, es conveniente señalar que la frecuencia última y la ganancia última se pueden obtener directamente de la ecuación de RM y 8, ecuaciones (7-51) y (7-52) para este ejemplo, sin que sea necesario el diagrama de Bode, el cual se desarrolló a partir de estas ecuaciones; con la utilización de las mismas se evita el desarrollo del diagrama. Hace muchos años, cuando no había calculadoras manuales (¿recuerda el lector la regla de cálculo?), probablemente era más fácil dibujar el diagrama de Bode mediante las asintotas de alta y baja frecuencia. En la actualidad, la utilización de las calculadoras hace que la determinación de ω_u y K_{cu} sea un procedimiento más fácil. Para determinar ω_u se requiere un poco de ensayo y error en la ecuación de θ; una vez que se determina ω_u, se utiliza la ecuación de RM para calcular K_{cu}. Este procedimiento completo generalmente es más rápido y se tienen resultados más precisos que cuando se dibuja y utiliza el diagrama de Bode; sin embargo, la utilización de dicho diagrama es muy útil, ya que se observa visuahnente la forma en que varían RA y θ cuando varía la frecuencia.

A continuación se presentan varios ejemplos para que se adquiera más práctica en la utilización de esta eficaz técnica.

Ejemplo 7-11. Ahora se considera el mismo intercambiador de calor que se utilizó anteriormente para explicar el criterio de estabilidad de la respuesta en frecuencia, figura 7-20. Se supone que por alguna razón no se puede mediar la temperatura a la salida del intercambiador, sino más adelante, en la tubería, como se muestra en la figura 7-23; el efecto de esta nueva ubicación del sensor es que se añade algo de tiempo muerto, cosa de dos segundos, en el circuito de control. En la figura 7-24 se ilustra el diagrama de bloques con la nueva función de transferencia.

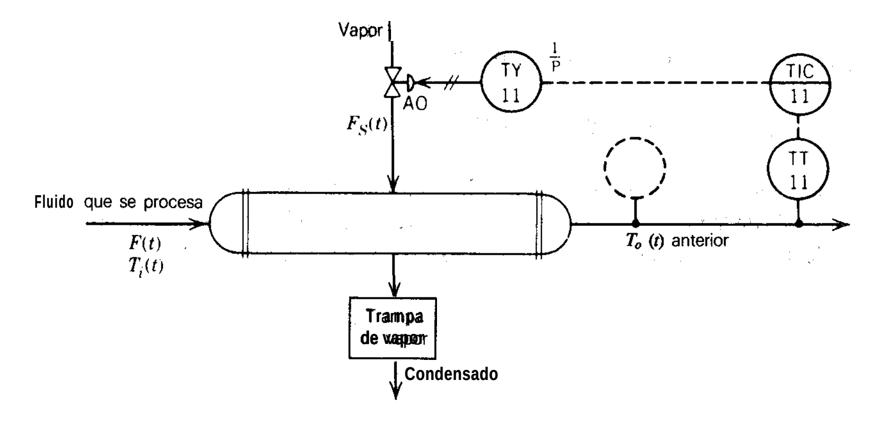


Figura 7-23. Circuito de control por retroalimentación para el control de **temperatura** del **intercambiador** de calor.

La FTCA nueva es

$$\text{FTCA} = \frac{0.8\,K_c e^{-2s}}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)}$$

con

$$\text{RM} = \frac{\text{RA}}{0.8K_c} = \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2+1}\,\sqrt{(30\omega)^2+1}\,\sqrt{(3\omega)^2+1}}$$

Y

$$\theta = -2\omega - \tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega),$$

Como se explicó anteriormente; estas dos últimas expresiones se pueden utilizar **para** determinar la frecuencia última y la ganancia última. Al hacer los Cálculos, **se encuentra** que para $\theta = -\pi$ rad

$$\omega_u = 0.16 \text{ rad/s}$$

$T_0^{\text{fijo}}(s)$ C — 1.0 — $R(s)$ % — + − — $E(s)$ % — K_C — $M(s)$ % — $\frac{0.016}{3s+1}$ — $F_s(s)$ kg/s — $\frac{50e^{-2s}}{30s+1}$ — $T_0(s)$, C

$T_{0T}(s)$ % — $\frac{1.0}{10s+1}$

Figura 7-24. Diagrama de bloques del circuito de control de temperatura del **intercambiador** de calor -controlador P.

Y

$$K_{cu} = 12.8$$

El diagrama de Bode se muestra en la figura 7-25.

En los resultados del ejemplo 7-11 se observa el efecto del tiempo muerto sobre la estabilidad y, en consecuencia, también sobre la controlabilidad del circuito de control. Con anterioridad se encontró que la ganancia y el período últimos del intercambiador de calor sin tiempo muerto eran

$$K_{cu} = 24 \quad y \quad \omega_u = 0.22 \text{ rad/s}$$

cuando se añadió el tiempo muerto en el ejemplo 7-11, los resultados fueron

$$K_{cu} = 12.8 \quad y \quad \omega_u = 0.16 \text{ rad/s}$$

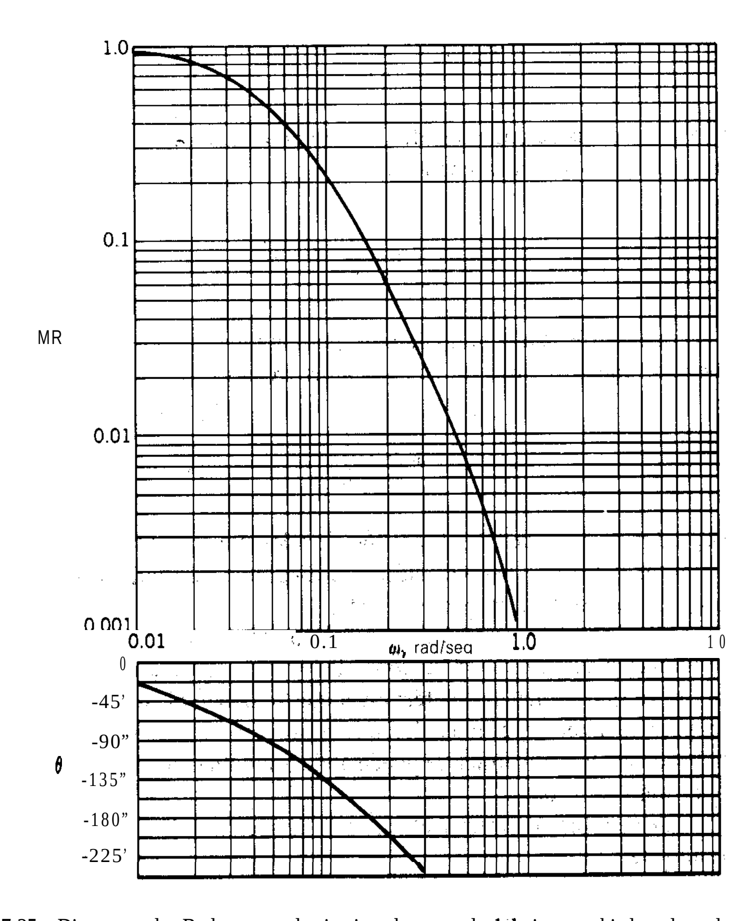


Figura 7-25. Diagrama de Bode para el circuito de control del intercambiador de calor con tiempo muerto -controlador P.

Por lo tanto, es más fácil que el proceso se haga inestable. Con la ω_u diferente, también se indica que un proceso con tiempo muerto es más lento que uno sin tiempo muerto.

Como se mencionó en los capítulos anteriores, el tiempo muerto es la peor cosa que puede ocurrir en cualquier circuito de control, esto se prueba con el ejemplo 7-11. Con el término de tiempomuerto se "añade retardo de fase" al circuito de control y, en consecuencia, el ángulo de fase cruza el valor de $-180°$ con una frecuencia más baja. Cuanto más grande es el tiempo muerto, tanto más bajas son la frecuencia y la ganancia últimas.

En el ejemplo 7-5 se demostró que, al añadir la acción de reajuste a un controlador proporcional, se decrementan la frecuencia y la ganancia últimas. Esto se puede explicar desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, si se declara que, al añadir la acción de reajuste, se "añade retardo de fase" al circuito de-control. En un controlador únicamente proporcional, el ángulo de fase es de $0°$, como se muestra en la figura 7-17. Ahora se considera un controlador proporcional integral:

$$G(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c\left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}\right)$$

La función de transferencia se compone de un término de adelanto, $\tau_I s + 1$, y de un término integrador, $1/\tau_I s$. A bajas frecuencias

$$\omega << \frac{1}{\tau_I}$$

el término de avance no afecta al ángulo de fase, pero el integrador contribuye con $-90°$ y, en consecuencia, añade retardo de fase. A altas frecuencias

$$\omega >> \frac{1}{\tau_I}$$

el término integrador se cancela con el término de adelanto y resulta un ángulo de fase de $0°$. En las figuras 7-18*f* y 7-18e se muestra el diagrama de Bode para un integrador y un adelanto de primer orden, respectivamente.

Sin embargo, el lector debe recordar que la acción de reajuste es la única acción con que se puede eliminar la desviación en un controlador. Por otro lado, es más difícil ajustar el controlador, ya que se tienen dos términos que se deben ajustar, K_c y τ_I, y, como se explicó en el párrafo anterior, es más fácil que el proceso se haga inestable. Tal parece que la segunda ley de la termodinámica se puede aplicar también al control de proceso: No se puede obtener algo de nada.

Con el siguiente ejemplo se muestra el efecto de la acción derivativa sobre la estabilidad de un circuito de control.

Ejemplo 7-12. Ahora se considera el mismo circuito de control para el intercambiador de calor, pero sin tiempo muerto y con un controlador proporcional-derivativo. Se supone

que la rapidez derivativa es 0.25 min (15 seg). Como se vio en el capítulo 5, la ecuación de un controlador PD "real" es

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{1 + \tau_D s}{1 + \alpha \tau_D s} \right)$$

0 para este ejemplo, con $\alpha = 0.1$

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{1 + 15s}{1 + 1.5s} \right)$$

Entonces la FTCA es

$$\text{FTCA} = \frac{0.8K_c\,(1 + 15s)}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)(1 + 1.5s)}$$

con

$$\text{RM} = \frac{\text{RA}}{0.8K_c}$$

$$= \frac{\sqrt{(15\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(10\omega)^2 + 1}\,\sqrt{(30\omega)^2 + 1}\,\sqrt{(3\omega)^2 + 1}\,\sqrt{(1.5\omega)^2 + 1}}$$

Y

$$\theta = \tan^{-1}(15\omega) - \tan^{-1}(100) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega) - \tan^{-1}(1.5\omega)$$

El diagrama de Bode para este sistema se muestra en la figura 7-26. Si se compara dicho diagrama con el de la figura 7-22, se observa que el diagrama del ángulo de fase se "movió hacia arriba"; la acción derivativa "añade adelanto de fase". En este sistema se encontró que la ganancia y el período últimos son

$$K_{cu} = 33.05 \quad \text{y} \quad \omega_u = 0.53 \text{ rad/s}$$

Por tanto, con estos resultados se demuestra que con la acción derivativa el circuito de control se hace más estable y más rápido.

Con los ejemplos que se presentaron en esta sección se ilustró la utilización de la respuesta en frecuencia, en particular de los diagramas de Bode, para el análisis de los circuitos de control, así como el efecto de los diferentes términos, tiempo muerto y acción derivativa sobre la estabilidad de los mismos circuitos.

Con base en el criterio de estabilidad de la respuesta en frecuencia, cualquier circuito de control con una función de transferencia pura (sin tiempo muerto) de circuito abierto, de primer o segundo orden, nunca se hace inestable, debido a que el ángulo de fase nunca

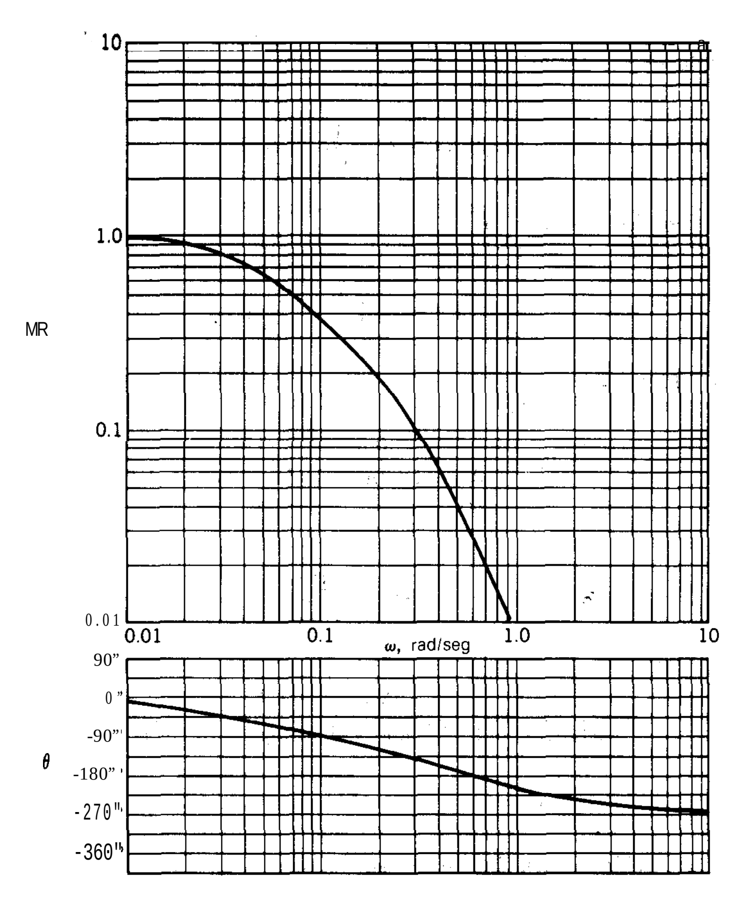


Figura 7-26. Diagrama de Bode para el circuito de control de temperatura del intercambiador de calor --controlador PD,

es inferior a − 180°. Una vez que se añade tiempo muerto, sin importar qué tan pequeño sea, el sistema se hace inestable, porque el ángulo de fase siempre cruza el valor de − 180°.

Especificaciones del desempeño del controlador. En el capítulo 6 se presentaron varias formas para ajustar un controlador y obtener el desempeño del circuito que se desea. Los métodos que se presentaron fueron el de Ziegler-Nichols (razón de asentamiento de un cuarto), el criterio de integral de error (IAE, ISE e IAET) y la síntesis del controlador. Con la técnica de respuesta en frecuencia se cuenta aún con 'otros métodos (en base a las diferentes especificaciones de desempeño) para: ajustar los controladores; existen tres de tales métodos.

El primero es el mismo de Ziegler-Nichols. Como se vio en esta sección, con la respuesta en frecuencia se tiene un procedimiento conveniente y preciso para obtener la

ganancia y la frecuencia últimas de un circuito de control; una vez que se determinan estos términos, se pueden utilizar las ecuaciones que se presentaron en el capítulo 6 para ajustar el controlador.

El *margen de ganancia* (MG) es una especificación típica del circuito de control que se asocia con la técnica de respuesta en frecuencia. El margen de ganancia representa el factor en que se debe aumentar la ganancia total del lazo para hacer inestable al sistema. La ganancia del controlador con que se produce el margen de ganancia que se desea se calcula como sigue:

$$K_c = \frac{K_{cu}}{MG}$$

La especificación típica es MG > 1.5.

El *margen de fase* (MF) es otra especificación típica que se asocia comúnmente a la técnica de respuesta en frecuencia, y es la diferencia entre $-180°$ y el ángulo de fase a la frecuencia con que la razón de amplitud (RA) es unitaria. Esto es

$$MF = 180° + \theta\Big|_{AR=1} \quad (7\text{-}54)$$

El MF representa la cantidad adicional de retardo de fase que se requiere para hacer inestable al sistema. La especificación típica es MF > 45°.

En el ejemplo 7- 13 se ilustra la utilización de estas dos últimas especificaciones para el ajuste de un controlador.

Ejemplo 7-13. Se considera el intercambiador de calor del ejemplo 7-11. Ahora se debe ajustar un controlador proporcional para: a) MG = 1.5 y b) MF = 45°.

a) En el ejemplo 7-11 se determinó que la ganancia última del controlador es

$$K_{cu} = 12.8$$

En este caso la ganancia total del circuito es

$$K_{\text{punto}_u} = 0.8\ K_{cu} = 10.24$$

Para tener una especificación de MG de 1.5, la ganancia del controlador se fija entonces a

$$K_c\Big|_{GM=1.5} = \frac{K_{cu}}{1.5} = 8.53$$

Entonces la ganancia total del circuito es

$$K_{\text{punto}} = 0.8\ K_c = 6.83$$

b) En el ejemplo 7-11 las expresiones para RM y θ eran

$$RM = \frac{RA}{0.8\ K_c} = \frac{1}{\sqrt{(10\omega)^2 + 1}\sqrt{(30\omega)^2 + 1}\sqrt{(3\omega)^2 + 1}}$$

Y

$$\theta = -(2\omega)\left(\frac{180°}{\pi}\right) - \tan^{-1}(10\omega) - \tan^{-1}(30\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$$

Con base en la definición de margen de fase que se dio anteriormente, para un MF = 45°, $\theta = -135°$. Si se utiliza la ecuación para 8, o el diagrama de Bode de la figura 7-25, la frecuencia para este ángulo de fase se puede determinar como

$$\omega\Big|_{PM = 45°} = 0.087 \text{ rad/s}$$

Entonces, se substituye en la ecuación de la razón de magnitud para obtener

$$\frac{RA}{0.8K_c} = 0261$$

$$K_c\Big|_{PM = 45°} = \frac{RA}{0.8(0.261)} = \frac{1}{0.8(0.261)}$$

$$K_c\Big|_{PM = 45°} = 4.78$$

En el ejemplo 7- 13 se muestra cómo obtener el ajuste de un controlador por retroalimentación para 'ciertos MG y MF. En la parte a) se ajustó el controlador para' lograr un lazo de control con un MG de 1 .5, lo cual significa que la ganancia total del lazo se debe incrementar (a causa de las alinealidades del proceso o por cualquier otra razón) en un factor de 1.5, antes de que se alcance la inestabilidad. Para elegir el valor de MG, el ingeniero debe entender el proceso para decidir cuánto puede cambiar la ganancia del proceso sobre el rango de operación; entonces, con base en esta comprensión se puede utilizar un valor realista de MG. Mientras más grande es el valor de MG que se utiliza, más grande es el "factor de seguridad' ' con que se diseña el circuito de control; sin embargo, tanto más grande es el factor de seguridad (MG), cuanto más pequeña es la ganancia resultante del controlador y, en consecuencia, el controlador es menos sensible a los errores. Por lo anterior es importante la elección de un MG realista.

En la parte (b) del ejemplo se ajustó el controlador para lograr un MF de 45°. Esto significa que se puede añadir un retardo de fase de 45° al circuito de control antes de que se haga inestable. Los cambios en el ángulo de fase del circuito de control se deben principalmente a los cambios en sus términos dinámicos (constantes de tiempo y tiempo muerto), que son producto de las alinealidades del proceso.

El margen de ganancia y el margen de fase son los criterios distintos de desempeño. La elección de uno de ellos como criterio para un circuito en particular depende del proceso a controlar. Si a causa de las alinealidades del proceso y sus características se espera que la ganancia cambie más que los términos dinámicos, entonces el criterio recomendable es el de MG; si, por el contrario, se espera que los términos dinámicos cambien más que la ganancia, entonces el criterio de MF es el recomendable.

En el ejemplo 7-13 se demostró la forma de calcular un controlador proporcional para producir la especificación de desempeño que se desea. Si se utiliza un controlador PI o PID, se debe fijar primero el tiempo de reajuste y la rapidez derivativa, antes de calcular K_c, lo cual significa que el desempeño que se desea se produce con más de un conjunto de parámetros de ajuste, y es responsabilidad del ingeniero decidir cuál considera como el "mejor".

En esta sección se estudió el significado del margen de ganancia y el del margen de fase, así como la forma de ajustar los controladores por retroalimentación con base en estas especificaciones de desempeño. Sin embargo, en los procesos industriales se prefieren las especificaciones de desempeño del capítulo 6.

Diagramas polares

El diagrama polar es otra forma de graficar la respuesta en frecuencia de los sistemas de control; al contrario del caso de las dos gráficas de los diagramas de Bode, con este método se tiene la ventaja de que sólo se hace una gráfica. El diagrama polar es el de la función compleja $G(i\omega)$ conforme w va de 0 a ∞; para todo valor de w existe un vector en el plano complejo, con cuyo extremo se genera un lugar conforme cambia w; el principio del vector está en el origen, y su longitud es igual a la razón de amplitud de la función $G(i\omega)$; el ángulo que forma con el eje positivo real es el de fase. En esta sección se presentan los fundamentos de los diagramas polares y la manera de graficarlos. Primeramente se presentan los diagramas polares de algunas de las componentes de proceso más comunes.

Retardo de primer orden. La razón de amplitud y el ángulo de fase de un retardo de primer orden se expresan mediante las ecuaciones (7-27) y (7-28), respectivamente:

$$\text{RA} = \frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \tag{7-27}$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{7-28}$$

Para w = 0, RA = K y $\theta = 0°$. Para w = $\frac{1}{\tau}$, RA = $0.707K$ y $\theta = -45°$. Para w = ∞, RA = 0 y $\theta = -90°$.

En la figura 7-27 se muestra el diagrama polar para este sistema. Con la línea continua se representa la razón de amplitud y el ángulo de fase cuando la frecuencia va de 0 a ∞. Con cada punto de la curva se representa una w diferente. La longitud del vector, desde el

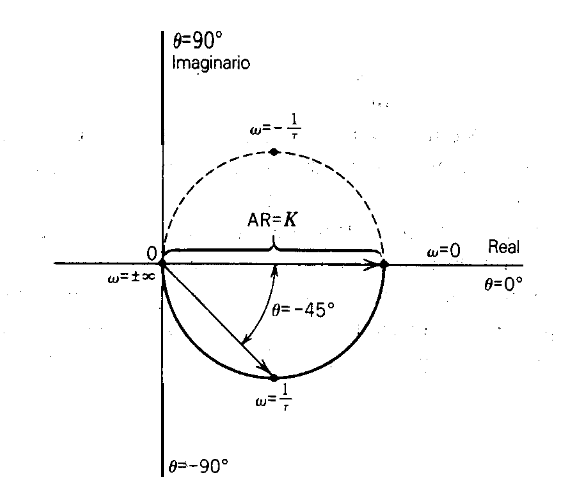


Figura 7-27. Diagrama polar para retardo de primer orden.

origen hasta un punto en la curva, es igual a la razón de amplitud con esa ω, y el ángulo que forma el vector con el eje positivo real es igual al ángulo de fase; en la figura 7-27 aparecen dos vectores, con el primero se representa la RA y θ para w = 0; con el segundo se representa RA y θ para w = $1/\tau$. Se notará que, conforme RA se aproxima a cero, θ tiende a -90, y esto es lo que se señala en las ecuaciones (7-27) y (7-28). Con la curva punteada se representa el diagrama de RA y θ cuando w va de $-\infty$ a 0.

Retardo de segundo orden. Las ecuaciones de RA y θ para un retardo de segundo orden se representan con las ecuaciones (7-29) y (7-30), respectivamente;

$$RA = \frac{K}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\tau\xi\omega)^2}} \tag{7-29}$$

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{2\tau\xi\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right) \tag{7-30}$$

Para $w = 0$, RA = K y $\theta = 0°$; para w = $1/\tau$, RA = $K/2\xi$ y $\theta = -90°$; para $w = \infty$, RA = 0 y $\theta = -180°$.

En la figura 7-28 se ilustra el diagrama polar de este sistema, en el cual RA tiende a cero desde el eje real negativo, porque θ tiende a $-180°$.

Tiempo *muerto.* Las expresiones de RA y θ para un sistema con tiempo muerto puro se expresan mediante las ecuaciones (7-34) y (7-35).

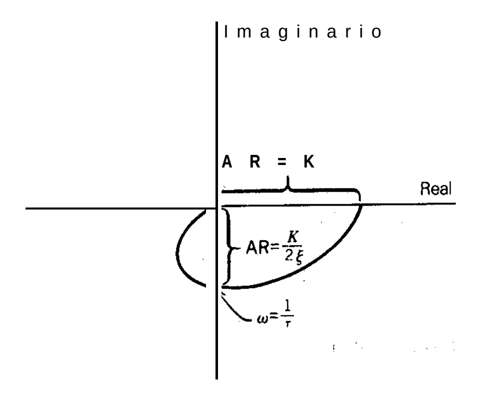


Figura 7-28. Diagrama polar de un sistema de segundo orden.

$$RA= 1 \tag{7-34}$$

y

$$\theta = - t_o\omega\left(\frac{180°}{\pi}\right) \tag{7-35}$$

Con estas ecuaciones se indica que la magnitud del vector siempre será unitaria y que, conforme se incremente ω, el vector empezará a girar. En la figura 7-29 se muestra que el diagrama polar resultante es un círculo unitario.

Mapeo de conformación. Se han mostrado algunos ejemplos de diagramas polares, sin embargo, antes de continuar con este tema, es importante mencionar el mapeo de conformación, ya que los diagramas polares se apoyan bastante en esta teoría. Se presenta

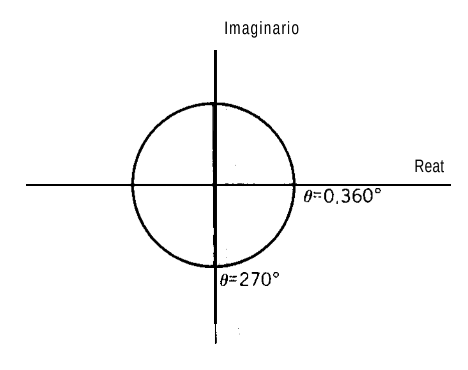


Figura 7-29. Diagrama polar para tiempo muerto puro.

una breve introducción al mapeo de conformación para lograr un mejor entendimiento de los diagramas polares.

Ahora se considera la función de transferencia general G(s); como ya se vio, la variable s es la variable independiente, la cual puede ser real, imaginaria o compleja; es decir, en general, $s = \sigma + i\omega$. Esta variable se puede graficar en el plano s de la forma que se muestra en la figura 7-30*a*. Al substituir el valor de s en la función de transferencia G(s), es posible obtener el valor de dicha función para una cierta s. Tal valor de G(s), el cual puede ser real, imaginario o complejo, $G(s) = \delta + i\gamma$, se puede graficar en el plano G(s), como se muestra en la figura 7-30*b*. Para todo punto en el plano s, existe un punto correspondiente en el plano G(s); es decir, con la función G se puede llevar a cabo el mapeo del plano s en el plano G(s). Con la función G no únicamente se logra el mapeo de los puntos, sino también las trayectorias o regiones.

Se utiliza la palabra "conformación" porque al realizar el mapeo, el plano *G(s)* se "conforma" con el plano s. Para explicar el significado de esto, se supone'que una trayectoria del plano s se debe mapear en el plano G(s); además, si en el plano s la trayectoria tiene una vuelta marcada, al mapearla en el plano G(s), también tendrá una vuelta marcada; esto es, el plano *G(s)* se "conforma" con el plano s.

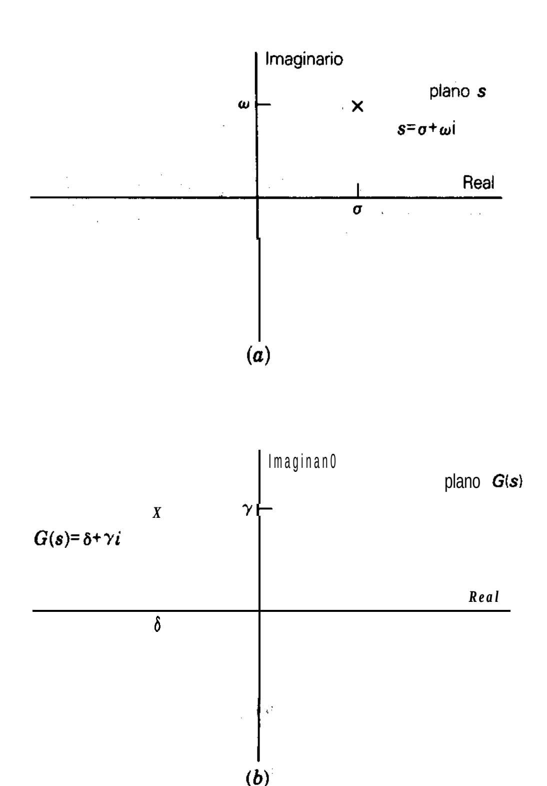


Figura 730. Mapeo de un punto del plano s al plano G(s).

Para que sea más específico el concepto de mapeo de conformación, a continuación se considera la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{(2s + 1)(4s + 1)}$$

En la figura 7-3 1 se muestra el mapeo de una región en el plano s, la cual se expresa con los puntos 1-2-3-4-1, y en el plano $G(s)$ por los puntos 1'-2'-3'-4'-1'. En la tabla 7-1 se muestra el manejo matemático con que se produce.

Ésta fue una explicación breve del mapeo de conformación y, como se mencionó antes, los diagramas polares se basan en dicha teoría. El mapeo, de conformación también será importante cuando se presente el uso de los diagramas polares, en el estudio de la estabilidad del control de proceso.

Criterio de estabilidad de Nyquist[1]**.** Los diagramas polares son muy útiles para analizar la estabilidad de los circuitos de control de proceso. En esta sección se presenta el

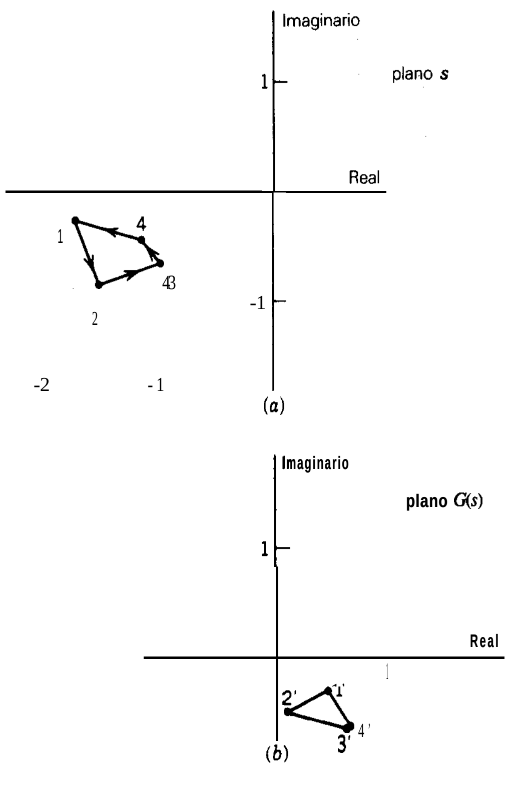


Figura 7-31. Mapeo del plano s al plano $G(s)$.

Tabla 7-1

Punto	*Coordenadas*	$2s + 1$	$4s + 1$	$(2s + 1)(4s + 1)$	$G(s)$	*Punto en el plano G(s)*
	$-1.8 - 0.4i$	$-2.6 - 0.8i$	$-6.2 - 1.6i$	$14.84 + 9.12i$	$\frac{10}{(14.84 + 9.12i)} = 0.49 - 0.3i$	
2	$-1.6i$	$-2.2 - 2i$	$-5.4 - 4i$	$3.88 + 19.6i$	$\frac{10}{3.88 + 19.6i} = 0.10 - 0.49i$	2′
3	$-1 - 0.8i$	$-1 - 1.6i$	$-3 - 3.2i$	$8.12 + 8i$	$\frac{10}{8.12 + 8i} = 0.62 - 0.61i$	3′
4	$-1.2 - 0.6i$	$-1.4 - 1.2i$	$-3.8 - 2.4i$	$8.2 + 7.92i$	$\frac{10}{8.2 + 7.92i} = 0.63 - 0.61i$	4′

criterio de estabilidad de Nyquist, en el cual se utilizan **tales** diagramas. No se da ninguna prueba del teorema, sin embargo, se recomienda que el lector consulte el documento original. Puesto que el presente criterio se basa en la utilización de los diagramas polares, a estos se les llama frecuentemente diagramas de Nyquist.

El criterio de Nyquist se puede enunciar como sigue:

> Un sistema de control de circuito cerrado es estable si al mapear la región *R* (la cual consiste en toda la mitad derecha del planos, incluyendo el eje imaginario) en el plano *G(s),* el plano de la **función** de transferencia de circuito abierto da por resultado la región R', en la cual no se incluye el punto (- l,O).

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación de este criterio.

Ejemplo 7-14. Se considera el circuito de control para el **intercambiador** de calor que se presentó en el capítulo 6 y que se utilizó en el ejemplo 7-4. En la figura 7-9 se muestra el diagrama de bloques de circuito cerrado para el circuito de control en cuestión, y la función de transferencia de circuito abierto es

$$\mathrm{FTCA} = \frac{0.8\,K_c}{(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)}$$

Con el criterio de Nyquist es preciso **mapear** todo el plano derecho (PD) del plano *s*, como se muestra en la figura 7-32, en el plano G(s). Para una mejor apreciación el mapeo se divide en tres pasos.

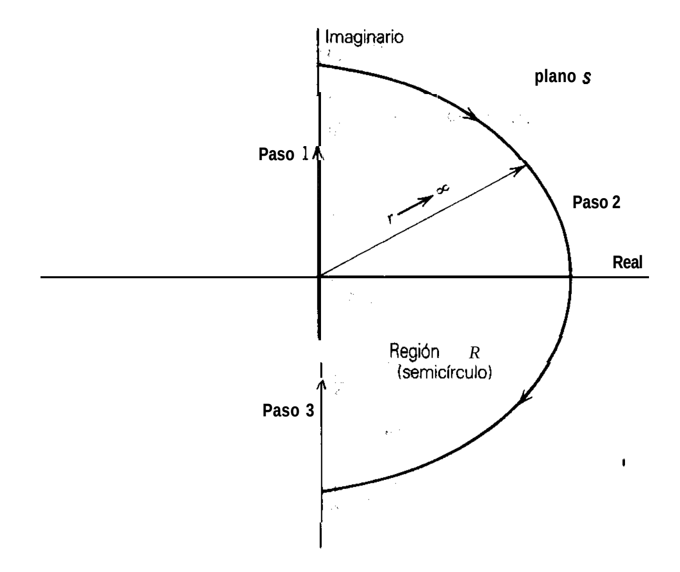


Figura 7-32. Región *R* del plano *s*.

Paso 1.

La frecuencia ω va de 0 a ∞, sobre el eje imaginario positivo, y, por tanto, $s = i\omega$. Al substituir esta expresión de s en la expresión de G(s), se obtiene

$$G(s) = \frac{0.8\,K_c}{(i10\omega + 1)(i30\omega + 1)(i3\omega + 1)}$$

Entonces, el diagrama empieza con $\omega = 0$, sobre el eje real positivo, en el valor $0.8K_c$, y termina con $\omega \to \infty$, en el origen (RA = 0), con un ángulo de fase de $-270°$, como se muestra en la figura 7-33. La frecuencia a la que el lugar cruza el ángulo de $-180°$ se puede encontrar fácilmente mediante la solución de la ecuación (7-52). Una vez que se obtiene el valor de ω, se puede calcular el valor de RA con la ecuación (7-51).

Paso 2.

En este paso la frecuencia se mueve de $\omega = \infty$ a $\omega = -\infty$, a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 7-32; en dicha trayectoria $s = re^{i\sigma}$, σ va de $90°$ a $0°$ y a $-90°$. Al substituir tal expresión de s en la expresión de $G(s)$, se tiene

$$G(s) = \frac{0.8\,K_c}{(10re^{i\sigma} + 1)(30re^{i\sigma} + 1)(3re^{i\sigma} + 1)}$$

Puesto que $r \to \infty$, entonces se puede despreciar el término $+1$ en cada paréntesis y

$$\lim_{r\to\infty} G(i\omega) = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{0.8\,K_c}{(10re^{i\sigma})(30re^{i\sigma})(3re^{i\sigma})}\right]$$

$$\lim_{r\to\infty} G(i\omega) = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{0.8\,K_c}{900r^3e^{i3\sigma}}\right] = 0$$

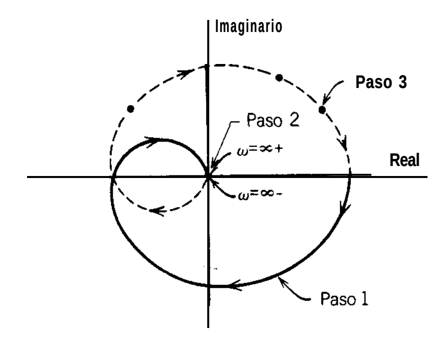


Figura 7-33. Diagrama polar de $G(s) = (0.8K_c)/[(10s + 1)(30s + 1)(3s + 1)]$.

lo cual indica que el semicírculo con $r \to \infty$ se mapea en el plano G(s) como un punto en el origen.

Paso 3.

En este paso la frecuencia se mueve de $-\infty$ a 0, a lo largo del eje imaginario negativo y, por tanto, $s = -i\omega$. Nuevamente se substituye esta expresión de s en la expresión de G(s), para obtener

$$G(i\omega) = \frac{0.8K_c}{(-i10\omega + 1)(-i30\omega + 1)(-i3\omega + 1)}$$

El diagrama empieza en el origen, $\omega = -\infty$, y termina con $\omega = 0$, sobre el eje real positivo, en el valor $0.8K_c$, con un ángulo de fase de $0°$. La trayectoria se muestra en la figura 7-33.

Es interesante notar que el paso 3 es justamente la "imagen de espejo" del paso 1, lo cual es comprensible si se tiene en cuenta que G(s) es una función compleja conjugada, lo que significa que el mapeo es simétrico, respecto al eje de las abscisas, en el plano G(s).

En el paso 1 se explicó cómo se obtiene el valor de FU para un ángulo de fase de $-180°$, el cual es la distancia al origen en que la trayectoria cruza el eje real negativo. Si el punto de cruce esta antes de -1, entonces el sistema es estable [en la región que se mapea no se incluye el punto (- 1 ,O)]; si el punto de cruce esta más allá de -1, entonces el sistema es inestable [en la región que se mapea se incluye el punto (- 1 ,O)]. Conforme se incrementa K_c, también RA se incrementa, de lo que resulta un sistema menos estable. Esta afirmación es la misma que para el criterio de estabilidad de respuesta en frecuencia.

En esta sección se presentó una breve introducción a los diagramas polares y al criterio de estabilidad de Nyquist. Sin duda el lector notó la equivalencia entre el criterio de estabilidad de Nyquist y el de respuesta en frecuencia.

Diagramas de Nichols

El diagrama de Nichols es otra manera de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de los sistemas. Esencialmente es un diagrama de la razón de amplitud (o de magnitud) contra el ángulo de fase. En la figura 7-34 se muestra este tipo de diagrama para algunos sistemas típicos, en los cuales la frecuencia es el parámetro a lo largo de la curva.

Resumen 'de la respuesta en frecuencia

Esta presentación de la respuesta en frecuencia fue más bien extensa y se esperaba mostrar la eficacia de la técnica. Las ecuaciones (7-39) y (7-40) son las ecuaciones generales para determinar RA y θ; con ellas se puede realizar el análisis y diseño de los sistemas de control. Se mostraron diferentes formas de graficar la respuesta en frecuencia de los sistemas.

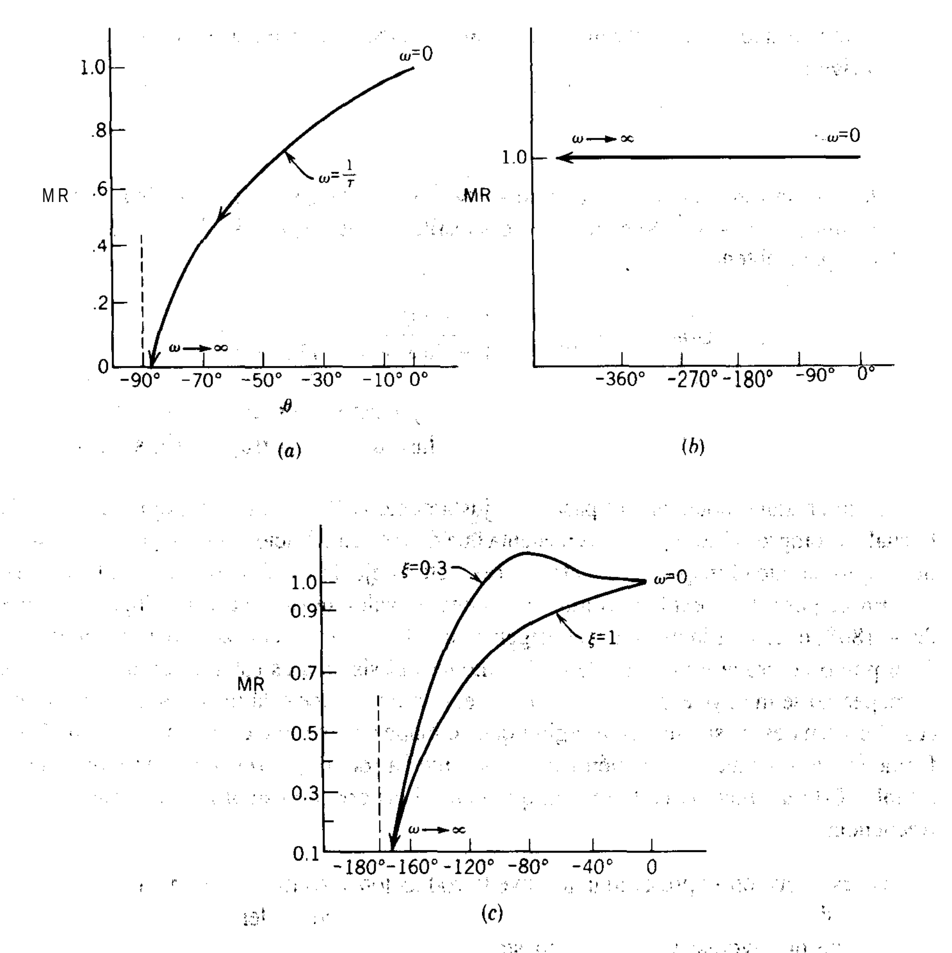


Figura 7-34. Diagramas de Nichols. *a)* Retardo de primer orden. *b)* Tiempo muerto. *c)* Retardo de segundo orden.

7-3. PRUEBA DE PULSO

Una de las aplicaciones más prácticas e interesantes de la respuesta en frecuencia es la utilización de la prueba de-pulso para determinar la función de transferencia del proceso, instrumentos y otros' 'dispositivos 'de control. Hougen[2] hace la descripción de varias aplicaciones de la prueba de pulso en la industria; -en esta sección se describe la técnica respectiva y se deducen las fórmulas básicas que se requieren para su aplicación,.

En el capítulo 6 se estudió el método de la prueba, escalón para determinar los parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto del proceso. Las ventajas de. la prueba escalón son su simplicidad y los requerimientos mínimos de cálculo; su mayor

desventaja es que, por precisión, se limita a los modelos de primer orden más tiempo muerto.

Con la **técnica** de prueba senoidal que se describió en la sección 7-2 es posible determinar, en principio, la función de transferencia'de un proceso de cualquier orden. A pesar de que la prueba senoidal se utiliza extensamente en la determinación de las funciones de transferencia de sensores, transmisores y actuadores de válvulas de control, rara vez se utiliza para probar procesos reales, debido a que la mayoría de los procesos son muy lentos para la prueba senoidal. Si se considera un proceso donde la constante de tiempo más larga es de un minuto, en el diagrama de Bode del proceso de frecuencia de ruptura está, con base en la ecuación **(7-42),** en

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = 1.0 \text{ rad/min}$$

Para localizar la **asíntota** de baja frecuencia del proceso se deben hacer al menos dos pruebas a frecuencias más bajas que la de ruptura; sean éstas 0.5 **y** q.25 **rad/min,** el período de la segunda de estas' señales **senoidales** es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28 \text{ rad}}{0.25 \text{ rad/min}} = 25.1 \text{ min!}$$

No **sólo** es difícil encontrar un generador de onda senoidal capaz de **generar consistentemente** una señal tan lenta, sino que **la prueba** tomaría al menos un **par de horas,** ya que se necesita completáf un mínimo de cuatro 8 cinco ciclos para la prueba. Además, con la prueba se obtendría **sólo** un punto en el diagrama de Bode y, si la constante de tiempo del proceso fuera de 10 minutos, se tendría que aplicar al **proceso** una onda senoidal con período superior a 4 horas.

Con la prueba del pulso se produce un diagrama de Bode completo del proceso a partir de una sola prueba cuya duración es considerablemente menor a **la** de **la** prueba que se describe en el párrafo anterior. Puesto que no se puede obtener algo de nada, el ahorro de esfuerzo en pruebas se compensa por el esfuerzo adicional de cálculo.

Realización de la prueba de pulso

El diagrama para la prueba de pulso es idéntico al que se da para la prueba senoidal en la figura **7-15,** con la excepción de que; en lugar de **la** señal y respuesta. senoidal de la figura 7-16, la señal de entrada es un pulso como el **que** aparece en la figura 7-35. Se notará que la duración de la respuesta, T_F, es mayor que la del pulso T_D. Los tres parámetros que se seleccionan' para realizar la prueba de pulso son la forma del pulso, su amplitud y su duración.

A pesar de que el pulso rectangular de la figura 7-35 es el más fácil de generar y analizar, se utilizan otras **formas de** pulso; como **las** que aparecen en la figura **7-36; lógicamente,** el pulso más **popular es** el rectangular, le sigue el pulsorectangular doble de

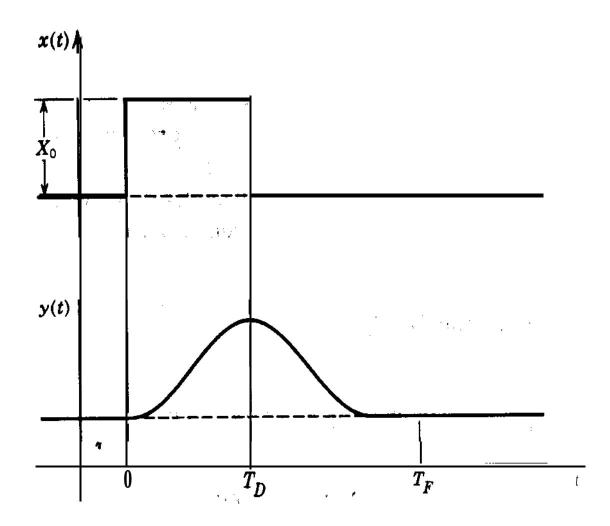


Figura 735. Entrada de pulso rectangular y respuesta a la salida.

la figura 7-36*b*. El único requisito para la forma del pulso es que debe regresar al valor inicial de estado estaciona&

Como en el caso de la prueba escalón y la senoidal, la amplitud del pulso, X_o, debe ser lo suficientemente grande como para que las mediciones de la respuesta sean exactas, pero no tan grande que la respuesta quede fuera del rango dentro del cual la función de transferencia lineal es una aproximación válida de la respuesta del proceso. Para satisfa-

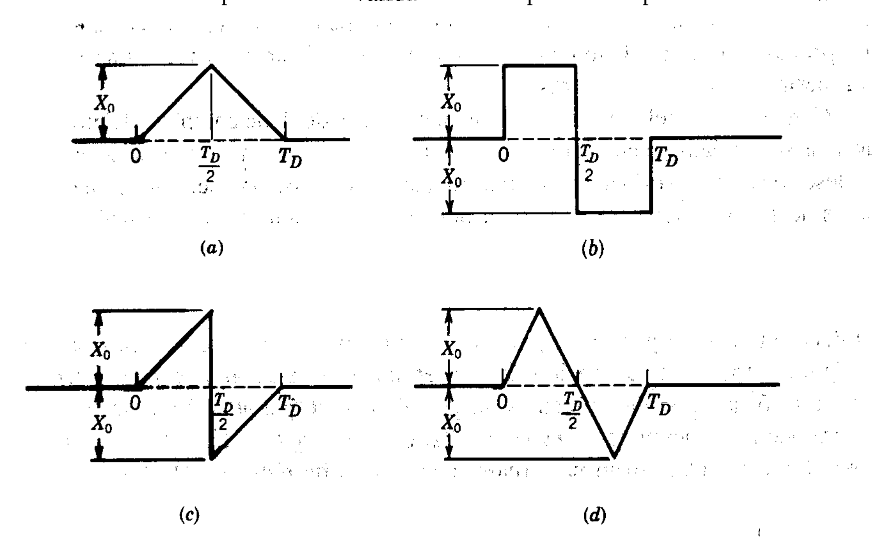


Figura 7-36. Formas comunes de pulsos para la prueba dinámica del proceso. *a*) Pulso triangular. *b*) Doble pulso rectangular. c) Rampa. *d*) Doble pulso triangular.

cer este requisito generalmente se necesita un dispositivo de registro muy sensible o una computadora digital en línea para registrar la respuesta.

La duración T_D del pulso depende completamente de las constantes de tiempo del proceso que se prueba, y no debe ser tan corta como para que no haya tiempo de que el proceso reaccione o tan larga que haya tiempo para que la respuesta alcance el estado estacionario antes de que se complete el pulso. Un pulso tan largo no **sólo** representa una perdida de tiempo de prueba, sino que también da por resultado una reducción en la frecuencia más alta para la cual son útiles los resultados de la prueba, como se verá en breve.

Deducción de la ecuación de trabajo

La respuesta en frecuencia del proceso bajo prueba se determina mediante el calculo de la función de transferencia compleja $G(i\omega)$, como una función de la frecuencia, de la respuesta del proceso al impulso de entrada: Para esto se utiliza lá definición de la ***transformada* de Fourier de una señal:**

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{7-55}$$

Al comparar la ecuación (7-55) con **la (2-1),** se ve que, con excepción del **límite** inferior en la integral, al substituir $s = i\omega$ en la **definición** de **la** transformada de **Laplace,** se puede obtener la transformada de Fourier. Puesto que las **señales** que interesan en el control de proceso son desviaciones del valor inicial de estado estacionario y, en consecuencia, son cero para un tiempo negativo, **el límite** inferior en la integral de **la ecuación** (7-55) se puede cambiar a cero. La transformada de Fourier se desarrolló antes que la transformada de **Laplace,** como una extensión de las series de Fourier para señales no periódicas.

Por definición, de la función de transferencia del proceso (ver capítulo 3)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{7-56}$$

donde:

- Y(s) es la transformada de **Laplace** de la respuesta del proceso (como desviación de su valor inicial de estado estacionario)
- X(s) es la transformada de **Laplace** del pulso

Se substituye $s = i\omega$ para encontrar

$$G(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)} \tag{7-57}$$

y se aplica la ecuación (7-55) a ambas señales para obtener

$$G(i\omega) = \frac{\int_0^\infty y(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}{\int_0^\infty x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt} \tag{7-58}$$

La (7-58) es la ecuación de trabajo para calcular la respuesta en frecuencia del proceso bajo prueba. La integral en el numerador y denominador de la ecuación (7-58) se puede calcular con base en la respuesta $y(t)$ a un pulso individual $x(t)$, para cada valor de interés de la frecuencia ω; el resultado del cálculo es un número complejo $G(i\omega)$; por lo tanto, la magnitud de este número es, de la ecuación (7-24), la razón de amplitud y, de la ecuación (7-25), se tiene que su argumento es el ángulo de fase a la 'frecuencia ω. Se repiten los cálculos para varios valores de ω a fin de obtener el diagrama de Bode completo, con base en los resultados de una sola prueba.

La integral de la transformada de Fourier de la señal de salida del proceso y(t) se debe calcular numéricamente, como se verá en breve. A pesar de que la integral del pulso, $x(t)$, también se puede cdcular'numéricamente, de la ecuación (7-55) se puede derivar una fórmula analítica, lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7-15. Se debe obtener, la transformada de Fourier de un pulso rectangular de amplitud X_O y duración T_D (ver figura 7-35).

Solución. Con base en la ecuación (7-55), se sabe que .

$$X(i\omega) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Puesto que el pulso es cero en todo momento, excepto entre 0 y T_D, se puede decir que

$$X(i\omega) = \int_0^{T_D} X_0 e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{X_0}{i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_0^{T_D}$$

$$= \frac{X_0}{i\omega}\left[1 - e^{-i\omega T_D}\right]$$

$$= \frac{X_0}{\omega}\left[\operatorname{sen}\omega T_D - i(1 - \cos\omega T_D)\right]$$

donde se utilizó la identidad

$$e^{-i\omega T_D} = \cos\omega T_D - i \sin\omega T_D$$

y $1/i = -i$. La magnitud y argumentos de $X(i\omega)$ son

$$|X(i\omega)| = \frac{X_0}{\omega}\sqrt{\text{sen}^2\,\omega T_D + (1 - \cos\,\omega T_D)^2}$$

$$= \frac{X_0}{\omega}\sqrt{2(1 - \cos\,\omega T_D)}$$

$$\sphericalangle X(i\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{1 - \cos\,\omega T_D}{\text{sen}\,\omega T_D}\right)$$

Con $\omega = 0$, $X(0) = X_o T_D$.

La magnitud del pulso es máxima en $\omega = 0$ y, por lo tanto,; cae a cero conforme la frecuencia se incrementa a infinito; la magnitud también es cero en los valores de la frecuencia w, que son múltiplos de $2\pi/T_D$ radianes/tiempo. Cuanto más larga es la duración del pulso, T_D, tanto más frecuentemente ocurren estos valores.

En el ejemplo precedente se observa que la magnitud máxima de la transformada de Fourier de un pulso rectangular es proporcional al área del pulso, $X_o T_D$. Puesto que la transformada de Fourier del pulso aparece en el denominador de la ecuación (7-57), es deseable evitar los valores de w donde la transformada es cero, cqn lo que se impone un límite superior al rango de frecuencias para las cuales, mediante la prueba de pulso, se puede calcular la respuesta en frecuencia. Para el pulso rectangular la frecuencia es $2\pi/T_D$, la cual, como se mencionó antes, decrece con la duración del pulso, T_D.

Evaluación numérica de la integral de la transformada de Fourler

Normalmente, la evaluación de la integral del numerador de la ecuación (7-58) se hace de manera numérica, para ello se utiliza una computadora digital. Un técnica eficiente y exacta para lograr la integración numérica es la que tiene como base la regla trapezoidal. Los cálculos se deben realizár Con aritmética de números complejos (ver sección 2-4), a causa del término exponencial complejo. Con la mayoría de los lenguajes de programación, como el FORTRAN, es posible realizar operaciones con números complejos.

Para realizar la integración numérica de la función y(t), primero se debe dividir ésta en N incrementos de tiempo de At, como se muestra en la figura 7-37. Se puede suponer que los incrementos son de duración uniformé de Δt, sin embargo, esto no es necesario en la práctica. La regla trapezoidal para integración numérica consiste en aproximar la función con una línea recta dentro de cada intervalo:

$$Y(i\omega) = \int_0^\infty y(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$\doteq \sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{\Delta t}\left[y_k + \frac{t}{\Delta t}(y_{k+1} - y_k)\right]e^{-\omega(t+k\Delta t)}\,dt \qquad (7\text{-}59)$$

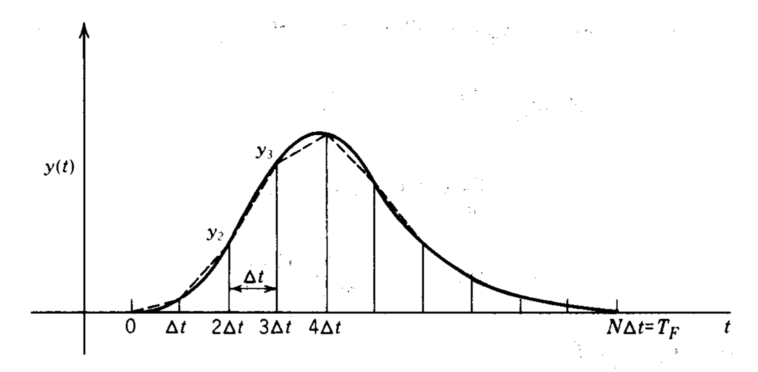


Figura 7-37. Discretización del pulso de respuesta para el **cálculo numérico** de la integral de la transformada de Fourier.

donde:

y_k es la respuesta en el tiempo $k\Delta t$
N = $T_F/\Delta t$ es la cantidad de incremento:

Al escribir la ecuación (7-59) se supuso que la respuesta para tiempo negativo era cero y que retornaba a cero después de N incrementos, esto es **posible** porque y es la desviación del valor inicial de **estado** estacionario. Al integrar por partes la ecuación (7-59) y simplificar, se obtiene

$$Y(i\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{i\omega k\Delta t}}{\omega^2 \Delta t} \{y_k(1 - e^{-i\omega\Delta t} - i\omega\Delta t) + y_{k+1}[(1 + i\omega\Delta t)e^{-i\omega\Delta t} - 1]\} \tag{7-60}$$

Esta fórmula se puede simplificar más si se toma en cuenta **el hecho de** que y_o y y_N son cero:

$$Y(i\omega) = \frac{(2 - e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t})}{\omega^2 \Delta t} \sum_{k=1}^{N-1} y_k e^{-i\omega k\Delta t} \tag{7-61}$$

De las identidades trigonométricas apropiadas, resulta la siguiente fórmula de trabajo:

$$Y(i\omega) = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega^2 \Delta t} \sum_{k=1}^{N-1} y_k e^{-i\omega k\Delta t} \tag{7-62}$$

Esta fórmula se puede programar directamente en FORTRAN o en otro lenguaje de computadora de alto nivel. Se ve que la ecuación (7-62) es muy eficiente, ya que para

cada frecuencia de interés únicamente se necesita realizar una vez la evaluación'de la función seno, la cual consume tiempo.

Cuando se calcula numéricamente la transformada de Fourier tanto de la respuesta de la salida como del pulso de entrada, se hace la substitución en el numerador y denominador de la ecuación **(7-57)**, de lo que resulta la siguiente **fórmula** para la función de transferencia del proceso:

$$G(i\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k e^{-i\omega k\Delta t}}{\sum_{j=1}^{M-1} x_j e^{-i\omega j\Delta t}} \tag{7-63}$$

donde M es la cantidad de incrementos que se utilizan para integrar el pulso $(M = T_D/\Delta t)$. En la ecuación (7-63) se supone que se utiliza el mismo intérvalo de integración para el numerador y el denominador. Cuando la transformada de Fourier de un pulso se puede calcular a partir de una fórmula analítica como la que se dedujo en el ejemplo 7-15, generalmente es mejor utilizar dicha fórmula en lugar de la ecuación (7-63); en tal caso, la transformada de Fourier de la respuesta de la salida se calcula con base en la ecuación **(7-62)**, y la función de transferencia, con base en la ecuación (7-57). Tales **cálculos** se deben repetir para cierta cantidad de valores de la frecuencia ω, con el fin de generar el diagrama de Bode del proceso. Puesto que se desea que la separación de los puntos en el diagrama de Bode sea igual sobre el eje logarítmico de frecuencia, cada frecuencia que se elija debe ser un factor constante de la anterior':

$$w_i = \beta\omega_{i-1} \qquad \textbf{para} \quad i = 1, 2, \ldots, N_\omega \tag{7-64}$$

donde:

$$\beta = \left(\frac{\omega_{máx}}{\omega_{mín}}\right)^{1/N_\omega}$$

$\omega_{máx}$ es el limite superior del rango de frecuencia en el diagrama de Bode, **rad/tiempo**
$\omega_{mín}$ es el límite inferior del rango de frecuencia en el diagrama de Bode, **rad/tiempo**
N_ω es la cantidad de incremento en que se divide el rango de frecuencia

Mediante el procedimiento que se acaba de describir es posible obtener el diagrama de Bode completo a partir de una sola **prueba de** pulso, siempre y cuando tanto el pulso de entrada como la respuesta de la salida regresen a sus valores iniciales. Puesto que las variables *y(t) y x(t) son desviaciones* **de las** condiciones **iniciales de** estado estacionario, al inicio valen cero **y,** para que y(t) vuelva a cero, las condiciones finales de estado estacionario deben ser las mismas que las iniciales. Este último requerimiento no se cumple cuando en el proceso existe un elemento de integración;. este caso se verá **próximamente**.

Procesos* con *integración. En la figura 7-38 se muestra la respuesta a la entrada de un pulso de un proceso con integración. El valor final de estado estacionario de la variable de desviación a la salida es proporcional a la integral del pulso de entrada:

$$y_\infty = K_I \int_0^{T_D} x(t)\, dt \tag{7-65}$$

Luyben[3] propuso tratar al proceso como si consistiera en un integrador puro con ganancia K_I en paralelo con un proceso ficticio con función de transferencia $G_A(s)$, de manera que la función de transferencia del-proceso real es

$$G(s) = G_A(s) + \frac{K_I}{s} \tag{7-66}$$

La salida del integrador se expresa por

$$y_I(t) = \begin{cases} K_I \int_0^t x(t)\, dt & 0 \le t < T_D \\ y_\infty & t \ge T_D \end{cases} \tag{7-67}$$

Entonces, la salida del proceso ficticio se expresa con

$$y_A(t) = y(t) - y_I(t) \tag{7-68}$$

La señal $y_A(t)$ es cero en el tiempo inicial y final, tal como se ilustra en la figura 7-38; $y_A(t)$ se puede calcular con base en las ecuaciones (7-67) y entonces se utiliza el resultado en las ecuaciones (7-62) y (7-57) para calcular $G_A(i\omega)$; por lo tanto, a partir de la ecuación (7-66), la función de transferencia del proceso es

$$G(i\omega) = G_A(i\omega) + \frac{K_I}{i\omega} \tag{7-69}$$

La ganancia K_I del integrador se calcula con la ecuación (7-65).

En esta sección se perfil6 el método de prueba de pulso para determinar experimentalmente la función de transferencia de un proceso. Luyben[3] expone un programa de computadora para generar los datos del diagrama de Bode a partir de los datos de respuesta a un pulso, y Hougen[2] presenta varias aplicaciones industriales exitosas de la prueba de pulso.

7-4. RESUMEN

En este capítulo se presentaron dos técnicas para el análisis y diseño de sistemas de control por retroalimentación: lugar de raíz, y respuesta en frecuencia. Ambas son excelentes para representar gráficamente la respuesta de los sistemas de control; de los dos, la respuesta de frecuencia es con la que se puede manejar la presencia de tiempo muerto sin hacer una aproximación. La respuesta en frecuencia también sirve como base para deter-

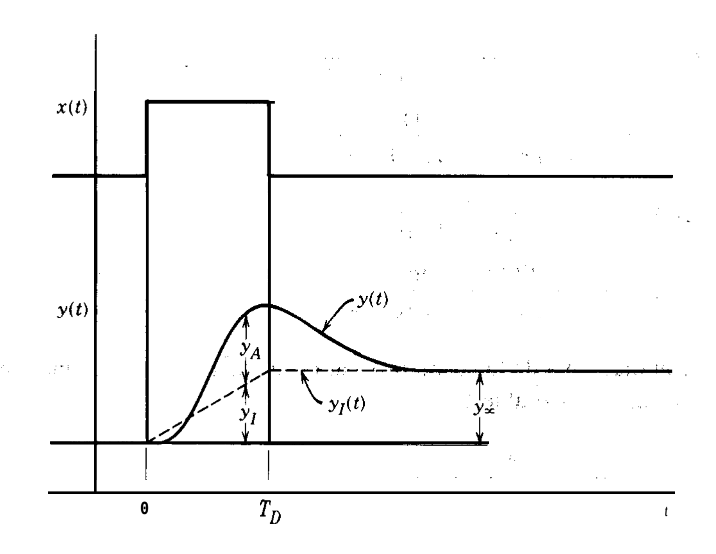


Figura 7-38. Manejo del pulso de respuesta del proceso de integración.

minar cuantitativamente los parámetros dinámicos del proceso que se utilizan en el método de prueba de pulso. Como se vio en este capítulo, a partir de los resultados de una sola prueba de pulso es posible determinar la respuesta en frecuencia completa.

Ya que se estudió el diseño y análisis de los sistemas de control por retroalimentación, a continuación se abordaran otras técnicas importantes de control, las cuales se usan comúnmente en la industria. Éste es el tema del próximo capítulo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Nyquist, H., "Regeneration Theory," *Bell System Technical Joumal,* Vol. 11 (1932), pp. 126-147.
2. Hougen, Joel O., "Experiences and Experiments with Process Dynamics," *CEP Monograph Services,* Vol. 60, No. 4, AIChE, Nueva York, 1964.
3. Luyben, William L., *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers,* McGraw-Hill, Nueva York, 1973, sección 9-3.

PROBLEMAS

7-1. Se debe dibujar el diagrama de lugar de raíz para cada una de las siguientes funciones de transferencia de circuito abierto (se utilizará una aproximación de Padé para el término de tiempo muerto):

a) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

c) $G(s) = \dfrac{Ke^{-s}}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

d) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)e^{-s}}{(s+1)(2s+1)(10s+1)}$

7-2. Dibujar el diagrama de lugar de raíz para cada una de las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto:

a) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(4s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{K(3s+1)}{(2s+1)}$

c) $G(s) = K\left(1 + \dfrac{1}{\tau_I s}\right)\left(\dfrac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1}\right)$

7-3. Ahora se considera la siguiente, función de transferencia para un cierto proceso:

$$G(s)H(s) = \frac{1.5}{(s+1)(5s+1)(10s+1)}$$

a) Se debe ajustar un controlador proporcional para un margen de ganancia de 2.

b) Se debe determinar el factor de amortiguamiento, ξ, para la respuesta oscilatoria del circuito de control mediante la utilización del parámetro de ajuste que se obtuvo en la parte (a).

7-4. Se debe dibujar el diagrama de lugar de raíz para las siguientes dos funciones de transferencia de circuito abierto:

a) Sistema con respuesta inversa:

$$G(s) = \frac{K(1 - 0.25s)}{(2s+1)(s+1)}$$

b) Sistema inestable de circuito abierto:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(1 - \tau_2 s)}$$

para los, casos:

$$\tau_1 = 2, \qquad \tau_2 = 1$$

Y

$$\tau_1 = 1, \qquad \tau_2 = 1$$

7-5. Ahora se considera el sistema de control de proceso que se muestra en la figura 7-39; la presión en el tanque se expresa por

$$\frac{P(s)}{F(s)} = \frac{0.4}{(0.15s + 1)(0.8s + 1)} \text{ psi/scfm}$$

La descripción de la **válvula** se puede hacer mediante la siguiente función de transferencia:

$$\frac{F(s)}{M(s)} = \frac{5}{0.1s + 1} \text{ scfm/psi}$$

El rango del transmisor de presión es de 0 psig a 30 psig y la dinámica del transmisor es despreciable.

a) Dibujar el diagrama de bloques para este sistema e incluir todas las funciones de transferencia.
b) Se debe esbozar el diagrama de lugar de **raíz.**
c) Se debe determinar la ganancia del controlador en el punto de ruptura.
d) Se debe determinar la ganancia última y el periodo último.
e) Calcular el parámetro de ajuste de un controlador P con el que se obtenga un factor de amortiguamiento de 0.707,

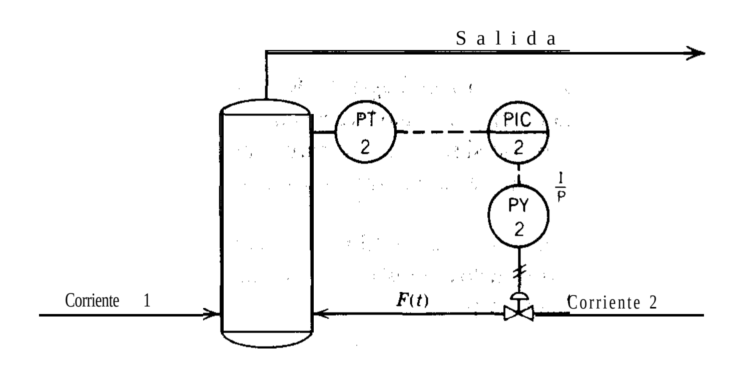


Figura 7-39. Croquis para el problema 7-5.

f) Explicar gráficamente la forma en que la adición de la acción de reajuste al controlador afecta a la estabilidad del circuito de control.

g) Explicar gráficamente la forma en que afecta a la estabilidad del circuito de control el añadir acción derivativa al controlador PI del inciso *(f)*.

7-6. Se repite el problema 7-3 con la siguiente función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{0.8e^{-s}}{10s + 1}$$

7-7. Para el proceso que aparece en el problema 6-20, se debe elaborar el diagrama de lugar de raíz, para ello se utilizará una aproximación de Padé de primer orden, como se ve en la ecuación (6-29), a fin de aproximar el término de tiempo muerto.

7-8. Para las funciones de transferencia del problema 7- 1, se deben dibujar las asíntotas del diagrama de Bode de razón de magnitud (o de la razón de amplitud) y graficar a grandes rasgos el diagrama del ángulo de fase.

7-9. Se debe repetir el problema 7-8 para las funciones de transferencia del problema 7-2.

7-10. Para las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s + 1} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{1 + s}{(2s + 1)(s + 1)}$$

a) Esbozar las asintotas de la parte de razón de magnitud. del diagrama de Bode, marcando las frecuencias de ruptura.

b) Indicar el retardo de fase (o adelanto) para frecuencias altas $(\omega \rightarrow \infty)$.

7-11. Se debe graficar el diagrama de Bode para las funciones de transferencia que aparecen en el problema 7-4.

7-12. En la figura 7-40 se muestra el diagrama de Bode de un sistema de circuito abierto; se debe obtener la función de transferencia de este sistema. ¿Qué ganancia del controlador se puede tolerar si se desea un 'margen de ganancia de 2? ¿Cuál es el margen de fase con una ganancia de controlador de 0.6?

7-13. Ahora se considera el proceso de filtro de vacío que aparece en la figura 6-30. En este proceso se utilizan los datos del problema 6-15 y se aplican las técnicas de respuesta en frecuencia para:

a) Graficar las asíntotas del diagrama de Bode y el diagrama del ángulo de fase.

b) Obtener la ganancia última, K_{cu}, y el periodo último, T_u.

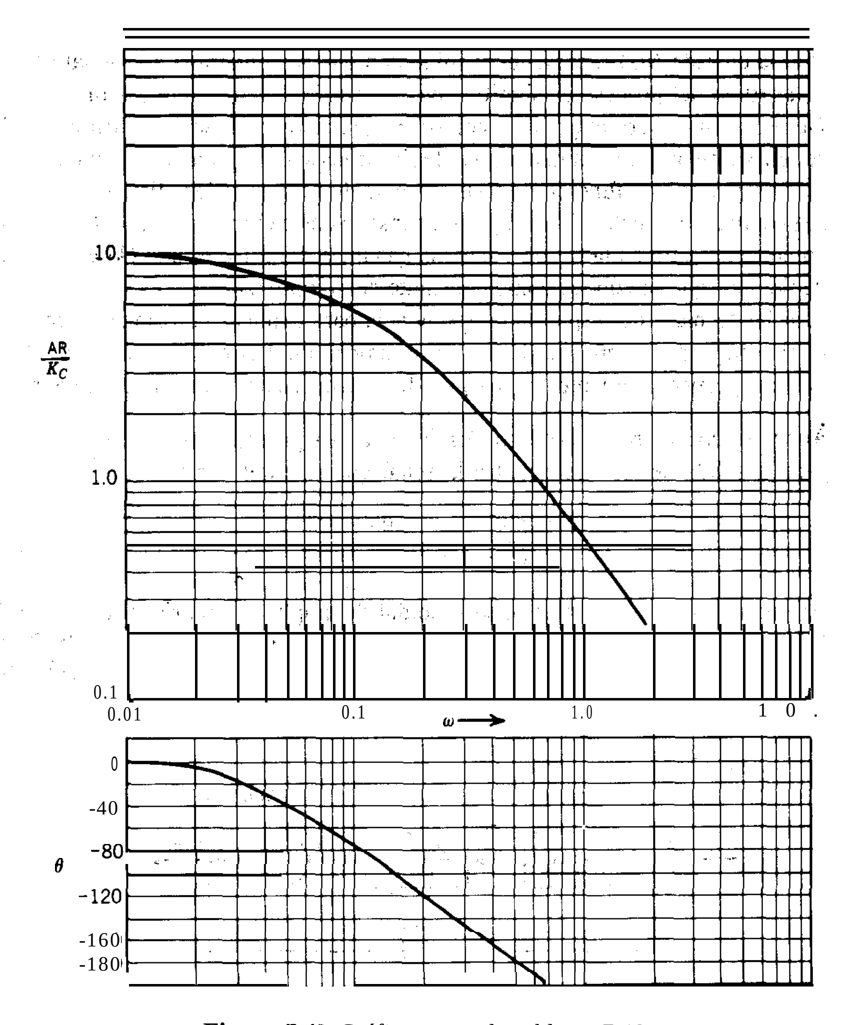


Figura 7-40. Gráficas para el problema 7-12.

c) Ajustar el tiempo de reajuste de un controlador PI mediante el método de síntesis del controlador y determinar la ganancia del controlador con la cual se logra un margen de ganancia de 2.

7-14. Para este problema se considera el absorbedor que se presentó en el problema 6-16; en la parte (a) de ese problema se diseño un circuito de control por retroalimentación con el fin de controlar la concentración de amoniaco a la salida. Para dicho circuito de control se debe:

a) Dibujar las asíntotas del diagrama de Bode y del diagrama de ángulo de fase.
b) Obtener la ganancia última, K_{cu}, y el período último, T_u.
c) Ajustar un controlador P para un margen de fase de 45°.

7-15. Ahora se considera el diagrama de bloques que aparece en la figura 7-41*a* en el cual la entrada $N(s)$ representa el ruido con que se contamina a la señal de salida; si tal ruido del proceso es significativo, se puede dificultar el control de proceso. Generalmente, para mejorar el control en procesos ruidosos se filtra la señal que se retroalimenta; una manera típica de filtrar las señales es mediante un dispositivo de filtraje con una función de transferencia de primer orden. Este dispositivo, ya sea neumático, electrónico o digital, se instala entre el transmisor y el controlador, como se muestra en la figura 7-41*b;* la ganancia del filtro es uno (1) y la constante de tiempo, que se conoce como constante de tiempo del filtro, es τ_F. Se deben utilizar las técnicas de respuesta en frecuencia para explicar la forma en que τ_F afecta al filtraje de la señal ruidosa y al desempeño del circuito de control. Se debe graficar, específicamente, el margen de ganancia como una función de τ_F.

7-16. Ahora se considera un proceso térmico con la siguiente función de transferencia para la salida del proceso contra la señal que sale del controlador:

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{0.65e^{-0.35s}}{(5.1s + 1)(1.2s + 1)}$$

Al proceso se le aplica una onda senoidal de amplitud unitaria y frecuencia 0.80 rad/min; las constantes de tiempo y el tiempo muerto están en minutos. Se debe calcular la amplitud y el retardo de fase de la onda senoidal que sale del proceso después de que cesa la respuesta transitoria.

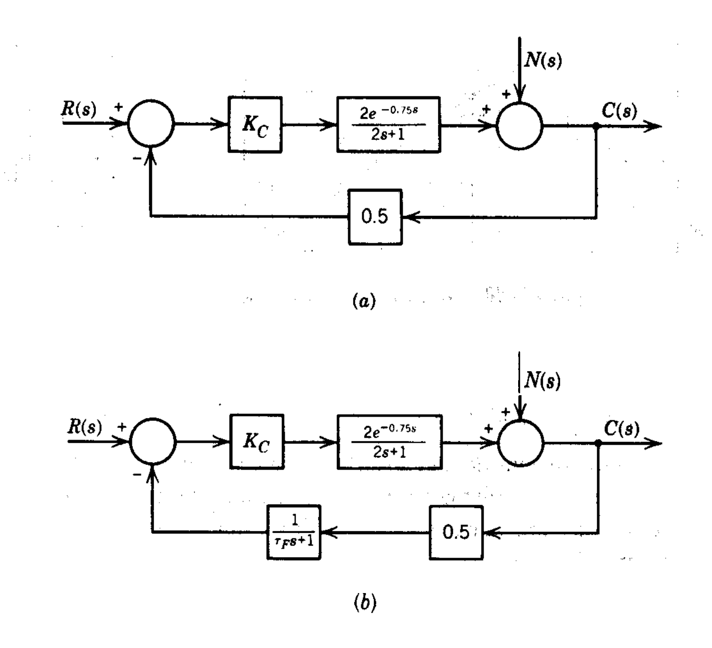


Figura 741. Croquis para el problema 7-15.

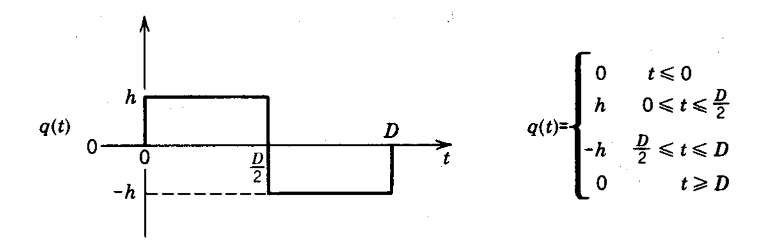


Figura 7-42. Gráfica para el problema 7-17.

7-17. Con el pulso rectangular **simétrico** que se muestra en la figura 7-42 se tiene la ventaja de poder promediar el efecto de las alinealidades sobre el resultado de la prueba dinámica.

a) Se debe deducir la transformada de Fourier para el pulso, $Q(i\omega)$.
b) Se deben escribir las **fórmulas** para la magnitud, $|Q(i\omega)|$, y el ángulo de fase, $\measuredangle$ Q(h), como funciones de la frecuencia.

7-18. Para la prueba pulso de un proceso se utiliza un pulso rampa de duración T_D *y amplitud* final x_o. Se debe determinar la integral de la transformada de Fourier del pulso.

7-19. En un proceso, el diagrama de razón de amplitud contra frecuencia da por resultado la gráfica que aparece en la figura 7-43. En el diagrama de ángulo de fase no se alcanza una **asíntota** de alta frecuencia, pero se vuelve más negativo conforme se incrementa la frecuencia. Con una frecuencia de 1 .O **rad/min,** el ángulo de fase es

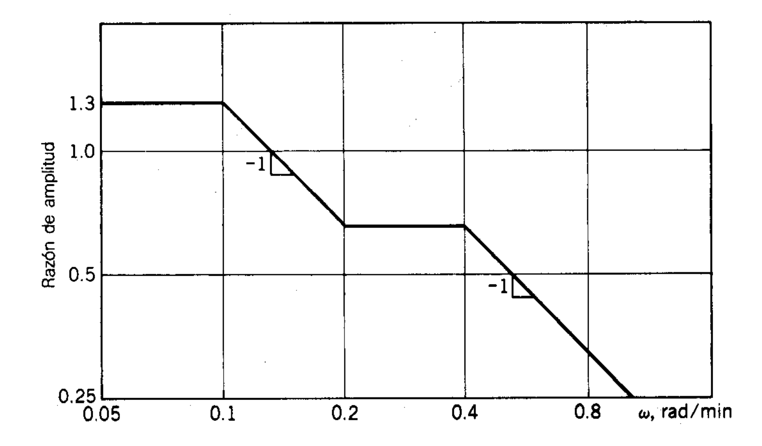


Figura **7-43.** Gráfica para el problema 7-19.

de − 246 grados. Se debe postular una función de transferencia para el proceso y estimar la ganancia, las constantes de tiempo y el tiempo muerto, si lo hay.

7-20. El diagrama de Bode que aparece en la figura 7-44 se obtuvo para la función de transferencia de temperatura contra razón de agua para enfriamiento en un reactor tubular, mediante el método de prueba de pulso. Se debe determinar:

a) La ganancia de estado estacionario del proceso.
b) La constante de tiempo.
c) Una estimación del tiempo muerto en el sistema.

7-21. Para los cuatro pulsos que aparecen en la figura 7-35, se debe obtener la transformada de Fourier, la razón de magnitud y el ángulo de fase.

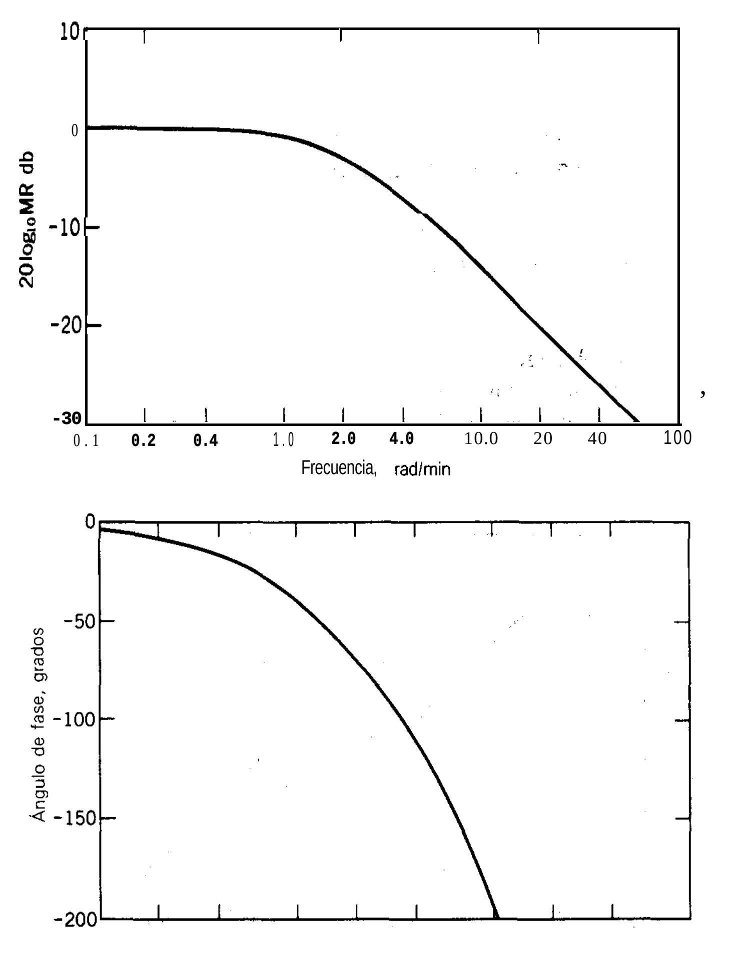


Figura 7-44. Gráficas para el problema 7-20.

CAPÍTULO

8

Técnicas adicionales de control

En los capítulos anteriores se hizo énfasis principalmente en el control de los procesos mediante la técnica que se conoce como control por retroalimentación. En el capítulo 1 se expusieron los principios de dicha técnica, junto con algunas de sus ventajas y desventajas; en el capítulo 5 se presentaron los componentes básicos y el equipo (hardware) necesario para estructurar un sistema de control; finalmente, en los capítulos 6 y 7 se hizo la presentación, estudio y aplicación práctica de las diferentes técnicas para diseñar y analizar los sistemas de control con circuito sencillo de retroalimentación. Como se mencionó en el capítulo 1, el control por retroalimentación es la técnica que más comúnmente se utiliza en las industrias de proceso.

En muchos procesos, mediante la aplicación de otras técnicas de control, es posible y ventajoso mejorar el desempeño logrado con el control por retroalimentación. En este capítulo se tiene como objetivo presentar algunas de las técnicas que se han desarrollado, y frecuentemente utilizado, con el fin de mejorar el desempeño del control que se logra por medio del control por retroalimentación. Para estas técnicas se requiere una mayor cantidad de ingeniería y equipo que en el control por retroalimentación solo y, en consecuencia, es de suponerse que, antes de aplicar tales técnicas, se requiera realizar un estudio de factibilidad técnica económica.

Las técnicas que se presentan en el presente capítulo son: control de razón, control en cascada, control por acción precalculada, control por superposición, control selectivo y control multivariable. A lo largo del capítulo se muestran muchos ejemplos industriales reales, a fin de ayudar al lector a comprender los principios y aplicación de las técnicas.

Para la implementación de las técnicas que se presentan en este capitulo se requiere cierta capacidad de cómputo, que en el pasado se obtuvo mediante la utilización de relés de cómputo, ya fuera neumáticos o eléctricos. En los últimos años, con el advenimiento de las micro, mini o computadoras de gran escala, se reemplazaron muchos de estos relés

de cómputo analógicos. El capítulo se inicia con el estudio de los relés de cómputo analógicos y de los bloques de cómputo con base en microprocesadores.

8-1. RELÉS DE CÓMPUTO

Como ya se mencionó, para estructurar las técnicas que se presentan en este capítulo se requiere cierta capacidad de cómputo, la cual generalmente se obtiene mediante la utilización de relés de cómputo, ya sea neumáticos o eléctricos, o bloques de cómputo con base en microprocesadores. Los relés son cajas negras en las que se realiza algún manejo matemático de las señales; en software, los bloques son el equivalente de los relés. Algunos de los manejos típicos que se pueden realizar con estos relés de cómputo analógicos o bloques de cómputo son los siguientes:

1. **Adición/substracción.** La señal que se obtiene a la salida es la adición o substracción de las señales de entrada.

2. **Multiplicación/división.** La señal de salida es el producto o el cociente de las señales de entrada, o ambos.

3. **Raíz cuadrada.** La señal de salida es la extracción de la raíz cuadrada de la señal de entrada.

4. **Selector de alto/bajo.** La señal de salida es la máxima/mínima de dos o más señales de entrada.

5. **Limitador de alto/bajo.** La señal de salida es la señal de entrada que se limita a un valor máximo/mínimo precalculado.

8. **Generador de función.** La señal de salida es una función de la señal de entrada. Esta función generalmente se aproxima mediante una serie de líneas rectas.

7. **Integrador.** La señal de salida es la integral, en tiempo, de la señal de entrada. Para el integrador se usan otros términos, como el de "totalizador".

8. **Retardo lineal.** La señal de salida es la solución de una ecuación diferencial de primer orden cuya función de forzamiento es la señal de entrada; dicho calculo se describe en forma matemática como sigue:

$$\text{Salida} = \left(\frac{1}{\tau s + 1}\right) \text{Entrada}$$

Este calculo se utiliza frecuentemente para filtrar una señal ruidosa; la cantidad de filtración depende de la constante de tiempo τ; mientras más grande es la constante de tiempo, mayor es la filtración que se hace.

9. Adelanto/retardo. La señal de salida es la siguiente función de transferencia:

$$\text{Salida} = \left(\frac{\tau_{ld}s + 1}{\tau_{lg}s + 1}\right) \text{Entrada}$$

Tabla 8-1. Relés de cómputo[a]

Las señales de esta tabla se dan en fracciones del intervalo.

V_0 = señal de salida
V_1, V_2, V_3 = señales de entrada

Adición/substracción

$$V_0 = a_0(\pm a_1V_1 + V_2 \pm a_3V_3 \pm a_4V_4) + B_0$$

donde

V_2 = entrada de referencia (0 a 1)
a_1, a_3, a_4 = 0.11 to 1.0
a_0 = 0.2 to 8.5
B_0 = -0.5 to 1.0

Multiplicador

$$V_0 = 4a_0(V_1V_2) + B_0$$

Divisor

$$V_0 = \frac{a_0}{4}\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + B_0$$

Multiplicador y divisor

$$V_0 = a_0\left(\frac{V_1V_2}{V_3}\right) + B_0$$

donde (para los tres relés anteriores)

a_0 = 0.1 a 8.0
B_0 = 0 a 0.5

Estación de rezón

$$V_0 = \pm R(V_1 - B_i) + B_o$$

donde

R = 0.3 a 3.0
B_i = desviación de entrada, 0 a 1
B_0 = desviación a la salida, 0 a 1

Adelantolretardo

$$V_0 = a_0\left(\frac{1 + T_2s}{1 + T_1s}\right)(V_1 - B_i) + B_o$$

Tabla 8-1. ***Continuación***

donde

a_0 = 0.1 a 2
B_i = 0 a 1
B_o = 0 a 1
T_1 = constante de tiempo de retardo, segundos (0 a 3000)
T_2 = constante de tiempo de adelanto, segundos (0 a 3000)

Raíz cuadrada

$$V_0 = \sqrt{V_1}$$

[a] Éstos son ejemplos de los relés de cómputo **electrónicos** que tiene Fisher **Controls** en el mercado.

Tabla 8-2. Bloques de **cómputo**[a]

Las **señales** en esta tabla se dan en porcentaje del intervalo.

OUT = señal de salida
X, Y, Z = señales de entrada

Sumador

$$\text{OUT} = K_x X + K_y Y + K_z Z + B_0$$

donde

K_x, K_y, K_z = -9.999 a + 9.999
B_0 = -100% a +100%

Multiplicador/divisor

$$\text{OUT} = \frac{K_A(K_x X + B_x)(K_y Y + B_y)}{(K_z Z + B_z)} + B_0$$

donde

K_A = 0 a 2
K_x, K_y, K_z = 0.1 a 9.999
B_x, B_y, B_z, B_0 = —100% a 100%

Suma de las raíces cuadradas

$$\text{OUT} = K_x\sqrt{X} + K_y\sqrt{Y} + K_z\sqrt{Z} + B_0$$

Producto de las raíces cuadradas

$$\text{OUT} = K_A\sqrt{X \cdot Y \cdot Z} + B_0$$

donde (para ambas raíces cuadradas)

K_A, K_x, K_y, K_z = -9.999 a + 9.999
B_0 = -100% a 100%

Flujo de masa

$$\text{OUT} = K_A \cdot \text{XSQRT} \sqrt{\frac{K_y Y + B_y}{K_z Z + B_z}}$$

Tabla 8-2. (Continuación).

donde

XSQRT = raíz cuadrada del diferencial de presión.
Se debe introducir en el algoritmo.

K_A = 0 a 2

K_y, K_z = 0.1 a 1.00

B_y, B_z = 0.0% a 100%

Sumador de adelanto/retardo

$$OUT = \frac{K_A(sT_2 + 1)}{(sT_1 + 1)(sT_3 + 1)}(X - Y) + K_zZ + B_0$$

Adelanto/retardo con multiplicador

$$OUT = \frac{K_A(sT_2 + 1)}{(sT_1 + 1)(sT_3 + 1)}(X - Y)(K_zZ) + B_0$$

donde (para ambos **adelantos/retardos)**

K_A = 0.1 a 99.99

K_z = -9.999 a +9.999

B_0 = -100% a 100%

T_2 = constante de tiempo de retardo, min
= 0.02 a 99.99; 0 = desconectado

T_1 = primera constante de tiempo de retardo, min
= 0 a 91.4; 0 = desconectado

T_3 = segunda constante de tiempo de retardo, min
= 0 a 91.02; 0 = desconectado

Razón externa y derivación

OUT = Y(razón efectiva) + (derivación efectiva)

razón efectiva = $K_xX + B_x$ cuando se configura una entrada X
= RAZÓN cuando no se configura una entrada X

derivación efectiva = $K_zZ + B_z$ cuando se configura una entrada Z
= DERIVACIÓN cuando no se configura una entrada Z

donde

K_x, K_z = —9.999 a + 9.999

B_x, B_z = -100% a 100%

RAZÓN = -9.999 a +9.999

DERIVACIÓN = -100% a +lOO%

Selector

OUT = máximo de entradas que se utiliza X, Y, Z, M, A, C
OUT = mínimo de entradas que se utiliza X, Y, Z, M, A, C

donde

X, Y, Z, M, A, C = señales de entrada

[a] Éstos son ejemplos de los bloques de cómputo del sistema de control con base en microprocesadores Honey-

Esta ecuación es la misma que la ecuación (4-78), su comportamiento y el significado de τ_{ld} y τ_{lg} se explicaron en el capítulo 4. Este **cálculo** se utiliza frecuentemente en los planes de control como el control con acción precalculada, en el cual se requiere compensación **dinámica.**

Con el advenimiento de los sistemas de control con base en microprocesadores se incrementó tremendamente la disponibilidad de manejos matemáticos más complejos; en la tabla 8-1 se ilustran algunas de las ecuaciones que se resuelven mediante los relés de cómputo electrónicos de un fabricante; en las tablas 8-2 y 8-3 se muestran algunas de las

Tabla 8-3. Bloques de cómputo*

En esta tabla las **señales** se expresan en porcentajes del intervalo.

1. **Sumador/substractor**

$$OUT = K_1X_1 + K_2X_2 + K_3X_3 + K_4X_4 + K_5$$

2. Multiplicador

$$OUT = K_1[X_1X_2X_3X_4] + K_5$$

3. Divisor[a]

$$OUT = \left[K_1 \frac{X_1 + K_2}{X_2 + K_3}\right] + K_5$$

4. **Raíz** cuadrada

$$OUT = K_1\sqrt{X_1 + K_2} + K_5$$

5. **Cálculo** del flujo de masa

$$OUT = K_1\sqrt{\frac{K_2X_1X_2 + K_3}{X_3 + K_4}} + K_5$$

6. **Estación** de razón

$$OUT = K_1X_1 + K_5$$

7. Selector de máximos

$$OUT = \text{Máx de } (X_1, X_2, X_3, X_4) + K_5$$

8. Selector de mínimos

$$OUT = \text{Mín de } (X_1, X_2, X_3, X_4) + K_5$$

donde (para todos los bloques)

X_1, X_2, X_3, X_4 = entrada

$-100 \leq K_1, K_2, K_3, K_4 \leq 100$

$-400\% < K_5 < +400\%$

[a] Éstos son ejemplos de los bloques de cómputo de los sistemas con base en microprocesadores Beckman MV8000.

ecuaciones que se resuelven mediante dos sistemas de control basados en microprocesadores diferentes. Es interesante notar que en todos los casos las constantes se limitan dentro de algunos valores prefijados y, puesto que se limita a las constantes, éstas se deben elegir de modo que el cálculo matemático requerido se realice de manera correcta. En esta sección se muestra la manera de elegir los valores de las constantes, lo cual también se conoce como "escalamiento" y que es necesario para asegurar la compatibilidad entre la señal de entrada y la de salida.

El método que se utiliza para escalar *se* conoce como ***método de escala unitaria; su*** utilización es muy simple y se aplica igualmente a los instrumentos analógicos, neumáticos o eléctricos, así como a los sistemas con base en microprocesadores. El método consta de los tres pasos siguientes:

1. La ecuación a resolver se escribe junto con el rango de cada variable del proceso, a cada una de las cuales se le asigna un nombre de señal.
2. Cada variable del proceso se relaciona con su nombre de señal mediante una ecuación normalizada.
3. El sistema de ecuaciones normalizadas se substituye en la ecuación original y se resuelve para la señal de salida.

A continuación se muestra la aplicación de este método mediante un ejemplo típico.

Ejemplo 8-1. Se supone que se necesita calcular la razón de flujo de masa de un cierto gas que fluye a través de una tubería de proceso, como se muestra en la figura 8- 1, donde se aprecia un orificio en la tuberfa. En el apéndice C se presenta una ecuación simple para calcular la masa que fluye **a través** de un orificio, ésta es:

$$m = K[h\rho]^{1/2} \tag{8-1}$$

donde:

$\dot{m}$ = flujo de masa, lbm/h
h = presión diferencial a través del orificio, pulg H_2O

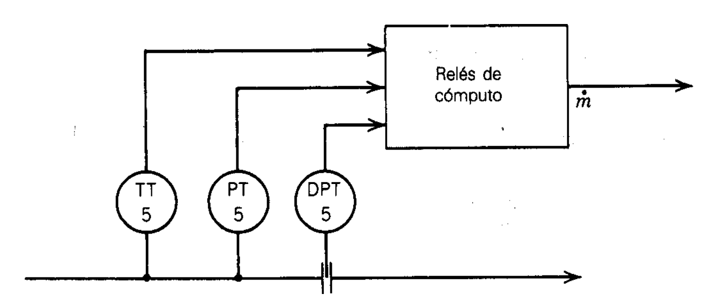


Figura 8-1. Flujo de gas a través de una tuberfa de proceso.

ρ = densidad del gas, lbm/pies^3
K = coeficiente del orificio

La densidad del gas próxima a las condiciones de operación se expresa mediante la siguiente ecuación linealizada (ver ejemplo 2-13):

$$\rho = 0.13 + 0.003(P - 30) - 0.00013(T - 500) \tag{8-2}$$

Entonces, la ecuación con que se obtiene el flujo de masa es

$$m = K[h(0.13 + 0.003(P - 30) - 0.00013(T - 500))]^{1/2} \tag{8-3}$$

El rango de las variables para este proceso es el siguiente:

Señal	Variable	Rango	Estado estacionario
$S1$	h	0-100 pulg H_2O	50 pulg H_2O
$S2$	T	300-700°F	500°F
$S3$	P	0- 50 psig	30 psig
$S4$	m	0-700 lbm/hr	500 lbm/hr

El coeficiente del orificio es K = 196.1 lbm/[h(pulg -lbm/pies^3)$^{1/2}$].

La ecuación (8-3) y los rangos anteriores constituyen el'paso 1 del método de escala unitaria. Esta información la debe conocer el ingeniero de proceso; se notará que a cada variable del proceso se le asigna un nombre de señal.

En el paso 2 se necesita relacionar, mediante una ecuación normalizada, cada variable de proceso con su nombre de señal, lo cual significa que, conforme la variable de proceso varía entre los valores máximo y mínimo del rango, la señal debe variar entre los valores 0 y 1; una ecuación simple para cumplir con esto es

$$\text{Señal} = \frac{\text{Variable del proceso} - \text{Valor inferior del rango}}{\text{Rango}} \tag{8-4}$$

Al aplicar esta ecuación, se obtiene

$$S1 = \frac{h}{100} \quad \text{o} \quad h = 100\,S1 \tag{8-5}$$

$$S2 = \frac{T - 300}{400} \quad \text{o} \quad T = 300 + 400\,S2 \tag{8-6}$$

$$S3 = \frac{P}{50} \quad \text{o} \quad P = 50\,S3 \tag{8-7}$$

Y

$$S4 = \frac{m}{700} \qquad \text{o} \qquad \dot{m} = 700\,S4 \tag{8-8}$$

Finalmente, de acuerdo con el paso 3, se substituyen las ecuaciones anteriores, de la (8-5) a la **(8-8)**, en la ecuación (8-3) y se resuelve para la señal de salida *S4*.

$$700\,S4 = 196.1[100\,S1(0.13 + 0.003(50\,S3 - 30) - 0.00013(300 + 400\,S2 - 500))]^{1/2}$$

Mediante la utilización del álgebra se simplifica esta ecuación a

$$S4 = 1.08[S1(S3 - 0.35\,S2 + 0.44)]^{1/2} \tag{8-9}$$

Ésta es la ecuación normalizada que se debe componer con los relés o bloques de cómputo.

Ahora se utilizan los relés de cómputo de la tabla 8-1 para formar la ecuación (8-9). Puesto que esta ecuación no se puede formar con un solo relé, se hace por partes; en la primera se calcula el término entre paréntesis y para ello se utiliza una unidad de **adición/substracción**, como sigue:

$$V_0 = a_0(\pm a_1V_1 + V_2 \pm a_3V_3 \pm a_4V_4) + B_0$$

o

$$V_0' = (S3 - 0.35\,S2) + 0.44$$

Sea $V_1 = S3$, $V_3 = S2$, y $V_4 = 0$; entonces, al igualar las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$a_0 = 1; \qquad a_1 = 1; \qquad V_2 = 0; \qquad a_3 = 0.35; \qquad B_0 = 0.44$$

El signo que se elige para a_1 debe ser positivo, y para a_3, negativo. Ahora se multiplica la salida de esta primera unidad por la señal *S1* y por el factor $(1.08)^2$:

$$V_0 = 4a_0(V_1V_2) + B_0$$

o

$$V_0 = (1.08)^2(S1)V_0'$$

Sea $V_1 = S1$ y $V_2 = V_0'$; entonces, al igualar las dos últimas ecuaciones, se tiene

$$a_0 = \frac{(1.08)^2}{4} = 0.292; \qquad B_0 = 0$$

Finalmente se extrae la raíz cuadrada de la señal que sale de este último relé. En la figura 8-2 se muestra el diagrama de bloques de los instrumentos que se requiere emplear.

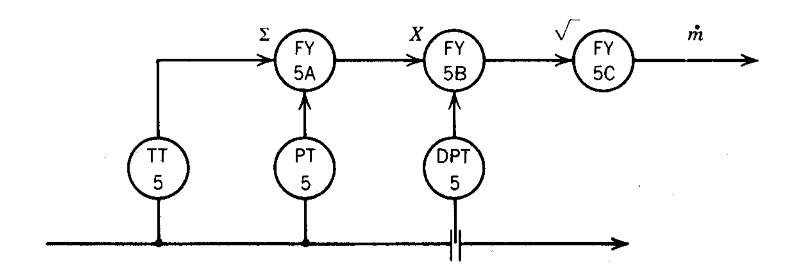


Figura 8-2. Cálculo del flujo de masa de gas.

La señal que sale de **FY5C,** el extractor de raíz, se relaciona linealmente con el flujo de masa de gas. Conforme el flujo de masa varíe entre 0 y 700 **lbm/h,** la señal variará entre 4 y 20 **mA;** ahora se puede utilizar esta señal para realizar cualquier función de control o de registro.

Se notará que en la figura 8-1 las señales se representan con líneas continuas para hacer énfasis en la aplicación del método de escala unitaria, independientemente del tipo de señal. Cuando se hace el escalamiento, no es necesario **especificar** si la señal es eléctrica, neumática o digital, el método de escala unitaria se aplica de la misma forma a las tres y en esto estriba la eficacia del mismo.

Para completar el ejemplo, ahora se muestra la implementación en el sistema con base en microprocesadores que aparece en la tabla 8-2. La ecuación que se debe formar **también** es la **(8-9),** pero antes de hacer la implementación se notará que en la tabla 8-2 se especifica que las señales de entrada y salida deben estar expresadas en porcentaje de rango; en la ecuación (8-9) las señales $S1$, $S2$, S3 y S4 son fracciones de rango que resultan del método de escala **unitaria y,** por tanto, primero se deben convertir a porcentaje de rango las señales, lo cual se hace fácilmente al multiplicar ambos lados de la ecuación (8-9) por 100%.

$$100(S4) = 1.08(100)[S1(S3 - 0.35\,S2 + 0.44)]^{1/2}$$
$$100(S4) = 1.08[100\,S1(100\,S3 - 0.35(100)S2 + 44)]^{1/2}$$

o

$$S4' = 1.08[S1'(S3' - 0.35\,S2' + 44)]^{1/2}$$

Ahora todas las señales, $S1'$, $S2'$, $S3'$ y $S4'$, están en porcentaje de rango.

Al igual que antes, primero se implementa el término entre **paréntesis**. Se utiliza el bloque sumador:

$$\text{OUT} = K_x X + K_y Y + K_z Z + B_0$$

El término es

$$\text{OUT}' = S3' - 0.35\,S2' + 44$$

Sea X = S3 ' y Y = S2 '; la entrada Z no se utiliza. De igualar las dos ecuaciones anteriores se obtiene entonces

$$K_x = 1; \quad K_y = -0.35; \quad K_z = 0; \quad B_0 = 44\%$$

El siguiente bloque se utiliza para completar la implementación:

$$\text{OUT} = K_A\sqrt{X \cdot Y \cdot Z} + B_0$$

La ecuación que se debe implementar es

$$S4' = 1.08\sqrt{S1'\text{OUT}'}$$

Sea X = $S1'$ y Y = OUT '. Puesto que la entrada Z no se necesita, se le fija manualmente a un valor de 1% y, entonces, se igualan las dos últimas ecuaciones para obtener

$$K_A = 1.08; \quad B'' = 0\%$$

De manera que, al utilizar este sistema con base en microprocesadores, se ahorra una manipulación, únicamente se requieren dos bloques. Como se mencionó anteriormente, los sistemas con base en microprocesadores generalmente cuentan con una capacidad de cómputo mayor que la de los instrumentos analógicos; además, con estos sistemas la fijación de las constantes se hace más rápido y con más precisión.

Como se vio, el método de escala unitaria es simple y eficaz. Es importante subrayar nuevamente que, cuando se utiliza este método, no es necesario considerar si se trabaja con relés analógicos, eléctricos o neumáticos, o con bloques de cómputo; el método se aplica de igual manera a todos ellos como resultado de la normalización. Por ejemplo, en el caso que se presentó anteriormente, el flujo de estado estacionario es una fracción de 0.714 (500/700) del rango de la señal; si se utiliza instrumentación neumática, la salida de estado estacionario del último relé sería de 11.57 psig, lo cual resulta de 3 + 0.714(12); si se utiliza instrumentación electrónica, la salida de estado estacionario del último relé, FY5C en la figura 8-2, sería de 15.42 mA; si se utiliza un sistema con base en microprocesadores, la salida de estado estacionario del último bloque sería una fracción de 0.714 del rango más el valor cero.

Antes de concluir esta sección es conveniente un comentario final: siempre es importante revisar la ecuación normalizada, ecuación (8-9), antes de la implementación, lo cual se hace fácilmente si se utilizan los valores de estado estacionario. Por ejemplo, los valores de estado estacionario de las señales, con base en las ecuaciones normalizadas, son

$$\overline{S1} = 0.5; \quad \overline{S2} = 0.5; \quad \overline{S3} = 0.6; \quad \overline{S4} = 0.714$$

Al substituir $\overline{S1}, \overline{S2}$ y S3 en la ecuación (8-9), se obtiene

$$\overline{S4} = 1.08[0.5(0.6 - 0.35(0.5) + 0.44)]^{1/2}$$
$$\overline{S4} = 0.710$$

La diferencia entre este valor calculado de $S4$ y el que se obtiene de la ecuación normalizada es pequeño (5%) y se debe principalmente a error de truncamiento; ciertamente, en procesos de gran volumen aun este error se puede hacer significativo, lo cual puede ser un incentivo para utilizar computadoras, ya que tienen mejor precisión que los instrumentos analógicos. Sin embargo, se debe recordar que, en el campo de la instrumentación, los sensores y transmisores son aun analógicos y con limitaciones de precisión.

En las secciones siguientes se presentan varias técnicas de control con las que se mejora el desempeño de control logrado mediante el control por retroalimentación. En los diagramas con que se ilustra la implementación se utilizan símbolos de instrumentación analógica. Sin embargo, el lector debe recordar que la implementación se puede hacer mediante sistemas con base en microprocesadores; además, con la utilización de estos nuevos sistemas se simplifica en gran medida la implementación. Los principios de las técnicas que se presentan son los mismos, no importa qué tipo de sistema se utilice para implementarlas.

8-2. CONTROL DE RAZÓN

Una técnica de control muy común en los procesos industriales es el control de razón. En esta sección se presentan dos casos industriales de control de razón para ilustrar el significado y la implementación. El primer caso es simple, pero con él se explica claramente la necesidad del control de razón.

Para ordenar las ideas expuestas, se supone que se deben mezclar dos corrientes de líquidos, *A* y *B*, en cierta proporción o razón, *R*, esto es,

$$R = \frac{B}{A}$$

El proceso se muestra en la figura 8-3. En la figura 8-4 se expone una manera fácil de cumplir con dicha tarea; cada flujo se controla mediante un circuito de flujo en el cual el punto de control de los controladores se fija de manera tal que los líquidos se mezclan en la proporción correcta. Sin embargo, si ahora se supone que no se puede controlar

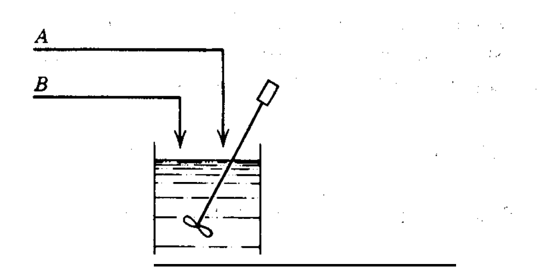


Figura 8-3. Mezcla de dos corrientes líquidas.

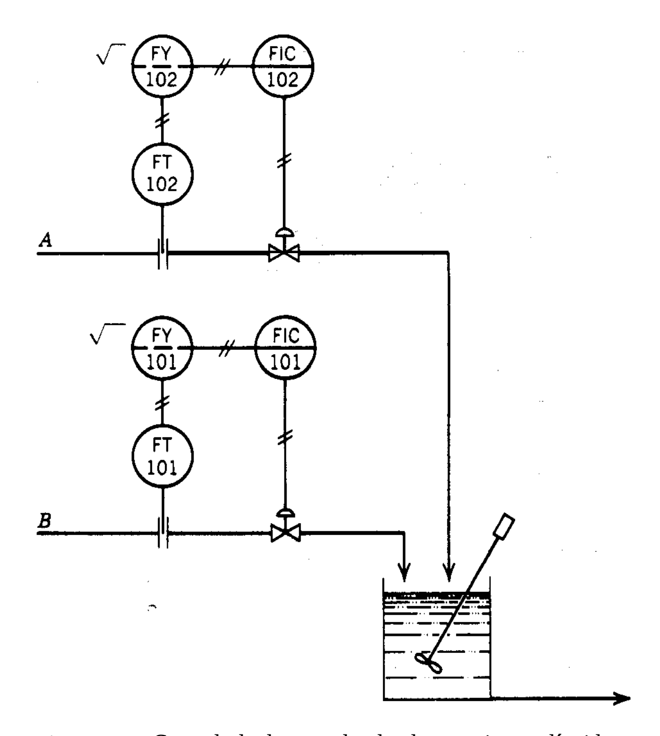


Figura 8-4. Control de la mezcla de dos corrientes líquidas.

uno de los flujos (la corriente A), sino **únicamente** medirlo, flujo que se conoce como "flujo salvaje", se maneja generalmente para controlar alguna otra cosa, por ejemplo, el nivel o la temperatura corriente arriba, y, por lo tanto, ahora la tarea de control es más difícil. De alguna manera, la corriente *B* debe variar conforme varía la corriente *A*, para mantener la mezcla en la razón correcta; en la figura 8-5 se muestran dos esquemas posibles de control de razón.

El primer esquema, el cual aparece en la figura 8-5*a*, consiste en medir el flujo salvaje y multiplicarlo por la razón que se desea (en FY 102B) para obtener el flujo que se requiere de la corriente *B*. Esto se expresa matemáticamente como sigue:

$$B = RA$$

La salida del multiplicador o estación de razón, **FY102B**, es el flujo que se requiere de la corriente *B* y, por lo tanto, ésta se utiliza como punto de control **para el** controlador de la corriente *B*, **FIC101**; de manera que, conforme varía la corriente *A*, el punto de control del controlador de la corriente *B* variará en concordancia con aquélla para mantener ambas corrientes en la razón que se requiere. Se notará que, si se requiere una nueva razón entre las dos corrientes, la *R* nueva se debe fijar en el multiplicador o estación de razón. También se notará que el punto de control del controlador de la corriente *B*

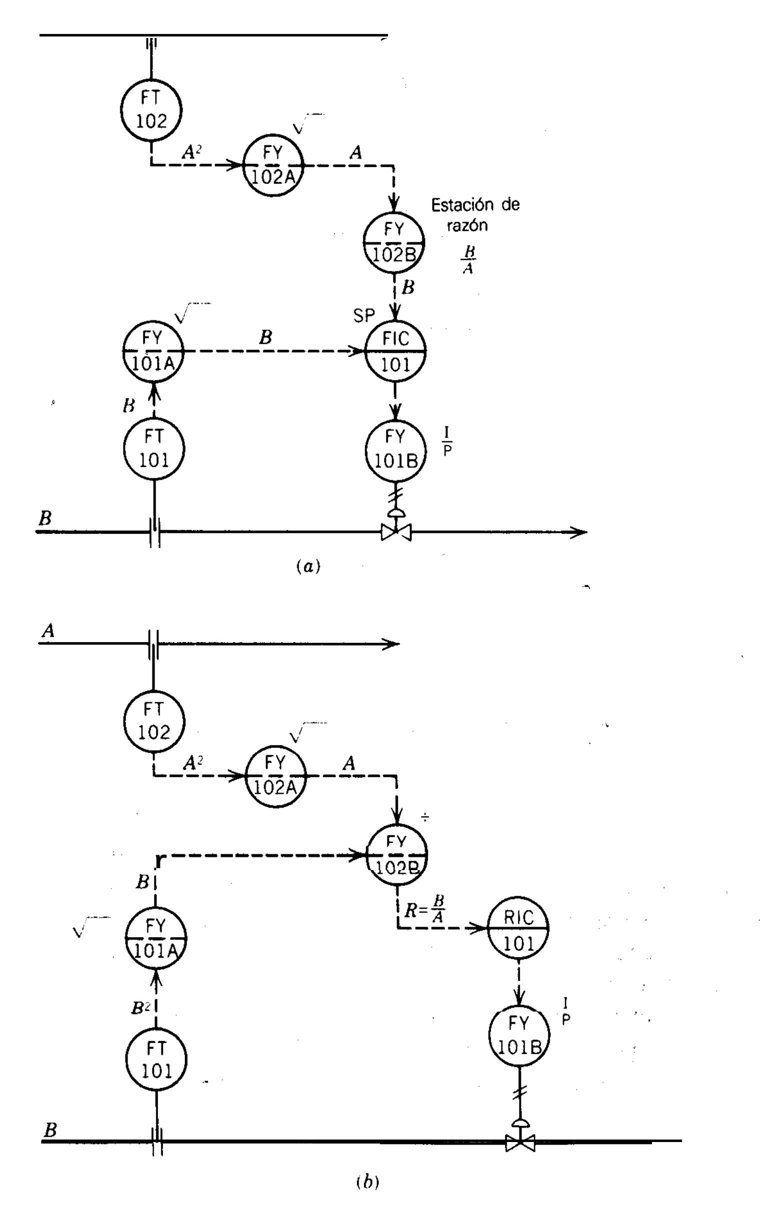


Figura 8-5. Control de razón del sistema de mezcla.

se fija desde otro dispositivo, y no desde el frente del panel del controlador; en consecuencia, como se explicó en la sección 5-3, el controlador debe tener el conmutador **remoto/local** en la posición de remoto.

El segundo esquema de control de razón, figura 8-5*b*, consiste en medir ambas corrientes y dividirlas (en FY102B) para obtener la razón de flujo real a través del sistema. La razón que se calcula se envía entonces a un controlador, RIC101, con el cual se manipula el flujo de la corriente *B* para mantener el punto de control. El punto de control de este controlador es la razón que se requiere, y se fija desde el panel frontal.

En este ejemplo se utilizaron sensores diferenciales de presión para medir los flujos. Como se muestra en el apéndice C, la salida del sensor-transmisor mencionado guarda relación con el cuadrado del flujo y, por tanto, se utilizaron extractores de raíz cuadrada para obtener el flujo; sin embargo, como se menciona en el apéndice C, actualmente la mayoría de los fabricantes incluyen un extractor de raíz cuadrada en sus transmisores diferenciales de presión, por lo cual la señal que sale de dicho transmisor ya esta en relación lineal con el flujo y no se necesita el extractor de raíz cuadrada separado. Ambos esquemas de control se pueden implementar sin los extractores de raíz cuadrada, sin embargo, se utilizan para hacer que el circuito de control se comporte de manera más lineal, de lo cual resulta un sistema más estable.

En la industria se utilizan ambos esquemas de control, sin embargo, se prefiere el que aparece en la figura 8-5*a*, porque es más lineal que el mostrado en la figura 8-5*b*. Lo anterior se demuestra mediante el análisis de los manejos matemáticos en ambos esquemas; en el primero se resuelve la siguiente ecuación, con FY102B:

$$B = RA$$

La ganancia de este dispositivo, es decir, la cantidad en que cambia la salida por cada modificación en la corriente de entrada *A* se expresa con

$$\frac{\partial B}{\partial A} = R$$

el cual es un valor constante. En el segundo esquema se resuelve la siguiente ecuación, con FY 102B:

$$R = \frac{B}{A}$$

La ganancia se expresa mediante

$$\frac{\partial R}{\partial A} = -\frac{B}{A^2}$$

de manera que, al cambiar el flujo de la corriente *A*, ésta también cambia, lo cual da lugar a una no linealidad.

Un hecho definitivo acerca de este proceso. de mezcla. es que, aun cuando se puedan controlar ambos flujos, es más conveniente implementar el control de razón, en comparación con el sistema de control que aparece en la figura 8-4; en la figura 8-6 se muestra

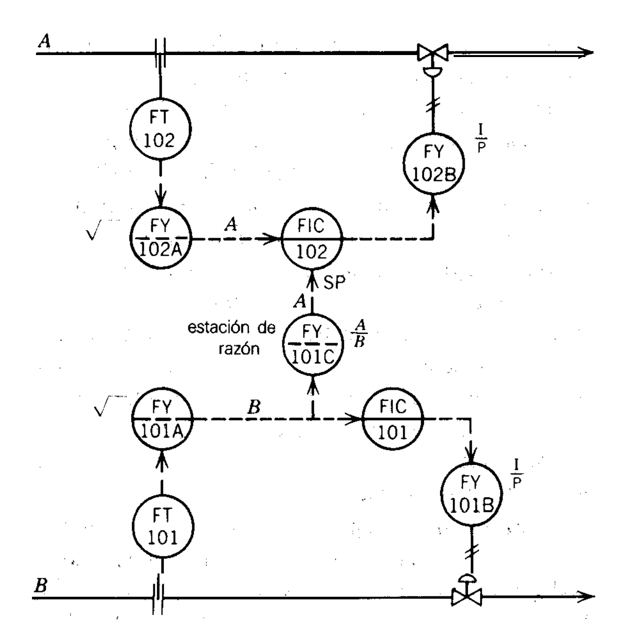


Figura 8-6. Control de razón del sistema de mezcla -se manipulan ambos circuitos.

un esquema de control de razón para este caso. Si se tuviera que incrementar el flujo total, el operador sólo tiene que cambiar un flujo, el punto de control de FIC101 ; mientras que en el sistema de control de la figura 8-4 el operador necesita cambiar dos flujos, tanto el punto de control de FIC101 como el de FIC102.

En las figuras 8-5 y 8-6 se empiezan a utilizar puntas de flecha para indicar la dirección de transmisión de las seriales (flujo de la información); aun cuando esto no está normalizado, se logra que sea más fácil seguir tales diagramas complejos. También se utiliza la abreviación SP para indicar la señal del punto de control de un controlador; se debe recordar que es necesario colocar en remoto la opción local/remoto del controlador.

El esquema que se ilustra en la figura 8-5*a* es muy común en la industria de proceso. Los fabricantes han desarrollado, principalmente para los sistemas con base en microprocesadores, un controlador en el que se recibe una señal, se multiplica por un número (razón) y el resultado se utiliza como punto de control, esto significa que la estación de razón, FY102B en la figura 8-5*a*, se puede incluir en el mismo controlador. De manera similar, en la figura 8-6 FY 101C se puede incluir en FIC102.

Como se puede ver, a partir de este sistema de mezclado se inició el desarrollo de esquemas de control más complejos que el simple control por retroalimentación. En el desarrollo de estos planes es útil recordar que toda señal debe tener un significado físico, en las figuras 8-5 y 8-6 se etiquetó cada señal con su significado, por ejemplo, en' la figura 8-5*a* la señal que sale de FT102 se relaciona con el cuadrado del flujo de la corriente A, A^2, entonces la salida del extractor de raíz cuadrada FY 102A es el flujo de la corriente A.

Si ahora se multiplica esta señal por la razón *BA*, la señal que sale de FY102B es el flujo que se requiere de la corriente *B*. A pesar de que esto no es un estándar, en lo sucesivo se etiquetarán las señales con su significado a lo largo del capítulo; se recomienda que el lector haga lo mismo.

Ejemplo 8-2. Otro ejemplo común de control de razón que se utiliza en la industria de proceso es el control de la razón aire/combustible que entra a una caldera o a un horno. El aire se introduce en una cantidad superior a la que se requiere estequeométricamente para asegurar la combustión completa del combustible; el exceso de aire que se introduce depende del tiempo de combustible y del equipo que se utilicen; sin embargo, a una cantidad mayor de aire en exceso corresponde una mayor pérdida de energía, debido a los gases de escape; por lo tanto, el control del aire que entra es muy importante para una operación adecuadamente económica.

Generalmente se utiliza el flujo de los combustibles como variable manipulada para mantener en el valor que se desea la presión del vapor que se produce en la caldera. En la figura 8-7 se muestra una forma de controlar la presión de vapor, así como el esquema para controlar la razón de aire/combustible; este esquema se conoce como control por colocación en paralelo[1, 11, 12] con ajuste manual de la razón aire/combustible. La presión de vapor se transmite mediante PT101 al controlador de presión PIC101, con el cual

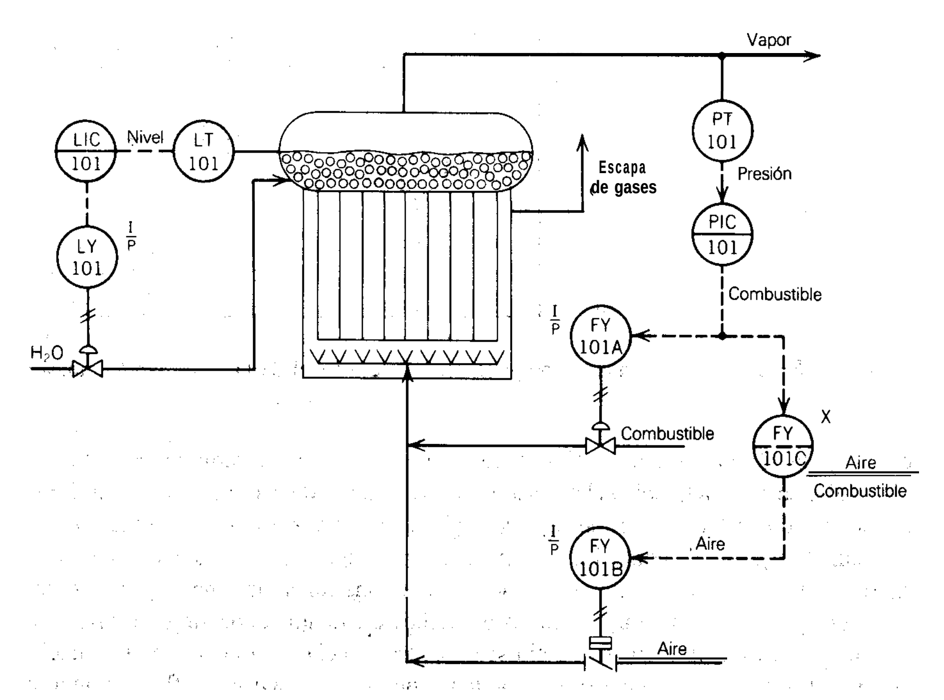


Figura 8-7. 'Control de posicionamiento paralelo con ajuste manual de la razón aire/combustible.

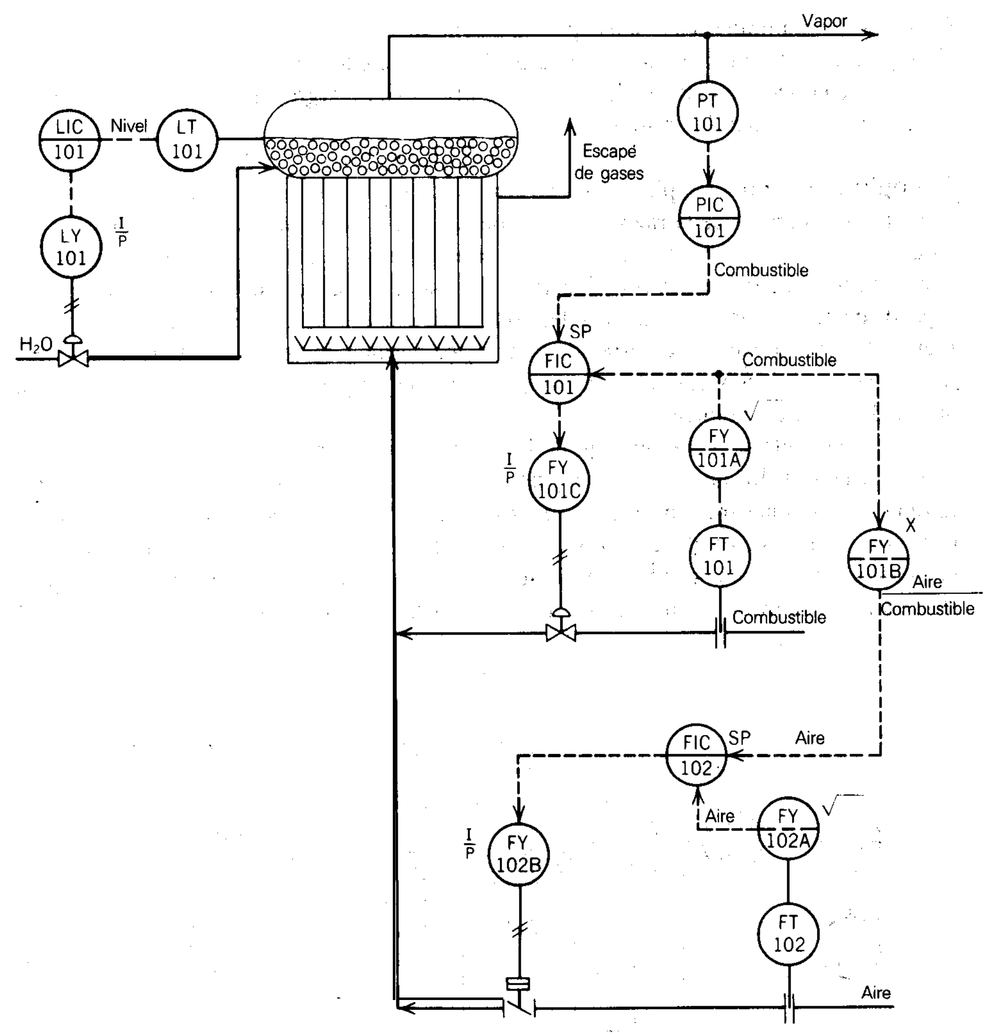


Figura **8-8.** Control de medición completa con ajuste manual de la razón **aire/combustible.**

se maneja **la válvula** de combustible para mantener la presión; **simultáneamente,** con el controlador se maneja también el regulador de aire a través de la estación de razón FY **101C;** asimismo, con dicha estación se fija la razón **aire/combustible** que se requiere.

Con el esquema de control que se muestra en la figura 8-7 no se mantiene realmente una razón de flujo **aire/combustible,** sino más bien una razón de señales para los elementos finales de control. El flujo a través de dichos elementos depende de estas señales y de la **caída** de presión a **través** de ellos; en consecuencia, con cualquier fluctuación de presión a través de la **válvula** o del regulador de aire, se cambia el flujo aunque no se cambie la abertura, y esto, a su vez, afecta al proceso. de combustión y a la presión

de vapor. En la figura 8-8 se muestra un esquema de un mejor control, que se conoce como control por medición completa(') y con el cual se evita este tipo de perturbaciones; la razón aire/combustible todavía se ajusta manualmente. En el esquema mencionado, el flujo de combustible se fija mediante el controlador de presión, y el de aire se raciona a partir del flujo de combustible. Cualquier perturbación en el flujo se corrige por medio de los circuitos de flujo.

Una extensión interesante de estos esquemas de control es la siguiente: puesto que el exceso de aire es tan importante para la operación económica de las calderas, se propone analizar los gases de escape, a los cuales se les conoce también como gases de combustión o desecho, para el exceso de O_2. La razón aire/combustible se puede ajustar o afinar con base en este análisis; en-la figura 8-9 se muestra este nuevo esquema de control, donde se aprecia un analizador transmisor, AT101, y un controlador, AIC101, con el cual se mantiene el exceso que se requiere de O_2 en los gases de escape, mediante la derivación (en FY101D) de la señal de la estación de razón, que es el punto de control, al controlador de flujo de aire. Otra forma posible de controlar el exceso de O_2 es permitir que la razón requerida se fije con AIC101; en este caso la salida de FY101A se multiplica por la señal de salida de AIC 101. En la figura 8-9 se ilustra tambitn la utilización de los limitadores de máximo y mínimo, FY101E y FY101F; estas dos unidades se utilizan principalmente por razones de seguridad, ya que con ellas se asegura que el punto de control del flujo de aire estará siempre entre un cierto valor superior e inferior prefijado.

En el esquema de control que aparece en la figura 8-8 el flujo de aire siempre sigue al flujo de combustible; esto es, con el controlador de presión se cambia primero el flujo de combustible y, entonces, el flujo de aire sigue al de combustible. En las industrias de proceso la forma más común para implementar el control de razón aire/combustible es por medio del método que se conoce como "control por limitación cruzada"; la implementación mencionada es de forma tal que, cuando la presión de vapor decrece y se requiere más combustible, primero se incrementa el flujo de aire y, posteriormente, le sigue el flujo de combustible;' cuando se incrementa la presión de vapor y se requiere menos combustible primero se decrementa el flujo de combustible y, enseguida el flujo de aire. Con esta estrategia de control se asegura que, durante los transitorios, la mezcla de combustible siempre se enriquezca con aire, con lo cual se logra la combustión completa y se minimiza la probabilidad de "humeo" de los gases de escape y cualquier otra condición peligrosa que resulte de las porciones de combustible puro que entren en la cámara de combustión. La implementación de esta estrategia es el tema de uno de los problemas de ejercicio al final del capítulo.

En esta sección se ilustraron dos aplicaciones del control de razón. Como se mencion6 al principio de esta sección, el control de razón es una técnica que se utiliza comúnmente en las industrias de proceso; es simple y fácil de aplicar. Junto con los principios del control de razón, también se ilustró en las aplicaciones la utilización de los relés de cómputo tales como los extractores de raíz cuadrada y los limitadores de máximo y mínimo. En el desarrollo y explicación de estos esquemas de control algunas veces se utilizaron más bloques de los que se requieren en la práctica real; en la figura 8-9 se muestra un ejemplo de esto. Los cálculos matemáticos que se hacen en FY101B y FY101D se

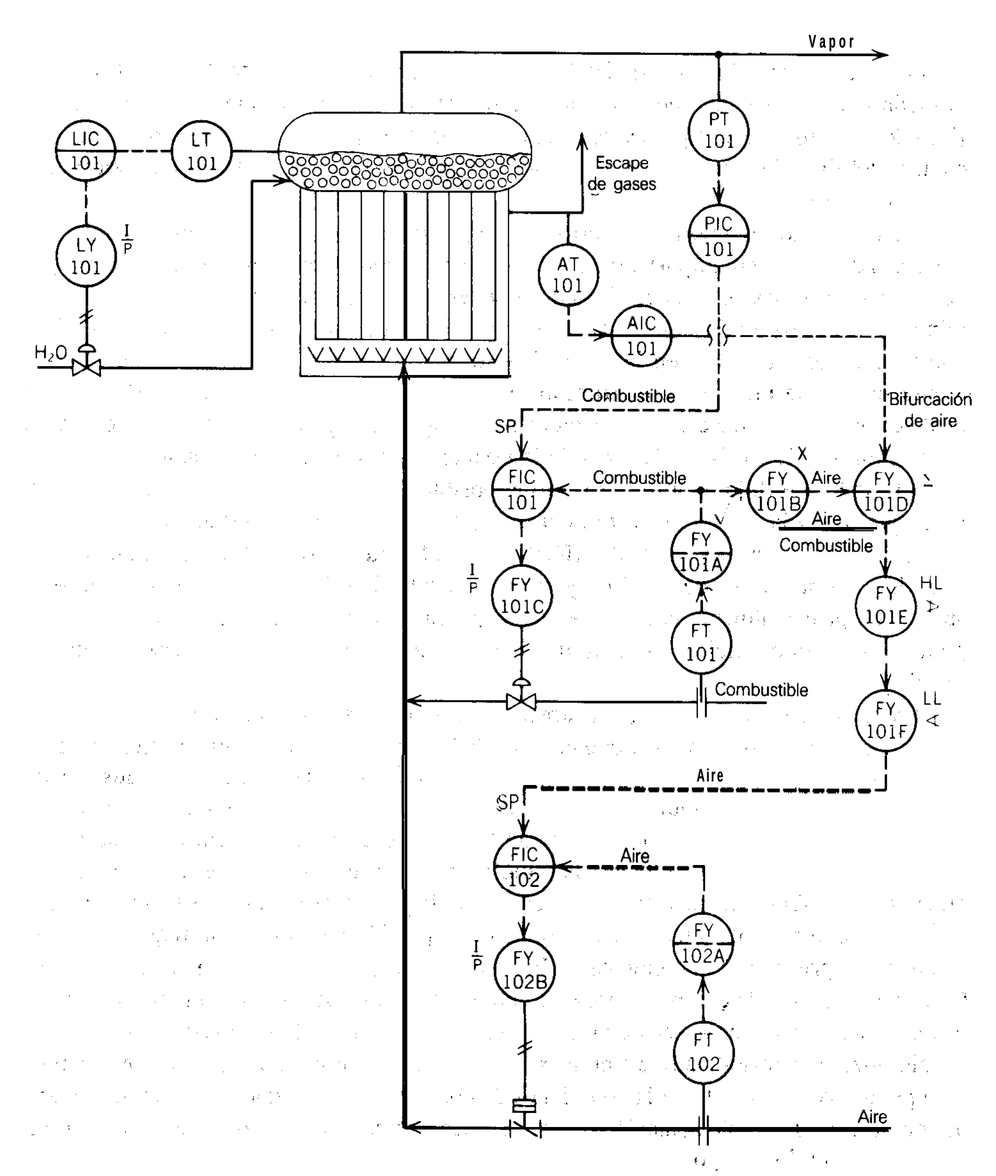


Figura 8-9. **Control** de medición completa con control **fino** del oxígeno.

pueden realizar totalmente en **FY101D**. Todo lo **que** se hace en el **primer relé, FY101B**, es multiplicar la señal por una constante; posteriormente, la **señal** resultante se suma a otra señal en el segundo relé, FY **101D,** y todo esto **se puede** ejecutar fácilmente con **un** solo sumador.

8-3. CONTROL EN CASCADA

El control en cascada es una técnica de control muy común, ventajosa y útil en las industrias de proceso; en esta sección se presentan. sus principios e implementación mediante dos casos prácticos. En la mayoría de los procesos 'se pueden encontrar ejemplos de sistemas de control en cascada.

Ejemplo 8-3. Se considera el proceso de regeneración catalítica@ que aparece en la tigura 8-10. En este proceso, como su nombre lo indica, se regenera el catalizador de un reactor químico. El catalizador se utiliza en un reactor donde se deshidrogena un hidrocarburo; después de un cierto período, el carbón (C) se deposita sobre el catalizador y lo contamina; cuando esto ocurre, el catalizador pierde su actividad y se debe regenerar. La etapa de regeneración consiste en qnemar el carbón que se deposita, para lo cual se sopla aire caliente sobre la capa de catalizador; el oxígeno del aire reacciona con el carbón para formar CO_2:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 \uparrow$$

Después de que se quema todo el carbón, el catalizador queda listo para ser utilizado nuevamente. Éste es un proceso por lotes, sin embargo, la quema del carbón puede tardar varias horas.

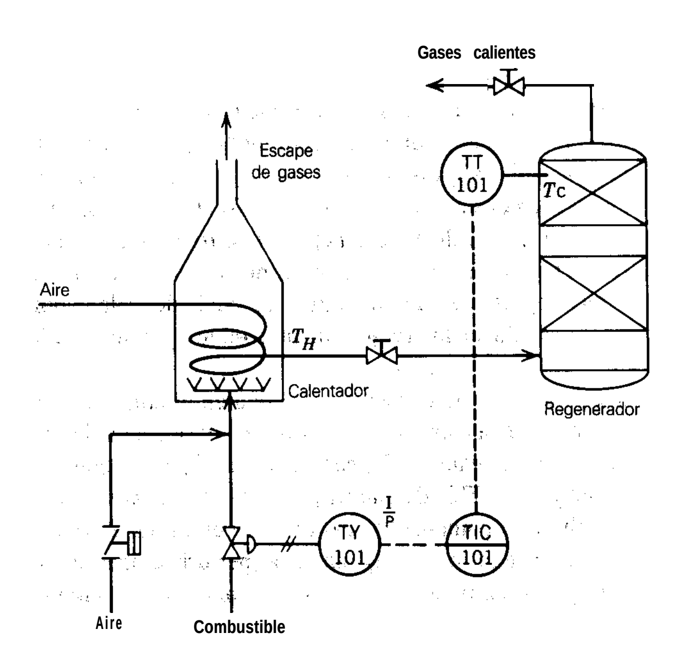


Figura 8-10. Sistema de regeneración de catalizador -control simple por retroalimentación.

Durante el proceso de regeneración del catalizador una variable importante que se debe controlar es la temperatura de la capa de catalizador, T_C. Con una temperatura muy alta se pueden destruir las propiedades del catalizador; por el contrario, con una temperatura baja el tiempo de combustión resulta largo. La temperatura de la capa se controla mediante el flujo de combustible que llega al calentador de aire (un horno pequeño), como se muestra en la figura 8-10; por razones de simplificación no se muestran los controles de la razón aire/combustible, y por lo mismo sólo se muestra un sensor de temperatura, aunque en la práctica se utilice como variable controlada un promedio de temperatura o la temperatura más alta en la capa. En la sección 8-5 aparece un ejemplo donde se elige la temperatura más alta como variable controlada.

A pesar de que el esquema de control mostrado en la figura 8-10 funciona, se debe reconocer que existen varios retardos de sistema en serie. En el calentador mismo se presentan retardos tales como los de la cámara de combustión y los de los tubos. En el regenerador puede haber una cantidad significativa de retardos en función del volumen y las propiedades del catalizador. Todos estos retardos del sistema dan lugar a un circuito de control por retroalimentación lento (constantes de tiempo grandes y tiempo muerto).

Si se supone que al calentador entra una perturbación tal como un cambio en la temperatura del aire que entra o un cambio en la eficiencia de la combustión, la temperatura con que sale el aire del calentador, T_H, se afecta con cualquiera de estas perturbaciones.- Al haber un cambio en T_H, eventualmente se tiene como resultado un cambio en la temperatura de la capa del catalizador. Con tantos retardos en el sistema, transcurre un tiempo considerable para que en el circuito de control se detecte un cambio en T_C. A causa de dichos retardos, en el circuito simple de control de temperatura se tenderá a sobrecompensar, de lo cual resulta un control ineficiente, cíclico y en general lento.

Un mejor método o estrategia de control es aplicar un sistema de control en cascada, como el que se muestra en la figura 8- ll. En este esquema de control se mide la temperatura T_H y se utiliza como una variable controlada intermedia; por lo tanto, el sistema consta de dos sensores, dos transmisores, dos controladores y un elemento final de control; de esta instrumentación resultan dos circuitos de control. Con uno de ellos se controla la temperatura con que sale el aire del calentador, T_H; con el otro se controla la temperatura de la capa de catalizador, T_C. De las dos variables controladas, la temperatura de la capa de catalizador es la más importante; la temperatura de salida del calentador sólo se utiliza como una variable para satisfacer los requerimientos de temperatura de la capa de catalizador .

La forma en que funciona este esquema es la siguiente: con el controlador TIC101 se supervisa la temperatura de la capa de catalizador, T_C, y se decide la forma de manejar la temperatura de salida del calentador, T_H, para mantener T_C en el punto de control. Esta decisión se envía al controlador TIC 102 en forma de un punto de control; este controlador manipula entonces el flujo de combustible para mantener T_H en el valor requerido por TIC101 . Si en el calentador se introduce alguna de las perturbaciones que se mencionaron anteriormente, T_H se desvía del punto de control y se inicia una acción correctiva en el controlador TIC102, *antes de que cambie* T_C. Lo que se hace es dividir el retardo total del sistema en dos, para compensar las perturbaciones antes de que se afecte a la variable controlada primaria.

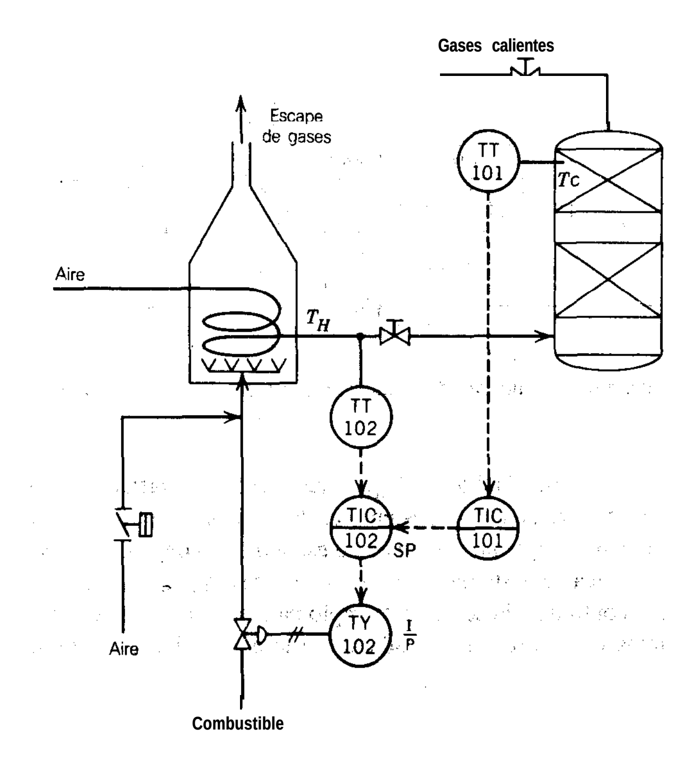


Figura 8-11. Sistema para regenerar un catalizador -control en cascada.

En general, el controlador con que se controla a la variable controlada principal, TIC101 en este caso, se conoce como controlador maestro, controlador externo o controlador principal. Al controlador con que se controla a la variable controlada secundaria generalmente se le conoce como controlador esclavo, controlador interno o controlador secundario. Comúnmente se prefiere la terminología de primario/secundario, porque para sistemas con más de dos circuitos en cascada la extensión se hace de manera natural.

La consideración *más* importante al diseñar un sistema de control en cascada es que el circuito interno o secundario *debe* ser más rápido que el externo o primario, lo cual es un requisito lógico. Esta consideración se puede'extender a cualquier cantidad de circuitos en cascada; en un sistema con tres circuitos en cascada, el circuito terciario debe ser más rápido que el secundario, y éste debe ser más rápido que el primario.

Ahora se estudiará la representación en diagrama de bloques de un sistema de control en cascada, lo cual ayudará a entender más esta estrategia tan importante. En la figura 8-12 se muestra la representación en diagrama de bloques para el circuito de control por retroalimentación que se ilustra en la figura 8-10; se eligieron funciones de transferencia simples para representar al sistema. En la figura 8-13 aparece el diagrama de bloques del sistema en cascada que se ilustra en la figura 8-11; como se aprecia en este último diagrama, en el circuito secundario se empieza a compensar cualquier perturbación, o

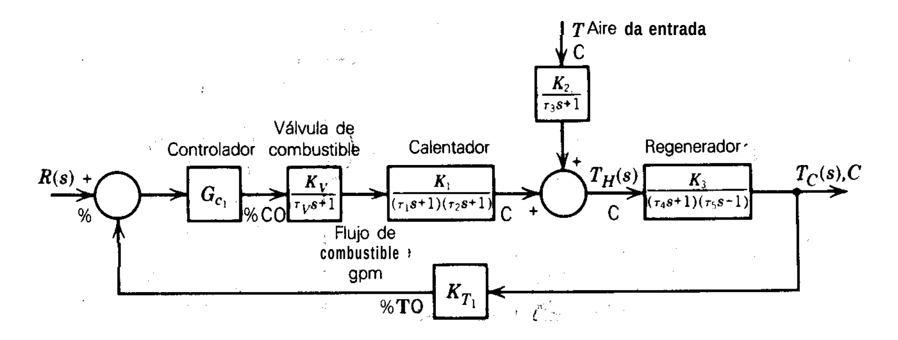


Figura 8-12. Diagrama de bloques del sistema de la figura 8-10.

sea, la temperatura de entrada del aire, $T_{\text{ent aire}}$, que afecta a la variable controlada secundaria, T_H, antes de que su efecto se resienta en la variable controlada primaria, T_C.

Se notará que, con la implementación de un esquema de control en cascada, se cambia la ecuación característica del sistema de control de proceso y, en consecuencia, se modifica la estabilidad. A continuación se da un ejemplo para estudiar el efecto de la implementación de un sistema de control en cascada sobre la estabilidad total del circuito. Sean

$\tau_V = 0.2$ min $\quad K_V = 3$ gpm/%CO $\quad K_1 = 1$ C/gpm

$\tau_1 = 3$ min $\quad \tau_2 = 1$ min $\quad K_3 = 0.8$ C/C

$\tau_4 = 4$ min $\quad \tau_5 = 1$ min $\quad K_{T_1} = 0.5$ %TO/C

$K_{T_2} = 0.5$ %TO/C

Se Supone que todos los controladores son proporcionales.

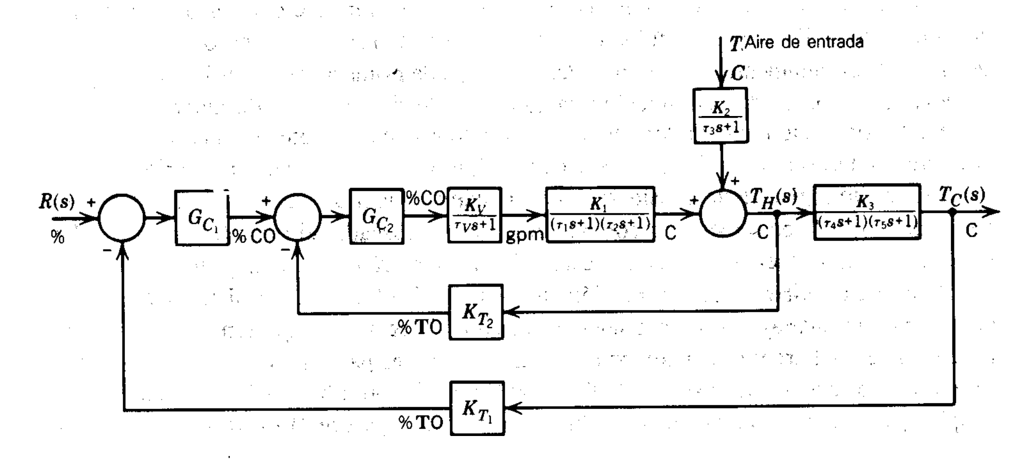


Figura 8-13. Diagrama de bloques del sistema de la figura 8-11.

Se aplica el método de substitución directa que se expuso en el capítulo 6, o las técnicas de respuesta en frecuencia que se expusieron en el capitulo 7, al circuito de control por retroalimentación que aparece en la figura 8-12, para obtener

$$K_{cu_1} = 4.33 \ \%CO/\%TO \qquad y \qquad \omega_u = 0.507 \text{ ciclos/min}$$

donde el porcentaje de salida del transmisor se designa con %TO, y el de la salida del controlador, con %CO.

Para determinar la ganancia y frecuencia últimas del controlador primario del esquema en cascada, primero se debe obtener el ajuste del controlador secundario, lo cual se puede hacer mediante la determinación de la ganancia última del circuito interno de la figura 8-13.

$$K_{cu_2} = 17.06 \ \%CO/\%TO$$

y se utiliza la proposición de Ziegler-Nichols

$$K_{C_2} = 0.5K_{cu_2} = 8.53 \ \%CO/\%TO$$

Se utiliza el álgebra de diagramas de blosques para reducir el circuito secundario a un solo bloque, como se muestra en la figura 8-14 (el lector debe verificar. la veracidad de esto). Con base en este diagrama de' bloques se determina lo siguiente:

$$K_{cu_1} = 7.2 \ \%/\% \qquad Y \qquad \omega_u = 1.54 \text{ ciclos/min}$$

Al comparar los resultados se observa que en el esquema de control en cascada la ganancia última o límite de estabilidad es más grande **(7.2%CO/%TO** VS **4.33%C/%TO)** que en el circuito de control por **retroalimentación** sencillo. **También** la frecuencia última

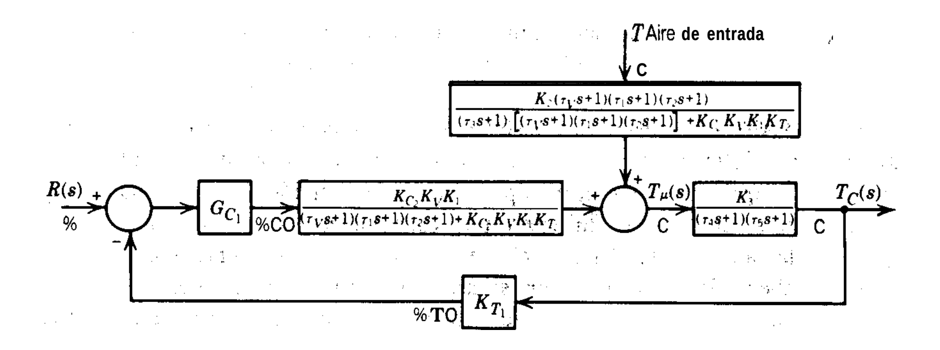


Figura 8-14. Reducción del diagrama de bloques de la figura 8-13.

es más grande en el control en cascada (1.54 cicloslmin VS 0.507 cicloslmin), lo cual indica que la respuesta del proceso es más rápida.

En general, cuando se aplica correctamente el control en cascada, se logra que todo el circuito de control sea más estable y de respuesta más rápida. Los métodos de análisis son los mismos que para los circuitos simples; primero, el circuito interno se reduce a un solo bloque mediante el álgebra de diagramas de bloques y, a partir de ahí, se sigue el procedimiento igual que antes.

Aún quedan dos preguntas: cómo poner el diagrama de cascada en operación automática y cómo ajustar los controladores. La respuesta a ambas es la misma: de adentro hacia afuera; es decir, primero se ajusta el circuito más interno y se pone en automático, mientras que los otros quedan en manual; posteriormente se continúa hacia afuera de la misma manera. Para el proceso que se muestra en la figura 8-11, primero se ajusta TIC102 y se pone en automático, mientras TIC101 queda en manual. Si se hace lo inverso, es decir, se pone primero TIC101 en automático, no ocurre nada, porque TIC102 no es capaz de responder a los requerimientos (punto de control) de TIC101 ; lo que puede suceder es que, si TIC101 tiene acción de reajuste, se pueda reajustar en exceso, ya que su salida no tendrá efecto sobre la variable que se controla; esto es, el. circuito esta abierto. Por lo anterior, si en un esquema de cascada cualquier controlador tiene acción de reajuste, se debe agregar protección contra el reajuste excesivo para evitar este problema.

Naturalmente, en los circuitos en cascada el ajuste de los controladores es más complejo que en los sencillos. En los párrafos anteriores se mostró la forma de determinar la ganancia última y el período último para cada circuito; una vez que se obtienen estos términos es posible utilizar el método de Ziegler-Nichols para ajustar los controladores. Sin embargo, el lector debe recordar que se requiere un mínimo de tres retardos o cierta cantidad de tiempo muerto para que en un circuito de control por retroalimentación exista una ganancia última. Los métodos de ajuste para circuito sencillo del capítulo 6 también se pueden aplicar a cada circuito, después de que se ajusta el o los circuitos internos. Se puede obtener la curva de reacción del proceso de cada circuito, pero siempre se debe hacer después de ajustar los circuitos internos; sin embargo, a causa de la interacción entre los circuitos, la curva del proceso puede oscilar, lo cual ocasiona que sea difícil determinar la dinámica del laxo, τ y t_0, y, por lo tanto, los resultados que se obtienen con las fórmulas de ajuste del capítulo 6 pueden no ser satisfactorios en algunos sistemas de control en cascada. La mejor recomendación es tener cuidado y utilizar el sentido común. Un sistema en cascada bien ajustado puede ser muy ventajoso.

Ejemplo 8-4. Ahora se considera el sistema de control para el intercambiador de calor que aparece en la figura 8-15. En este sistema la temperatura con que sale el líquido que se procesa se controla mediante la manipulación de la posición de la válvula de vapor. Se notará que no se manipula el flujo de vapor, éste depende de la posición de la válvula de vapor y de la caída de presión a través de la válvula; si se presenta una elevación de presión en la tubería de vapor, es decir, si la presión se incrementa antes de la válvula, se cambia el flujo de vapor; esta perturbaciónse puede compensar por medio del circuito de control de temperatura que se ilustra, únicamente después de que la temperatura del proceso se desvía del punto de control.

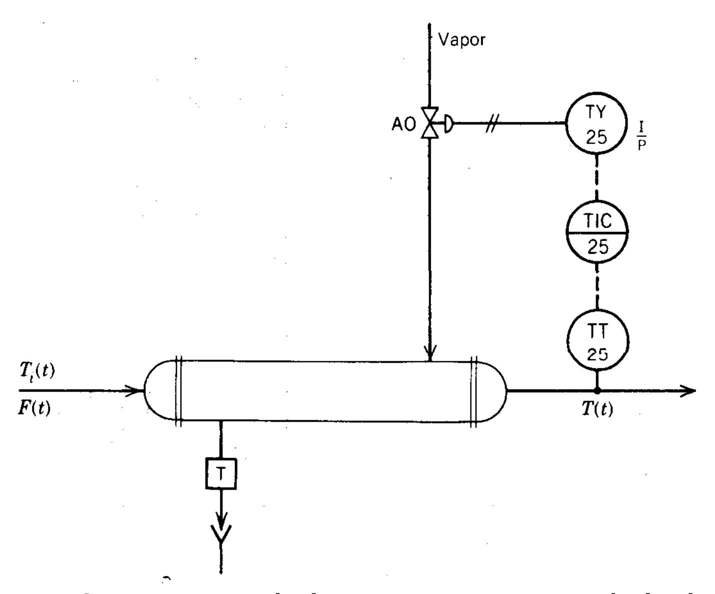
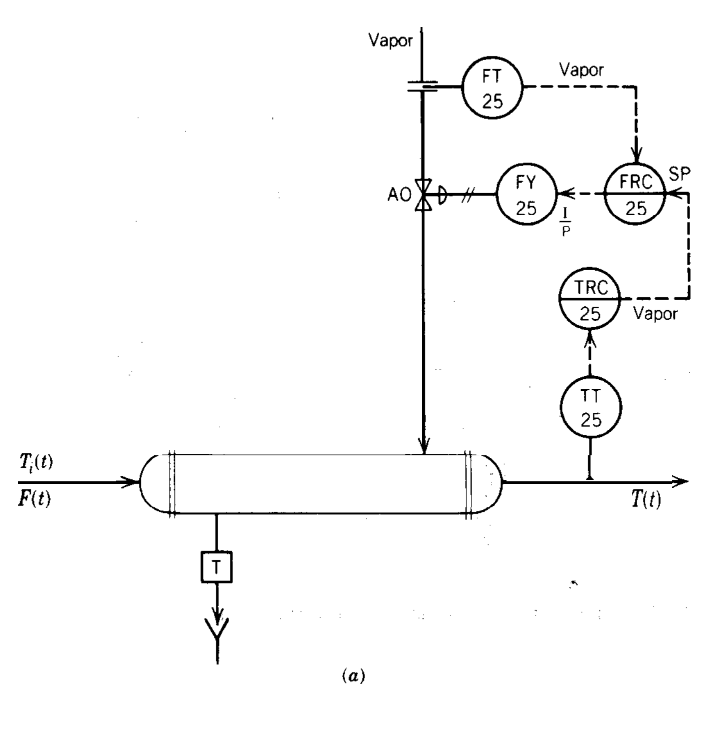


Figura 8-15. Circuito para controlar la temperatura en un intercambiador de calor.

En la figura 8-16 se muestran dos esquemas en cascada con que se puede controlar esta temperatura cuando los cambios en la presión de vapor son importantes. En la figura **8-16*a*** se muestra un esquema de cascada en el que se añadió un circuito de flujo; el punto de control del controlador de flujo se reajusta con el controlador de temperatura, ahora cualquier cambio en el flujo se compensa por medio del circuito de flujo. El significado físico de la señal que sale del controlador de temperatura es el flujo de vapor que se requiere para mantener la temperatura en el punto de control. Con el esquema de cascada que aparece en la figura **8-16*b*** se logra el mismo control, pero ahora la variable secundaria es la presión de vapor en el casquillo del intercambiador; cualquier cambio en el flujo de vapor afecta rápidamente la presión en el casquillo, y cualquier cambio de presión se compensa entonces mediante el circuito de presión. Con el circuito de presión también se compensa cualquier perturbación en el contenido calorífico del vapor (calor latente), ya que la presión en el casquillo se relaciona con la temperatura de condensación y, por lo tanto, con la razón de transferencia de calor en el intercambiador. Si se puede instalar un sensor de presión en el intercambiador, entonces la implementación de este último esquema se hace menos costosa, ya que no se requiere un orificio con sus respectivas guarniciones, lo cual puede resultar caro. Ambos esquemas en cascada son comunes en las industrias de proceso. ¿Puede decir el lector con cuál de los dos esquemas se logra la mejor respuesta inicial a los disturbios de la temperatura de entrada al proceso, $T_i(t)$?

Antes de concluir esta sección es importante mencionar algunas palabras acerca de la acción de los controladores de un sistema en cascada. En el esquema que se ilustra en la figura **8-16*a*** el controlador de flujo es de acción inversa, lo cual se decide de la misma manera que se estudió en el capítulo 5; es decir, por los requerimientos del proceso



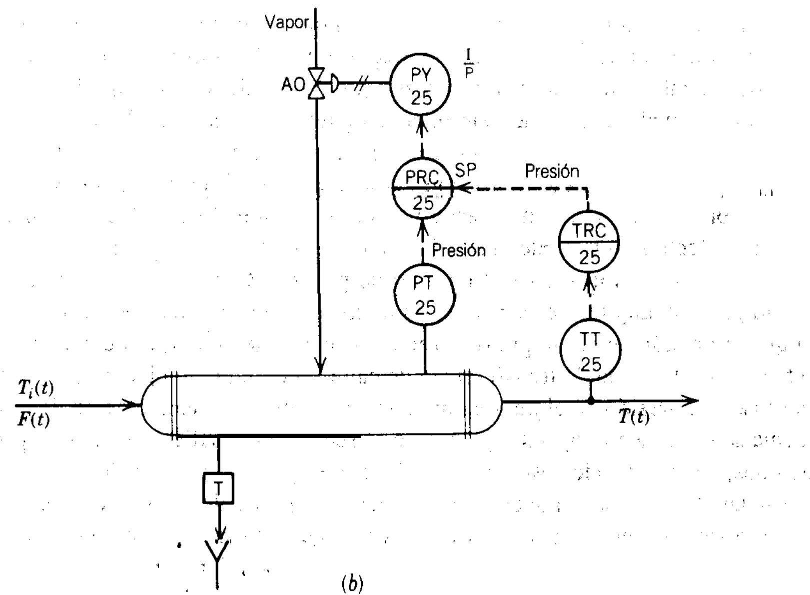


Figura 8-16. Aplicación del esquema de control en cascada al control de temperatura de un intercambiador de calor.

y la acción de la válvula de control. El controlador de femperatura también es de acción inversa; esta decisión se toma con base en los requerimientos del proceso, esto es, si se incrementa la temperatura de salida, entonces se requiere que el flujo de vapor se decremente y, por lo tanto, se debe disminuir la salida del controlador de temperatura hacia el controlador de flujo.

Finalmente, otro ejemplo muy simple de un sistema de control en cascada es el del posicionador de una válvula de control, el cual actúa como el controlador interno en el esquema de cascada. Los posicionadores se tratan en el apéndice C.

8-4. CONTROL POR ACCIÓN PRECALCULADA

En esta sección se presentan los principios y aplicación de uno de los esquemas de control más ventajosos: el control por acción precalculada. En los capítulos anteriores se examinaron las ventajas del control por retroalimentación, técnica muy simple con la que se compensa cualquier perturbación que afecte a la variable controlada. Cada vez que entran al proceso diferentes perturbaciones $(D_1, \ldots, D_n)$, la variable controlada se desvía del punto de control; en el sistema de control por retroalimentación esto se compensa mediante la manipulación de otra entrada al proceso, la variable manipulada, como se muestra en la figura 8-17. En el capítulo 6 se estudió la forma de ajustar los sistemas de control por retroalimentación y cómo se comportan éstos bajo condiciones difíciles.

Como se vio en los capítulos anteriores, la principal desventaja de los sistemas de control por retroalimentación es que, para compensar la entrada de perturbaciones, la variable controlada se debe desviar del punto de control. En el control por retroalimentación se actúa sobre un error entre el punto de control y la variable controlada, lo cual significa que, una vez que un disturbio entra al proceso, se debe propagar a lo largo de todo el proceso y forzar a que la variable controlada se desvíe del punto de control *antes* de que se emprenda una acción correctiva para compensar la perturbación. Entonces,, el control perfecto, que se define como aquel donde no hay ninguna desviación de la variable controlada respecto al punto de control a pesar de que existan disturbios, no se puede lograr con el control por retroalimentación.

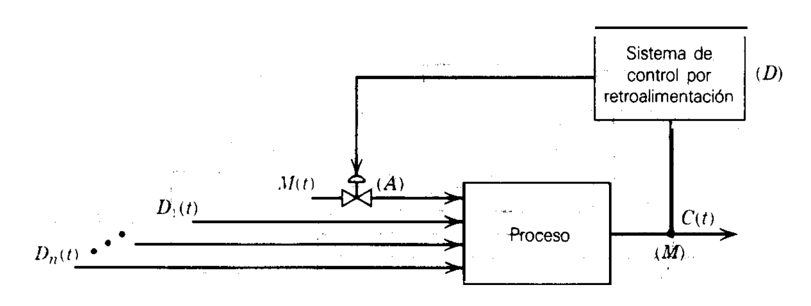


Figura 8-17. Control por retroalimentación.

En muchos procesos se puede tolerar una desviación temporal de la variable controlada, sin embargo, existen otros en los que dicha desviación se debe minimizar en tal cantidad que con el solo control por retroalimentación no se puede obtener el desempeño de control requerido. Para estos casos puede ser muy útil el control por acción precalculada.

En el control por acción precalculada las perturbaciones se compensan *antes* de que se afecte a la variable controlada. Específicamente, en este tipo de control se miden los disturbios antes de que entren al proceso y se calcula el valor que se requiere de la variable manipulada para mantener la variable controlada en el valor que se desea o punto de control. Si los cálculos se realizan de manera correcta, la variable controlada debe permanecer sin perturbaciones. En la figura 8-18 se ilustra el concepto de control por acción precalculada[3].

Ahora, mediante el ejemplo de un proceso se enumeran los diferentes pasos que se necesita seguir para diseñar un sistema de control por acción precalculada.

Ejemplo de un proceso

Se considera la simulación del proceso que se muestra en la figura 8-19. En este proceso se mezclan flujos diferentes en un sistema de tres tanques; en el tanque 1 se mezclan las corrientes $q_5(t)$ y $q_1(t)$; el desborde de. este tanque pasa al tanque 2, donde se mezcla con la corriente $q_2(t)$, y el desborde del tanque 2 fluye al tanque 3, donde se mezcla con la corriente $q_7(t)$. En este proceso se requiere controlar la fracción de masa (fm) del componente A, $x_6(t)$, en la corriente que sale del tanque 3. En este proceso la variable manipulada es el caudal $q_1(t)$; el flujo y las fracciones de masa de todas las otras corrientes son posibles perturbaciones. En la tabla 8-4 se presentan los datos del proceso y los valores de estado estacionario de todas las variables. En la figura 8-20*a* se muestra la respuesta de la variable controlada a un cambio en la corriente $q_2(t)$ de 1000 gpm a 1500 gpm; se utiliza un controlador por retroalimentación PI con ajuste óptimo. Se considera que en este proceso la mayor perturbación es $q_2(t)$. Ahora se verá cómo utilizar las técnicas de acción precalculada para mejorar este control y minimizar la desviación de $x_6(t)$.

El primer paso para diseñar un sistema de control por acción precalculada es desarrollar un modelo matemático de estado estacionario del proceso; dicho modelo es una ecua-

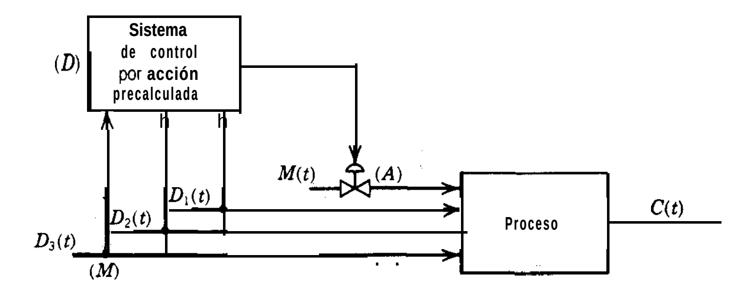


Figura 8-18. Control por acción precalculada.

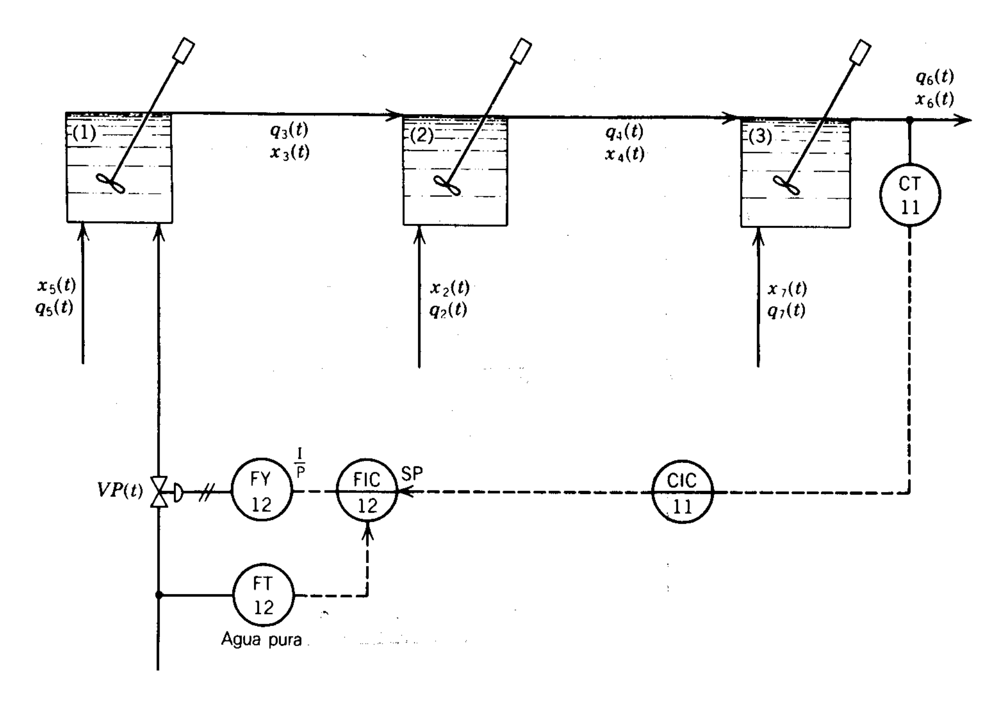


Figura 8-19. Ejemplo de un proceso.

Tabla 8-4. **Información** del **proceso y** valores de estado estable.

Información

Volumen de los tanques: $V_1 = V_2 = V_3 = 7000$ gal

Rango del transmisor de **concentración:** 0.3 a 0.7 fracciones de masa

Las características de la válvula de control son lineales, y se puede considerar que la caída de **presión** a **través** de la misma es constante.

El rango del transmisor de flujo, $q_1(t)$, es de 0 a 3800 gpm. La dinámica del transmisor y de la **válvula** se puede considerar despreciable.

También se puede suponer que la densidad de todas las corrientes es similar.

	Valores de estado estacionario	
Corriente	***Flujo,*** *gpm*	*Fracción de masa (fm)*
1	1900	0.0000
2	1000	0.9900
3	2400	0.1667
4	3400	0.4088
5	500	0.8000
6	3900	0.4718
7	500	0.9000

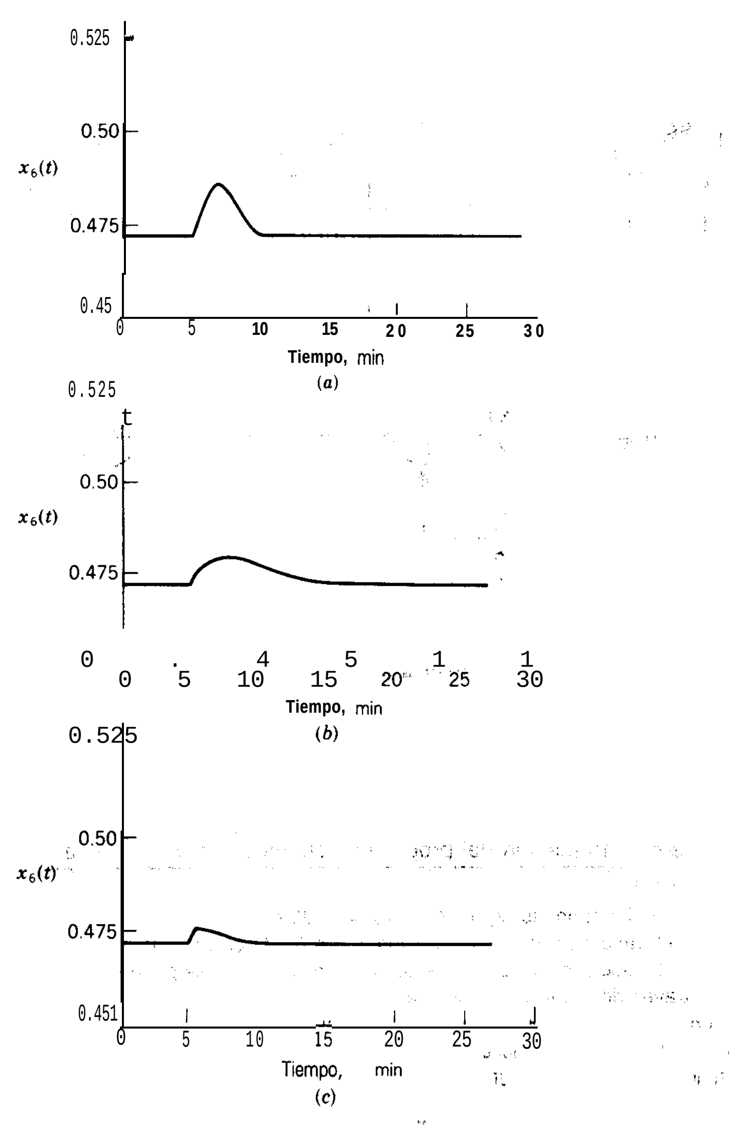


Figura 8-20. Respuesta de $x_6(t)$ a un cambio en el flujo $q_2(t)$ de **1000 gpm** a 1500 gpm.

ción mediante la cual se relaciona la variable **manipulada** con la variable controlada **y** las perturbaciones. En este ejemplo, la variable manipulada es la corriente $q_1(t)$, la variable controlada es $x_6(t)$, y se supone que $q_2(t)$ es el ***disturbio** mayor.* Es importante comprender este último punto; el control por acción precalcuhda se utiliza para compensar los disturbios mayores, es decir, aquellos que ocurren más frecuentemente y ocasionan grandes desviaciones en la variable controlada; generalmenté, la **instrumentación** y los recursos de

ingeniería no justifican la compensación de perturbaciones menores por'medio de la acción precalculada. Posteriormente se tratará la compensación de las perturbaciones menores.

El modelo que se requiere de este proceso se obtiene mediante la aplicación del balance de masas al proceso. Al escribir el balance de masa de estado estacionario en todo el proceso, se tiene

$$\bar{q}_5\rho + q_1(t)\rho + q_2(t)\rho + \bar{q}_7\rho \quad q_6(t)\rho = 0$$

En esta ecuación se utilizaron los valores'de estado estacionario de las corrientes $q_5(t)$ y $q_7(t)$ porque se consideran perturbaciones menores. El término ρ es la densidad, masa/gal, de las corrientes, la cual se considera que es la misma para todas las corrientes, por lo tanto

$$q_1(t) = q_6(t) - q_2(t) - \bar{q}_5 - \bar{q}_7$$

o

$$q_1(t) = q_6(t) - q_2(t) - 1000 \tag{8-10}$$

Con el balance de estado estacionario del componente A en todo el proceso se obtiene otra relación que se necesita:

$$\bar{q}_5\bar{x}_5 + q_2(t)\bar{x}_2 + \bar{q}_7\bar{x}_7 - q_6(t)x_6(t) = 0 \tag{8-11}$$

En esta ecuación se utilizaron los valores de estado estacionario de las fracciones de masa $\bar{x}_5$, $\bar{x}_7$ y $\bar{x}_2$ porque también se consideran disturbios menores. De esta última ecuación se tiene

$$q_6(t) = \frac{1}{x_6(t)}[\bar{q}_5\bar{x}_5 + \bar{q}_7\bar{x}_7 + \bar{x}_2 q_2(t)]$$

o

$$q_6(t) = \frac{1}{x_6(t)}[850 + 0.99q_2(t)] \tag{8-12}$$

Se substituye la ecuación (8-12) en la (8-10) y se obtiene

$$q_1(t) = \frac{1}{x_6^{\text{fijo}}}[850 + 0.99q_2(t)] - q_2(t) - 1000 \tag{8-13}$$

En esta ecuación se remplazó el término $x_6(t)$ por x_6^{fijo}; mediante esta substitución se calcula el valor de $q_1(t)$ que se requiere para forzar $x_6(t)$ al punto de control x_6^{fijo}.

En la ecuación (8- 13) se relaciona la variable manipulada con la perturbación mayor y la variable controlada; la (8-13) es la ecuación que se debe'implenientar para él control y

constituye lo que se denomina "controlador por acción precalculada". Mediante la solución de dicha ecuación se determina en el controlador el flujo $q_1(t)$ que se requiere para un cierto flujo de perturbación $q_2(t)$ y un cierto punto de control, x_6^{fijo}.

Antes de implementar el controlador por acción precalculada es conveniente revisar la ecuación, esto es, se substituye el valor de estado estacionario de la perturbación, $\bar{q}_2 = 1000$ gpm, y la variable controlada, $\bar{x}_6 = 0.4718$ fm, con lo que se obtiene un flujo de

$$\bar{q}_1 = 1900 \text{ gpm}$$

el cual es el flujo correcto de estado estacionario y, por lo tanto, se puede tener confianza en el controlador.

En la figura 8-21 se muestra la implementación del sistema de control por acción precalculada; el controlador por acción precalculada propiamente dicho se implementa con FT11, HIC11, FY 11A y FY 11B. La instrumentación que se utiliza es la que aparece en la tabla 8-3, aun cuando se utilice la convención de señal eléctrica. Se observará que el punto de control que se requiere, x_6^{fijo}, se genera en HIC 11; en esta unidad se genera una señal que el operador fija manualmente y que se relaciona con el punto de control; es decir, el valor inferior del rango de la señal es igual al valor inferior del rango del transmisor de concentración, 0.3 fm. El valor superior del rango de la señal es igual a 0.7 fm y,

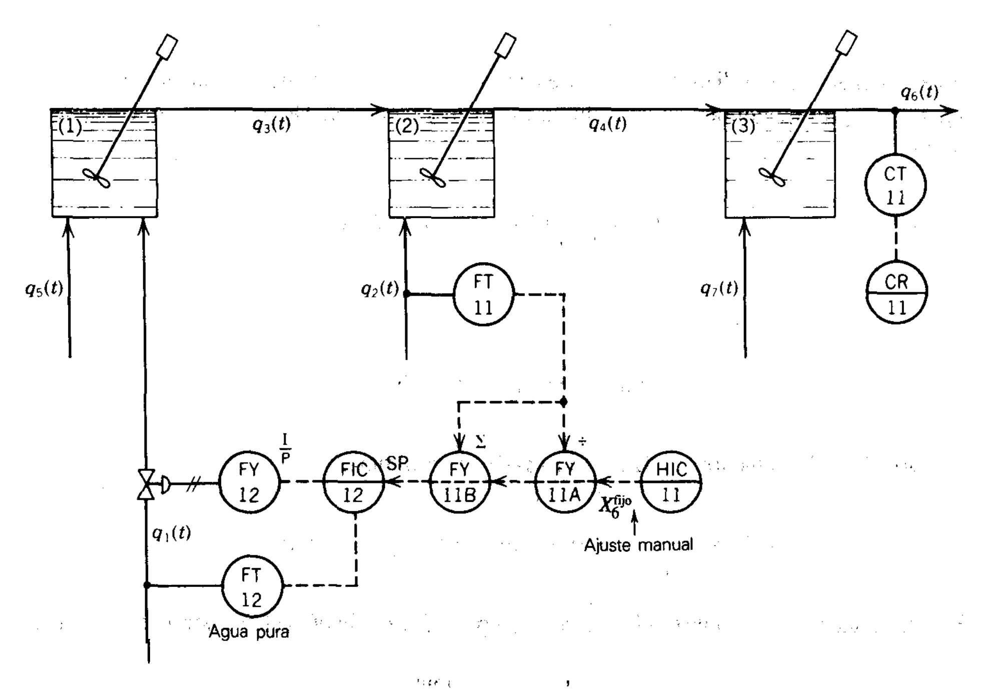


Figura 8-21. Esquema de estado estacionario del control por acción precalculada.

en consecuencia, el operador puede ajustar el punto de control. Este esquema de control se denomina "control por acción precalculada de estado estacionario".

En la figura **8-20*b*** se muestra la respuesta de un proceso donde se utiliza control por acción precalculada en estado estacionario a un cambio en la corriente $q_2(t)$ de 1000 gpm a 1500 gpm; esta figura se puede comparar con. la **8-20*a*** para apreciar la mejoría que se obtiene con la implementación del control con **acción** precalculada. En la curva. de respuesta se aprecia **aun** que la variable controlada no permanece constante (como se esperaba) sino que más bien se observa un error transitorio, el cual se presenta porque existe un desbalance dinámico entre los efectos de la **perturbación**, $q_2(t)$, y la variable manipulada, $q_1(t)$, sobre la variable controlada, $x_6(t)$; es **decir, la** respuesta de la composición de salida es más rápida para un cambio en la corriente $q_2(t)$ que para un cambio en la corriente $q_1(t)$. Uno de los objetivos del control por acción precalculada debe ser establecer un balance de la variable manipulada contra la perturbación, Es deseable hacer más rápida la respuesta de $x_6(t)$ a un cambio en $q_1(t)$, ya que es más lenta que la respuesta a un cambio en $q_2(t)$, lo cual se puede lograr si se utiliza una "unidad de **adelanto/retardo**". Las unidades de **adelanto/retardo** se presentan en la siguiente **subsección.** En la figura 8-22 se muestra el esquema del control después de instalar la unidad de **adelanto/retardo**; a dicho esquema se le conoce como "control por acción precalculada con compensación **dinámica**''. En la figura **8-20*c*** aparece la respuesta del proceso a un cambio en $q_2(t)$ de 1000 gpm a 1500 gpm; se notara que el error transitorio se reduce significativamente;

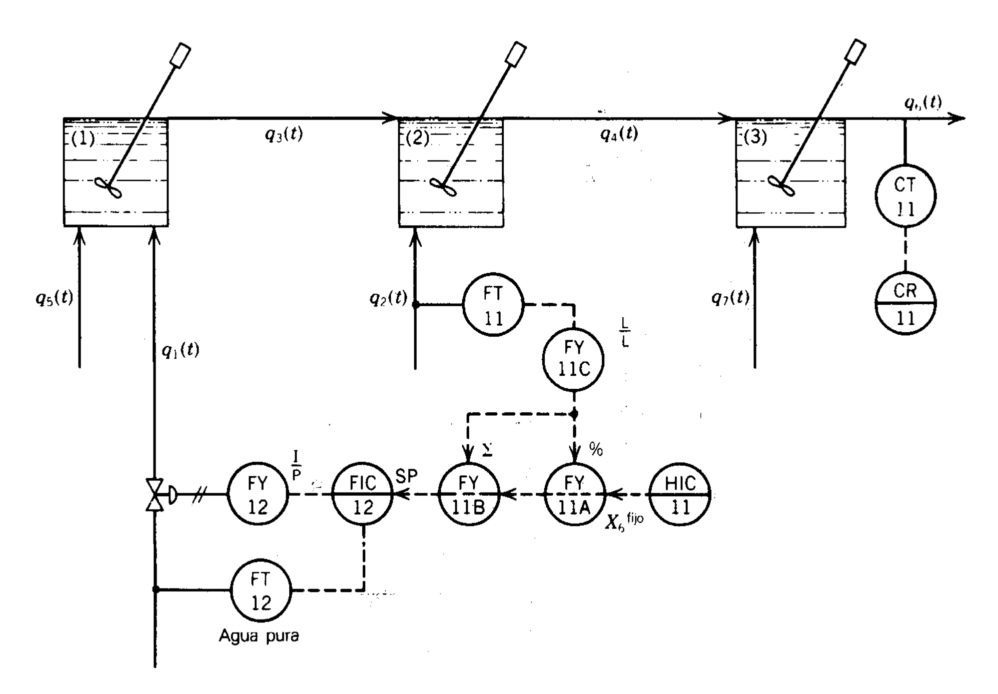


Figura **8-22.** Control por **acción precalculada** con compensación dinámica.

no se logra el balance perfecto, sin embargo, se alcanza una mejoría notable sobre la respuesta no compensada.

La mejoría de la acción precalculada con compensación dinámica sobre la acción precalculada de estado estacionario se debe a los diferentes modos en que responde la variable manipulada, $q_1(t)$, en cada caso. En la figura. 8-23*a* se muestra la forma en que responde $q_1(t)$ a un cambio en $q_2(t)$, lo cual está determinado por el controlador por acción precalculada, ecuación (8-13). En la figura 8-23*b* se muestra cómo responde $q_1(t)$ a un cambio en $q_2(t)$ cuando se instala la unidad de adelanto/retardo; inicialmente, $q_1(t)$ cambia en una cantidad superior a. la que se necesita para la compensación de estado estacionario, y posteriormente decae exponencialmente hasta el valar final de estado estacionario. Debido a que reacciona en esta forma,. se dice que $q_1(t)$ tiene más "fuerza" para mover la variable controlada más rápido. Este tipo de respuesta de $q_1(t)$ a un cambio en $q_2(t)$ se debe a la unidad de adelanto/retardo.

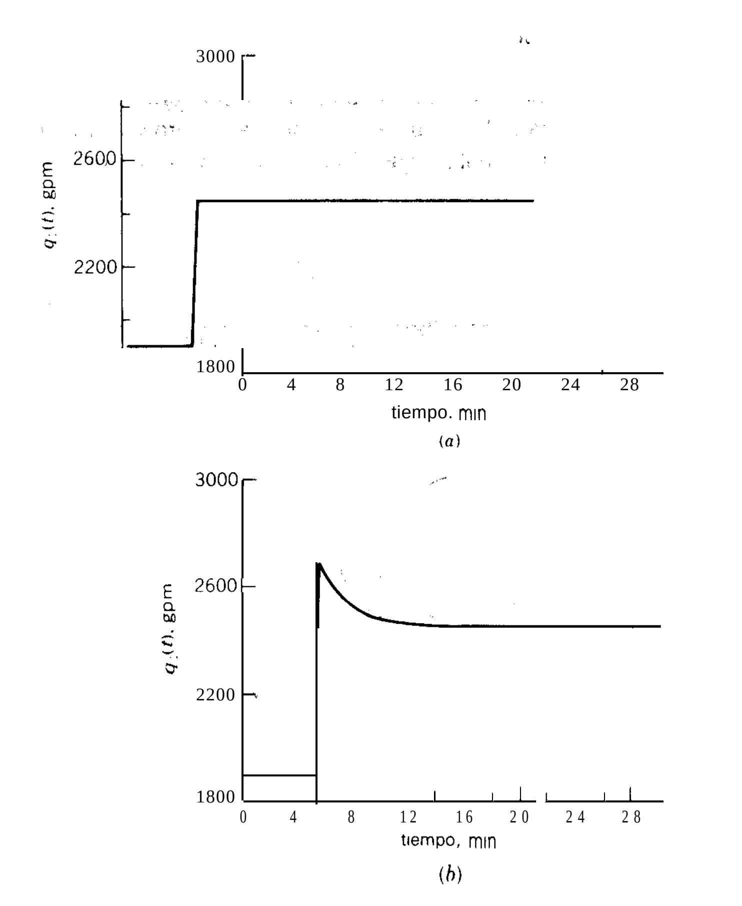


Figura 8-23. Respuesta de la variable manipulada sin y con compensación dinámica.

En este momento es importante mencionar que los "ajustes" de la unidad de adelanto/retardo son generalmente empíricos, pero también se pueden obtener analíticamente mediante un análisis matemático en detalle. Posteriormente, en esta sección se dedica un espacio a la explicación de la operación de la unidad de adelanto/retardo y la forma de obtener la información para el ajuste de la unidad.

Antes de proceder con este ejemplo es importante mencionar que no se requiere compensación dinámica en todos los esquemas con acción precalculada y, por lo tanto, se recomienda que, al implementar inicialmente un control con acción precalculada, se pruebe primero la porción de estado estacionario; si se presentan errores transitorios, entonces se necesita compensación dinámica y el ingeniero tiene justificación para implementarla. Ciertamente, con el juicio de ingeniería se puede tener una indicación acerca de la posibilidad de algún error transitorio o no. En el ejemplo presente, la perturbación entra más cerca de la variable controlada que de la variable manipulada; esto es, existe una constante de tiempo (tanque) menos entre la variable controlada y la perturbación que entre la variable controlada y la manipulada, por lo tanto, no debe sorprender que exista un error transitorio, cuya magnitud depende de la diferencia entre los efectos dinámicos.

En el esquema de control por acción precalculada que se implementó hasta ahora sólo se compensan los cambiosen $q_2(t)$, ya que en el desarrollo del controlador se supuso que la única perturbación mayor es $q_2(t)$ y que las demás entradas al proceso son perturbaciones menores; es decir, en estas entradas no hay mucho cambio, o no con la suficiente frecuencia como para justificar el esfuerzo y el capital que se necesitan para compensarlas; en consecuencia, si alguno de estos disturbios entra al proceso, no se compensara mediante el esquema de control que aparece en la figura 8-22, y entonces resultará una desviación de la variable controlada. Como ejemplo, en la figura 8-24*a* se muestra la respuesta del esquema de control por acción precalculada que aparece en la figura 8-22 cuando $q_7(t)$ cambia de 500 gpm a 600 gpm, la variable controlada alcanza un nuevo valor y permanece ahí; en el esquema de control no hay compensación para esta perturbación. Una manera simple de corregir tal desviación es cambiar manualmente la salida de HIC ll ; esto es, cuando el operador se da cuenta de que a la salida la composición está arriba del punto de control, toma la decisión de incrementar el caudal de agua pura, lo cual se hace fácilmente disminuyendo la salida de HIC11; al hacer esto, en el controlador'por acción precalculada se incrementa el punto de control para el controlador de flujo de agua FIC 12 y dicha operación continúa hasta que desaparece la desviación'. Con base en lo anterior, el operador' puede corregir cualquier perturbación que 'no se compense mediante el controlador por acción precalculada.

Este procedimiento para compensar cualquier perturbación menor es simple y funciona bien, sin embargo, la desventaja es que requiere la intervención del operador; sería mucho mejor que la compensación se hiciera automáticamente, sin necesidad de que intervenga el operador. 'En la figura 8-25 se muestra un esquema con el que se logra lo anterior, se le denomina "control con acción precalculada con compensación dinámica y afinación por retroalimentación"'; en dicho esquema se substituye al operador con el controlador por retroalimentación CIC ll. Se observará 'que ahora la composición real que se desea a la salida es el punto de control de CIC1 1; en este controlador se decide qué señal se debe enviar 'al controlador por acción precalculada "x_6^{fijo}" para mantener el punto

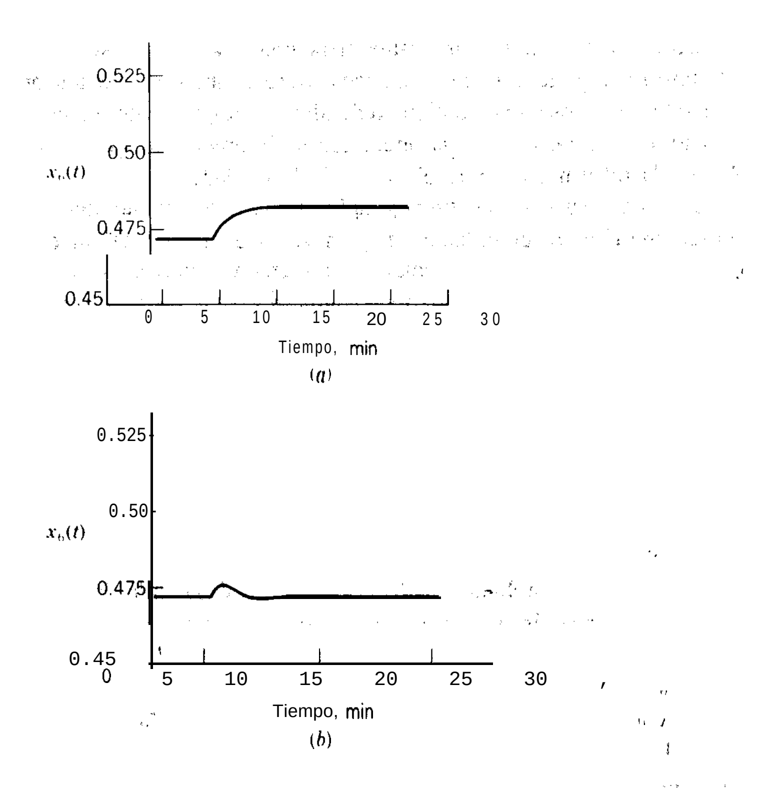


Figura 8-24. Respuesta de los sistemas de control a las perturbaciones en $q_7(t)$, *a*) sin afinación por retroalimentación, *b*) con afinación por retroalimentación.

de control. En la figura 8-24*b* se muestra la respuesta de este nuevo esquema de control cuando $q_7(t)$ cambia de 500 a 600 gpm; como se ve, mediante la compensación por retroalimentación se regresa la variable controlada al punto de control.

Para resumir, con elcontrolador por acción precalculada se compensan los disturbios mayores. La afinación con retroalimentación se necesita por varias razones, entre las cuales están el hecho de que no siempre se miden y compensan todos los disturbios posibles, de que la ecuación del controlador por acción precalculada no es exacta y la deriva de las instrumentos, paracitar *algunas;* por *estas* razones *el control por acción precalculada se implementa con afinación por retroalimentación.*

La ubicación de la afinación por retroalimentación es importante y se debe considerar en el esquema de control completo, En la figura 8-25 se observa que la afinación por retroalimentación se introduce después de la unidad de adelanto/retardo; si la unidad de adelanto retardo se instala después de la afinación por retroalimentación, esta compensación pasa entonces a través de la unidad, de lo que resulta un "rebote" transitorio del proceso, lo.cual es innecesario. Puesto que esta compensación por retroalimentación no se necesita compensar dinámicamente contra nada, no es necesario que pase por la unidad de adelanto/retardo .

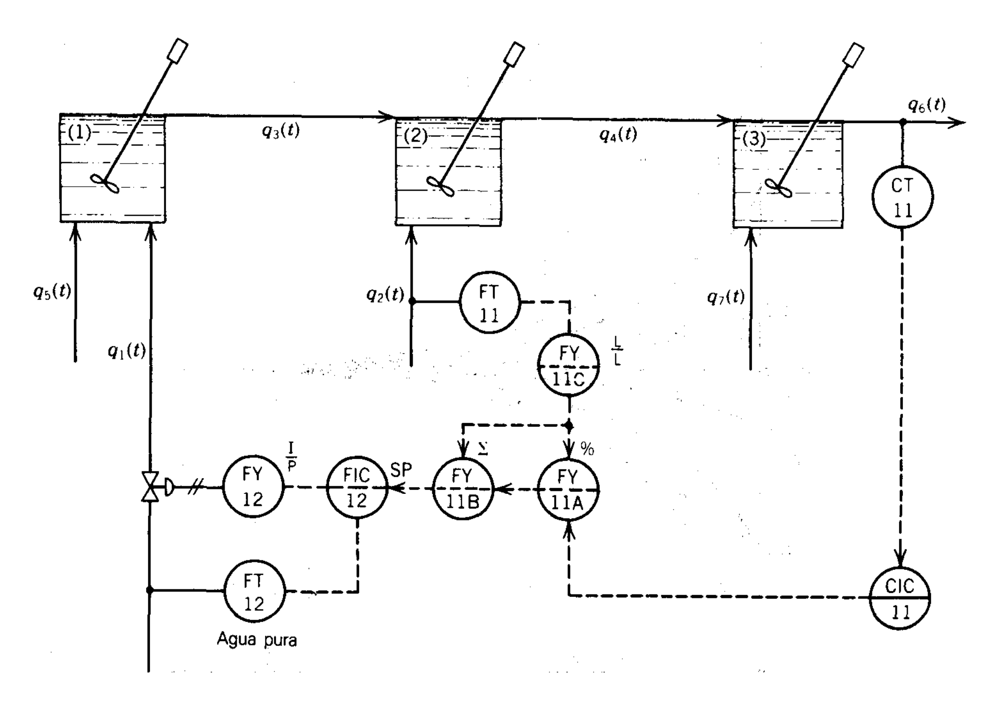


Figura 8-25. Control por acción precalculada con compensación dinámica y afinación por **retroalimentación.**

Unidad de adelanto/retardo

Antes de continuar con el control por acción precalculada, se hará una revisión rápida de la unidad de **adelanto/retardo**. En esta unidad se resuelve la siguiente función de transferencia, como se ve en la ecuación (4-78):

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau_{ld}s + 1}{\tau_{lg}s + 1} \tag{4-78}$$

donde:

τ_{ld} = constante de tiempo de adelanto, min
τ_{lg} = constante de tiempo de retardo, min

Algunas veces se multiplica esta función de transferencia por un factor de ganancia *K*, como se muestra en la tabla 8-3. La expresión con que se describe la respuesta Y(t) a un cambio de escalón unitario en la función de **forzamiento**, en el dominio del tiempo, se obtiene con la ecuación (4-79):

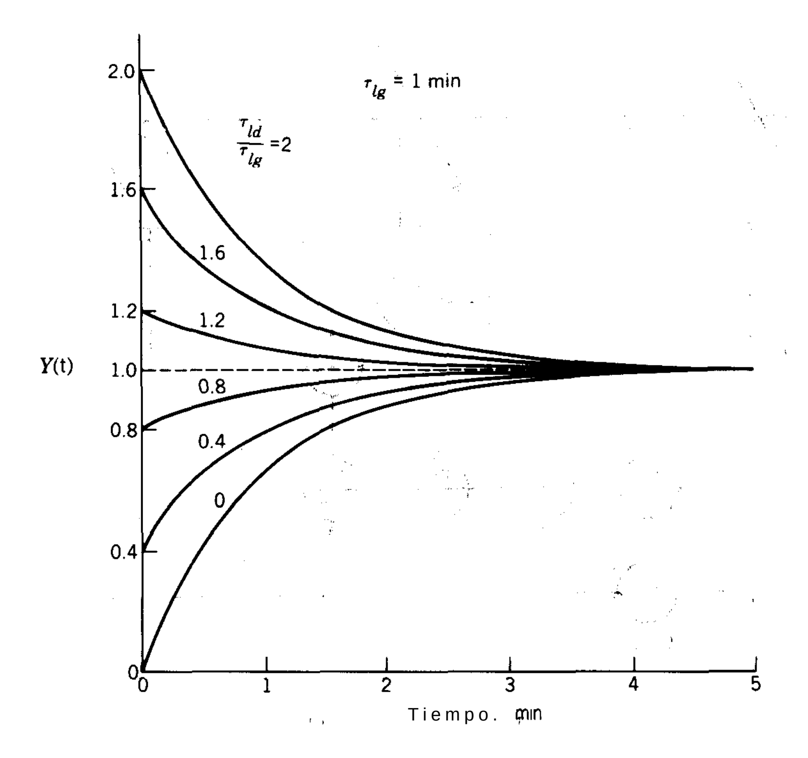


Figura 8-26. Respuesta de la unidad adelanto/retardo a un cambio escalón en la función de forzamiento.

$$Y(t) = \left[1 + \frac{\tau_{ld} - \tau_{lg}}{\tau_{lg}} e^{-t/\tau_{lg}} \right] \quad (4\text{-}79)$$

En la figura 8-26 se muestra gráficamente la respuesta para el caso donde τ_{lg} = 1 con diferentes razones de τ_{ld}/τ_{lg}. Es conveniente repetir lo que se mencionó en el capítulo 4 acerca de esta unidad. Lo primero y más importantees que la cantidad inicial de respuesta depende de la razón τ_{ld}/τ_{lg}; esta respuesta inicial es igual al producto de τ_{ld}/τ_{lg} por la magnitud del cambio escalón. En la figura 8-23*b* se muestra la respuesta de $q_1(t)$ a un cambio en $q_2(t)$ cuando se utiliza control dinámico con acción precalculada; en este ejemplo se utiliza una unidad de adelantohetardo con razón τ_{ld}/τ_{lg} mayor a 1, específicamente, τ_{ld}/τ_{lg} = 3.3/2.29 = 1.44. Segundo, la cantidad de cambio en la salida de la unidad de adelantohetardo es igual a la magnitud del cambio en la entrada. Último, la tasa exponencial de disminución o incremento. en la salida únicamente es función de la constante de tiempo de retardo, τ_{lg}.

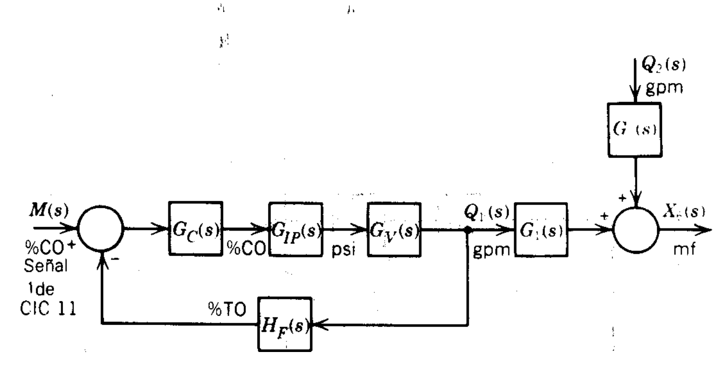
Como se vio en la sección anterior, las unidades de adelanto/retardo se utilizan para compensar los desbalances dinámicos del proceso. Para implementar una unidad de ade-

lanto/retardo se debe especificar la constante de tiempo de adelanto, τ_{ld}, y la constante de tiempo de retardo, τ_{lg}, las cuales son parte de la personalidad del proceso. En la siguiente sección se muestra cómo obtener una estimación inicial de τ_{ld} y τ_{lg}. Las unidades de adelanto/retardo se pueden adquirir comercialmente en forma de unidades analógicas o de sistemas con base en microprocesadores.

Diseño del control lineal por acción precalculada mediante diagrama de bloques

El primer paso para implementar el control por acción precalculada es el desarrollo de un modelo o ecuación del procesa, en el cual se establece la relación entre la variable manipulada con la variable controlada y todas las perturbaciones mayores. En el ejemplo de proceso que se presentó al principio de esta sección se ilustró cómo hacer esto para el proceso que aparece en la figura 8-19. Para este proceso el modelo se desarrolló analíticamente; se empezó por la ecuación básica de balance de masa, sin embargo, en caso de que no sea posible desarrollar analíticamente el modelo requerido porque el proceso es muy difícil de describir o existen muchos parámetros desconocidos, ¿qué se hace? Éste es el tema de la presente sección. Para demostrar la técnica se utiliza el proceso que aparece en la figura 8-19; en la figura 8-27*a* se muestra un diagrama a bloques parcial de este proceso. Puesto que, una vez que se ajusta, el circuito de flujo es rápido y estable, la figura 8-27*a* se puede simplificar en la forma que se muestra en la figura 8-27*b*.

Para implementar el control por acción precalculada se debe medir la perturbación, la cual se utiliza para calcular la variable manipulada con que se mantiene constante la variable controlada. En la figura 8-28 se muestra el diagrama de bloques de este esquema de control por acción precalculada; después de utilizar el álgebra de diagramas de bloques,



$G_1(s)$ = función de transferencia del proceso que relaciona la fracción de masa de la salida, con el flujo de la corriente 1
$G_2(s)$ = función de transferencia del proceso que relaciona la fracción de masa de 'la salida con el flujo de la corriente 2
$G_V(s)$ = función de transferencia de la válvula que relaciona el flujo de salida de la señal neumática
$G_{IP}(s)$ = función de transferencia del transductor I/P, FY 12
$G_C(s)$ = función de transferencia del controlador de flujo, FIC12
$H_F(s)$ = función de transferencia del transmisor de flujo, FT12

Figura 8-27*a*. Diagrama de bloques parcial; para el proceso de **la figura 8-19.**

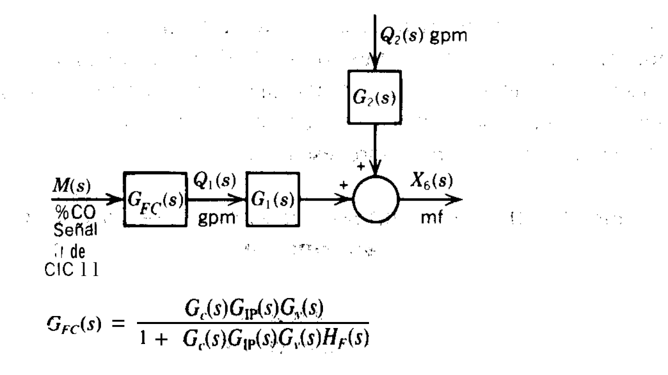


Figura 8-276. Simplificación del diagrama de bloques de la figura **8-27*a*.**

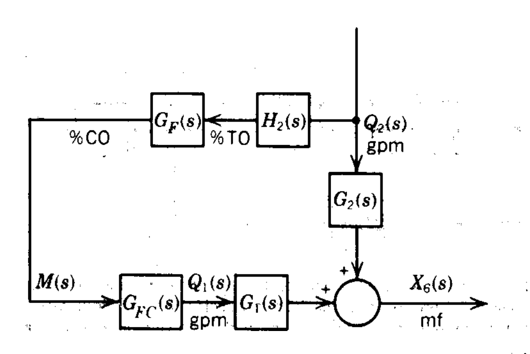
$$X_6(s) = [G_2(s) + H_2(s)\ G_F(s)\ G_{FC}(s)\ G_1(s)]\ Q_2(s) \tag{8-14}$$

Ahora el objetivo es diseñar el controlador por acción precalculada; $G_F(s)$, de manera que, cuando $q_2(t)$ varíe, $x_6(t)$ permanezca constante; si $x_6(t)$ es constante, entonces $X_6(s) = 0$ y el controlador por acción precalculada se puede obtener a partir de la última ecuación

$$G_F(s) = -\frac{G_2(s)}{H_2(s)G_{FC}(s)G_1(s)} \tag{8-15}$$

Ésta es la ecuación del. controlador por acción precalculada que se debe implementar.

Para tener más visión acerca del método mencionado, se observará este ejemplo con más detalle. Si se supone que en el proceso de la figura 8-19 se coloca el controlador de concentración, CIC1 1, en manual y se introduce un cambio escalón en el punto de



$H_2(s)$ = función de transferencia del sensor-transmisor de flujo que detecta el flujo de la corriente 2
$G_F(s)$ = función del transferencia del controlador por acción precalculada

Figura 8-28. Diagrama de bloques del' esquema de control por acción precalculada.

control del controlador de flujo, FIC12, y además se lleva un registro del cambio de fracción de masa, $x_6(t)$, a la salida del último tanque, entonces, a partir de estos datos se desarrolla el siguiente modelo, para lo cual se utiliza el procedimiento que se presentó en el capítulo 6:

$$G_{P1}(s) = G_{FC}(s)G_1(s) = \frac{K_{P1}e^{-t_{01}s}}{\tau_1 s + 1} \tag{8-16}$$

A la corriente 2 se le aplica la prueba escalón de la misma manera, y se registra $x_6(t)$ para desarrollar la siguiente función de transferencia:

$$G_2(s) = \frac{K_{P_2}e^{-t_{02}s}}{\tau_2 s + 1}, \quad \frac{\text{mf}}{\text{gpm}} \tag{8-17}$$

Si se supone, que la dinámica del sensor-transmisor de flujo es despreciable, se obtiene

$$H_2(s) = K_{T_2}, \quad \frac{\%\text{TO}}{\text{gpm}} \tag{8-18}$$

Se substituyen las ecuaciones (8-16), (8-17) y (8-18) en la ecuación (8-15) para obtener

$$G_F(s) = \left(\frac{-K_{P_2}}{K_{T_2}K_{P_1}}\right)\left(\frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}\right)e^{-(t_{02} - t_{01})s}$$

El primer término entre paréntesis es una ganancia pura con unidades (%CO/ %TO) y representa cuánto debe cambiar la salida del controlador con acción precalculada para un cambio en la salida del transmisor de flujo. Naturalmente, con esto cambia la corriente 1 cuando cambia la corriente 2, lo cual es la idea del control por acción precalculada. El segundo término es el compensador dinámico, la unidad de adelanto/retardo; los ajustes están dados por $\tau_{ld} = \tau_1$ y $\tau_{lg} = \tau_2$. Finalmente, el tercer término, que es un término exponencial, es otro compensador dinámico y se puede considerar como un "compensador de tiempo muerto"; sin embargo, existen dos problemas posibles con este término. El primero es que con instrumentos analógicos la implementación de esta compensación es impráctica; con la utilización de computadoras es más simple; en la mayoría de los sistemas con base en microprocesadores que se utilizan actualmente existe un bloque de cómputo de tiempo muerto. El segundo problema consiste en que, si el término $t_{0_2} - t_{0_1}$ es negativo -10 que da origen a un exponente positivo-, como este término ya no es tiempo muerto, se. interpretaría como piedictor del futuro, lo cual no es posible. Por lo anterior, se elimina generalmente el último término y la ecuación del controlador por acción precalculada queda de la siguiente forma:

$$G_F(s) = \left(\frac{-K_{P_2}}{K_{T_2}K_{P_1}}\right)\left(\frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}\right) \tag{8-19}$$

Con la actual instrumentación mediante computadora se puede implementar el compensador de tiempo muerto si el término $t_{0_2} - t_{0_1}$ es. positivo..

Generalmente, la compensación por retroalimentación se añade al esquema de acción precalculada. En la figura 8-29 se muestra el diagrama de bloques del esquema completo, y en la figura 8-30 se muestra el diagrama de instrumentación. En la figura 8-30 se multiplica la señal de FT1 1 por $-K_{P_2}/K_{T_2}K_{P_{11}}$; en el multiplicador FY 11 A y en FY 11B se realiza la compensación de adelanto/retardo. En la mayoría de los casos se pueden realizar ambos cálculos en un solo relé de cómputo, como se aprecia en la tabla 8-2; la compensación por retroalimentación se añade al controlador por acción precalculada en FY 11C.

En este esquema de control por acción precalculada el significado de la afinación por retroalimentación es diferente del que se tiene cuando se desarrolla el controlador por acción precalculada de manera analítica. En este caso se utiliza la afinación por retroalimentación para desviar (bias) (hacia arriba o hacia abajo) la salida del controlador por acción precalculada y así compensar las perturbaciones menores. Acerca del escalamiento del sumador, FY ll C, cabe señalar que el lugar donde se introduce la retroalimentación es importante. En este sumador, al que se denomina algunas veces "estación de derivación", se resuelve la siguiente ecuación:

Salida = señal retroalimentada + señal de acción precalculada + derivación

Para más claridad y a fin de mostrar la forma de calcular la derivación, ahora se considera la utilización del sumador que aparece en la tabla 8-2:

$$OUT = K_x X + K_y Y + K_z Z + B_0$$

Sea la entrada X la señal de retroalimentación, y la señal de acción precalculada la entrada Y; la entrada Z no se utiliza. En estado estacionario $q_2(t)$ es de 1000 gpm, si se supone que la escala del sensor-transmisor con que se mide este flujo es de 0-2500 gpm, entonces el valor del flujo de estado estacionario es el 40% de este rango; bajo tales condiciones, la salida de estadoestacionario del controlador con acción precalculada, la cual es la entrada del sumador, es de $(-K_{P_2}/K_{T_2}K_{P_1})$ 40% ; lo que se hace en el sumador es utilizar la derivación (B_0) para. cancelar la señal precalculada y, por lo tanto, el término de derivación se fija a $-(-K_{P_2}/K_{T_2}K_{P_1})$ 40%. Puesto que en estado estacionario $q_1(t)$ es de 1900 gpm, y la escala del transmisor es de 0-3800 gpm, como se indica en la tabla 8-4, la señal que sale del sumador debe ser del 50 % de este rango, con lo cual se fuerza a que la señal de salida del controlador por retroalimentación sea del 50 % de su. rango en estado estacionario,

En este ejemplo es fácil darse cuenta, mediante los principios de ingeniería, de que el signo de K_{P_2} es positivo, mientras que el signo de K_{P_1} es negativo, lo cual significa que el término $-K_{P_2}/K_{T_2}K_{P_1}$ es una-cantidad positiva, lo que, a su vez,. indica que si $q_2(t)$ se incrementa, también se debe incrementar $q_1(t)$.

En el sumador se pueden fijar los valores de los factores de escalamiento K_x y K_y a + 1, mientras que el valor de la derivación (B_0) se fija a $-(-K_{P_2}/K_{T_2}K_{P_1})$ 40%. El signo del factor de escalamiento de la señal precalculada (K_y en este caso) se puede considerar como la "acción" del controlador por acción precalculada. El ingeniero debe cerciorarse

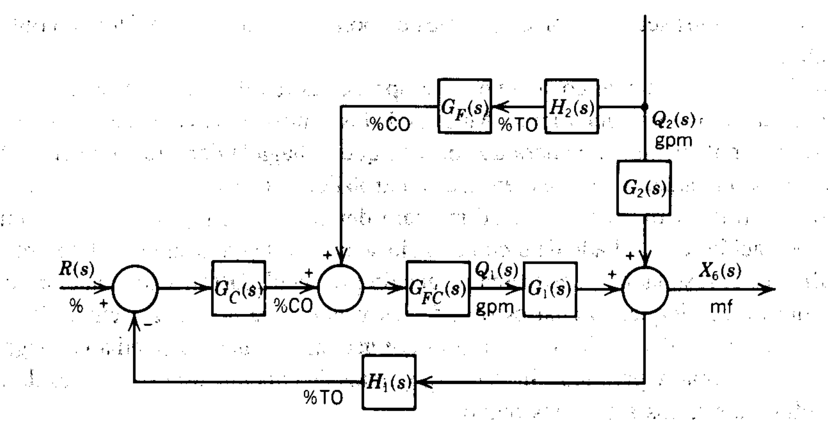


Figura 8-29. Diagrama de bloques del **control por acción precalculada** con afinación por retroalimentación.

Figura 8-30. Control por acción precalculada con compensación dinámica **y afinación por** retroalimentación. **Método** de diagrama de **bloques.**

que todos los signos sean los correctos antes de poner el sistema completo de control en automático.

Con los nuevos sistemas con base en microprocesadores algunas veces no es necesario utilizar un sumador como derivación. 'Muchos de los controladores con base en microprocesadores se implementan a manera de permitir que se haga la derivación en el controlador por **retroalimentación;** esto es, en **tales** controladores se acepta la señal precalculada como otra entrada **y dicha** señal se utiliza para derivar la decisión del controlador por retroalimentación; el resultado de dicho manejo se convierte en la salida del controlador. Esta salida es el resultado **del** esquema de acción **precalculada/retroalimentación,** con lo que se ahorra un bloque, lo cual es otra de las ventajas de la nueva tecnología.

Como se vio, el diseño de controladores por acción precalculada mediante diagramas de bloques es simple y práctico. Sin embargo, antes de concluir esta sección es deseable hacer énfasis sobre los siguientes puntos:

1. La diferencia entre el método de diagrama de bloques y el de ecuaciones, el cual se presentó al principio de esta sección en el ejemplo de un proceso, es que del primero resulta un controlador por acción precalculada lineal, y en el segundo se obtienen generalmente **cálculos** no lineales. Siempre que es posible, se prefiere el método de ecuaciones en lugar del de diagrama a bloques, debido a que en el desempeño de los controladores lineales se reducen las condiciones de operación fuera del rango para el cual se evalúan y, cuando esto sucede, en el controlador por retroalimentación se debe compensar con más frecuencia, ya que las no **linea**lidades del proceso actúan como perturbaciones. En los controladores que resultan del método por ecuaciones se pueden compensar las no linealidades. En ambos métodos la compensación 'dinámica, unidad de **adelanto/retardo,** *es lineal y empírica.*
2. Las ganancias que-se utilizan en el **método** de diagrama de bloques se obtienen mediante prueba del proceso; también se pueden obtener mediante **linealización** de las ecuaciones de balance. Por ejemplo, K_{P_2} se puede obtener de reordenar la ecuación (8-11) como sigue:

$$x_6(t) = \frac{1}{q_6(t)}[\bar{q}_5\bar{x}_5 + q_2(t)\bar{x}_2 + \bar{q}_7\bar{x}_7]$$

y entonces

$$K_{P_2} = \left.\frac{\partial x_6(t)}{\partial q_2(t)}\right|_{ss} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{q}_6}$$

Debido a que en el **método** de diagrama de bloques se trabaja con variables de desviación, se añade un término de derivación, el cual no se **prevé** en el diseño. **La** afinación por retroalimentación generalmente se introduce en la unidad de la que se obtiene la derivación (**FY11C** en la figura 8-30).

En **la figura** 8-29 se ilustra un hecho importante e interesante acerca del control por acción precalculada, es notorio que la trayectoria-directa $H_2(s)G_F(s)$ no forma parte de

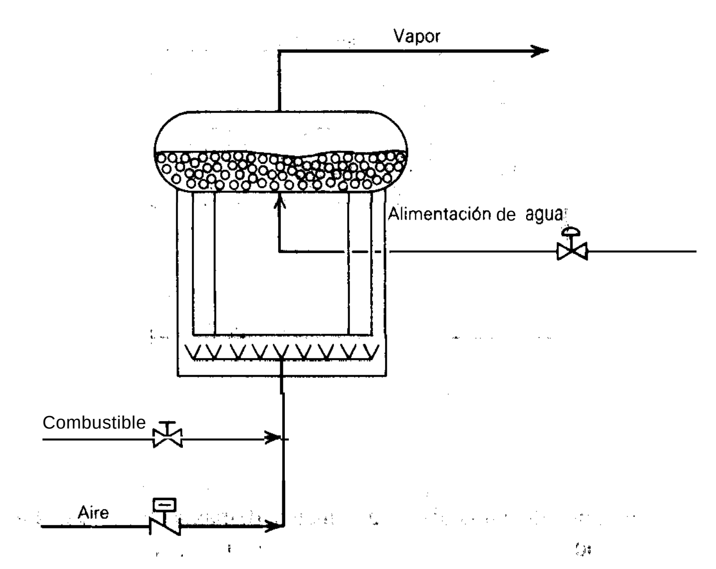


Figura 8-31. Caldera de tambor con accesorios.

la ecuación característica, lo cual significa que, al añadir el control-por acción precalculada, no se afecta la estabilidad del circuito de control.

Dos ejemplos adicionales

Ejemplo 8-5. Un proceso interesante en el que se utilizan las técnicas de control que se aprendieron hasta aquí es el control de nivel de liquido en una caldera de tambor. En la figura 8-31 se muestra esquemáticamente una caldera de tambor. El control de nivel en el tambor es muy importante, ya que con un nivel alto puede entrar agua, y tal vez impurezas, en el sistema de vapor; si el nivel es bajo puede haber fallas en el recipiente por sobrecalentamiento, a causa de la falta de agua en las superficies de ebullición.

En la figura 8-31 se muestran las burbujas de vapor que fluyen hacia arriba, a través del agua, lo cual representa un efecto importante, ya que el volumen específico (volumen/masa) de las burbujas es muy grande y, por lo tanto, estas burbujas desplazan al agua; de lo anterior resulta un nivel aparente más alto que el que se debe únicamente al agua. La presencia de estas burbujas también representa un problema bajo condiciones transitorias. Si se considera la situación en que, a causa del incremento de demanda de vapor por parte de los usuarios, cae la presión del vapor en la parte superior; como consecuencia de tal condición, una cierta cantidad de agua se convierte rápidamente en burbujas de vapor, con las cuales se tiende a incrementar el nivel aparente en el tambor; con la caída de presión también se produce una expansión en el volumen de las burbujas existentes y, debido a esto, se incrementa aún más el nivel aparente; dicha elevación de nivel, que resulta de una disminución en la presión, se denomina *expansión*. Con un incremento de presión

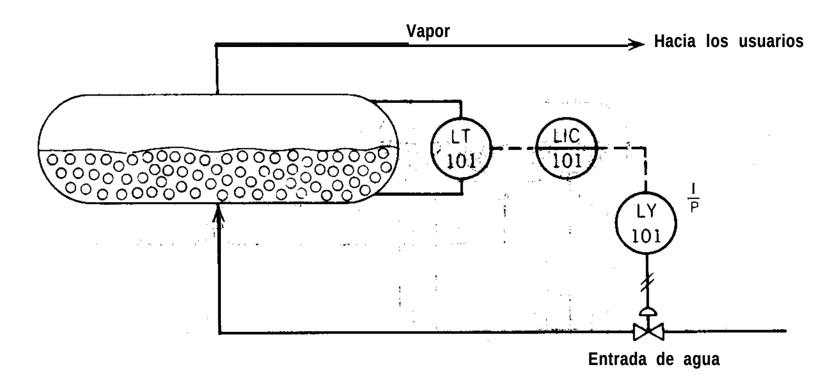


Figura 8-32. Esquema de "control de un solo elemento".

en el vapor superficial, debido a una disminución en la demanda por parte de los usuarios, se tiene el efecto opuesto sobre el nivel aparente, a lo cual se le denomina *contracción.*

Como se explicó anteriormente, el fenómeno de contracción/expansión, en combinación con la importancia de mantener un buen nivel, provoca que el control del nivel sea aún más crítico. En los siguientes párrafos se desarrollan algunos de los esquemas que se utilizan actualmente en la industria.

El control de nivel en el tambor se logra mediante la manipulación del flujo en el alimentador de agua. En la figura 8-32 se muestra el tipo más simple de control de nivel,, el cual se conoce como "control de un solo elemento", en el cual se utiliza un sensor-transmisor de presión diferencial estándar. Este esquema de control se basa en la medición

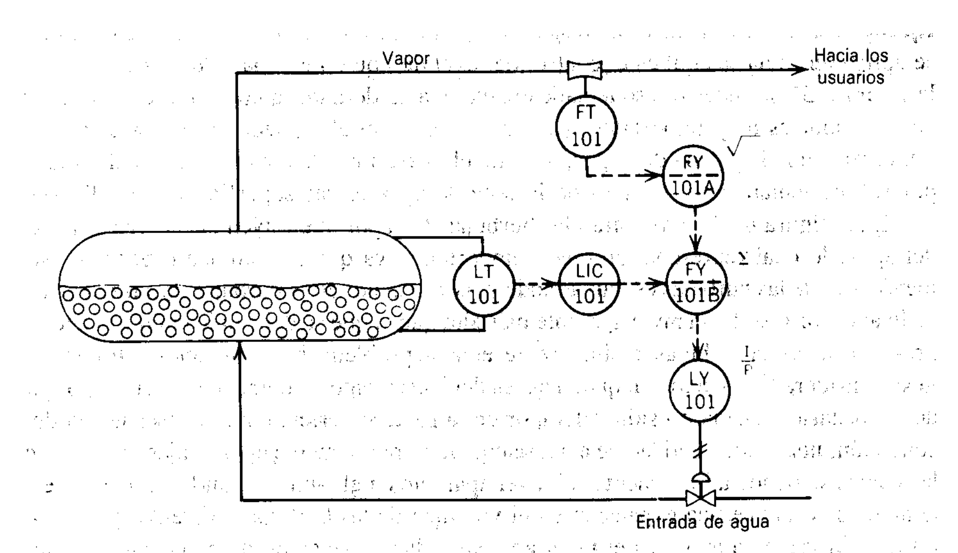


Figura 8-33. Esquema de "control de dos elementos".

de nivel del tambor y, por lo tanto, ésta debe ser confiable. Bajotransitorios prolongados, el fenómeno de **expansión/contracción** provoca que no se pueda tener mediciones confiables y, en consecuencia, se requiere un esquema de control donde se compense tal fenómeno.

El nuevo esquema de control se **denomina "control** de dos elementos", y se ilustra en la figura 8-33; es esencialmente un sistema de **control por** acción **precalculada/retroalimentación.** La idea en que se funda este esquema es quela principal razón para qué cambie el nivel son los cambios en el flujo de vapor, y que por cada libra de vapor que se produzca entre una libra de agua al tambor, es decir, debe existir un balance de masa. Con la señal de **salida** de FY **101A** se **obtiene la** parte de acción precalculada del esquema; mientras que con LIC101 se obtiene la compensación de cualquier flujo no medido, tal como el colapso.

El esquema de "control de dos elementos" funciona completamente bien en muchas de las calderas industriales de tambor, sin embargo; existen algunos sistemas donde la caída de presión a través de la válvula de alimentación de agua es variable; con el esquema de "control de dos elementos" no se-compensa directamente tal perturbación y, en consecuencia, ésta trastorna el balance del control de nivel del tambor al modificar momentáneamente la masa. Con el-esquema de "control de tres elementos?' **que** se ilustra en la figura 8-34 se logra **la compensación requerida; en este esquema** se tiene un control estricto del balance de masa durante **los transitorios.** Es interesante notar que todo lo que se añadió al esquema de "control de dos elementos" es un sistema de control en cascada.

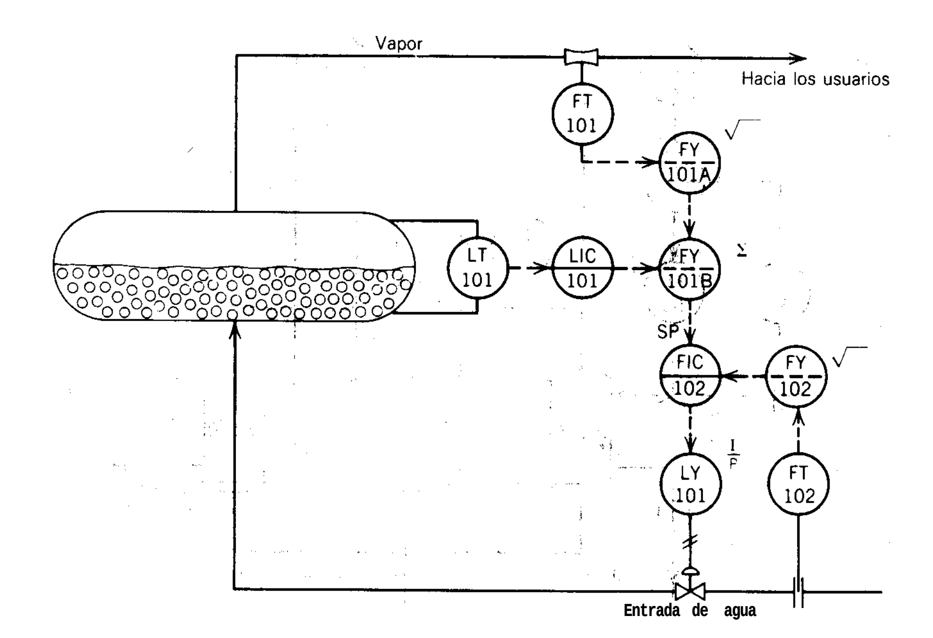


Figura 8-34. Esquema de "control de tres elementos'?;

Con la caldera de tambor se mostró un ejemplo realista de cómo se utilizan los esquemas de control en cascada y por acción precalculada para mejorar el desempeño que se logra con el control por retroalimentación. En este ejemplo particular, la utilización de tales esquemas es casi obligatoria para evitar las fallas mecánicas y de proceso; cada paso que da para mejorar el control es justificado, de otra manera no habría necesidad de complicar las cosas. Se remite al lector a las referencias ll y 12 para otra exposición completa de este tema.

Ejemplo 6-6. Ahora se presenta otro ejemplo realista, el cual es una aplicación industrial del control por acción precalculada. El ejemplo se refiere al control de temperatura en la sección de rectificación de una columna de destilación. En la figura 8-35 se muestra el fondo de la columna y el esquema de control que originalmente se propone e implementa; en esta columna se utilizan dos rehervidores; en uno de los rehervidores, R-10B, se utiliza la condensación de una corriente en proceso como medio de calefacción, y en el otro rehervidor, R-10A, seutiliza la condensación de vapor. Para una operación energéticamente eficiente, en el procedimiento de operación se requiere utilizar, tanto como sea posible, la condensación de la corriente en proceso, la cual se debe condensar de cualquier modo y, por. lo tanto, sirve como fuente "gratuita" de energía. La corriente de vapor se utiliza para controlar la temperatura en la columna.

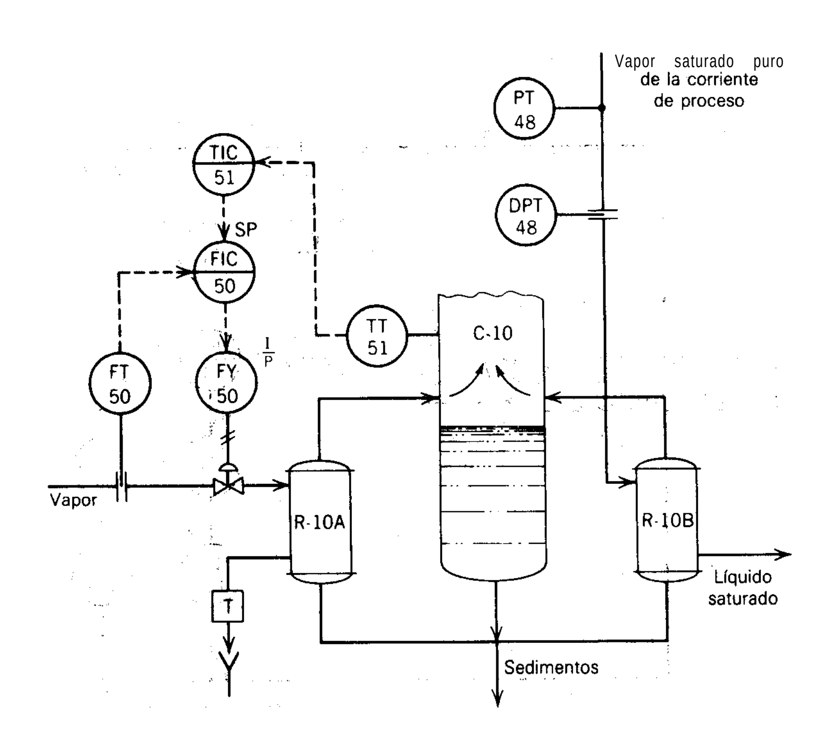


Figura 8-35. Control para una columna de destilación.

Después de inicializar la columna, se observa que en la corriente en proceso,. que sirve como medio de calefacción, se experimentan cambios de flujo y de presión, los cuales actúan como perturbaciones en la columna y, en consecuencia, se necesita compensar continuamente en el controlador de temperatura estas perturbaciones. Con las constantes de tiempo y el tiempo muerto en las columnas y los rehervidores se complica el control de la temperatura. Después de estudiar el problema se decidió utilizar control por acción precalculada; para lo cual se instala un transmisor de presión y un transmisor diferencial de presión sobre la corriente en proceso, y con base en los, datos que se obtienen con ellos, se puede calcular la cantidad de energía que libera la corriente cuando se condensa. Con esta información también se puede calcular la cantidad de vapor requerida para mantener la temperatura en el punto de control y, por lo tanto, la acción correctiva se puede emprender antes de que la temperatura se desvíe del punto de control. La anterior es una aplicación perfecta del control por acción precalculada.

El procedimiento realizado fue específicamente el siguiente: puesto que la corriente en proceso está saturada, la densidad, ρ, únicamente es función de la presión. Por lo tanto, para obtener la densidad, ρ, de la corriente se utiliza una correlación termodinámica:

$$\rho = f_1(P) \tag{8-20}$$

La densidad y el diferencial de presión, h, que se obtiene del transmisor DPT48, se utilizan para calcular el flujo de masa de la corriente a partir de la ecuación de orificio:

$$\dot{m} = K\sqrt{h\rho}, \quad \text{lbm/hr} \tag{8-21}$$

También, si se conoce la presión de la corriente y se utiliza otra relación termodinámica, se puede calcular el calor latente de condensación, λ:

$$\lambda = f_2(P), \quad \text{Btu/lbm} \tag{8-22}$$

Finalmente, se multiplica la razón de flujo de masa por el calor latente para obtener la energía, $\dot{q}_1$, que se libera cuando se condensa la corriente en proceso:

$$\dot{q}_1 = \dot{m}\lambda, \quad \text{Btu/hr} \tag{8-23}$$

En la figura 8-36 se muestra la implementación de las ecuaciones (8-20) a (8-23), así como el resto del esquema de acción precalculada. En el bloque PY48A se realiza la ecuación (8-20); en el PY48B, la (8-21); en el PY48C, la (8-22); y en el PY48D, la (8-23); por lo tanto, la salida del relt PY48D es $\dot{q}_1$, o sea, la energía que se libera cuando se condensa la corriente en proceso..

Para completar el esquema, se considera que la salida del controlador de temperatura es la energía total que se requiere,. $\dot{q}_t$, para mantener la temperatura en el punto de control. Se substrae $\dot{q}_1$ de $\dot{q}_t$ para determinar la energía que se requiere del vapor, q_s:

$$\dot{q}_s = \dot{q}_t - \dot{q}_1 \tag{8-24}$$

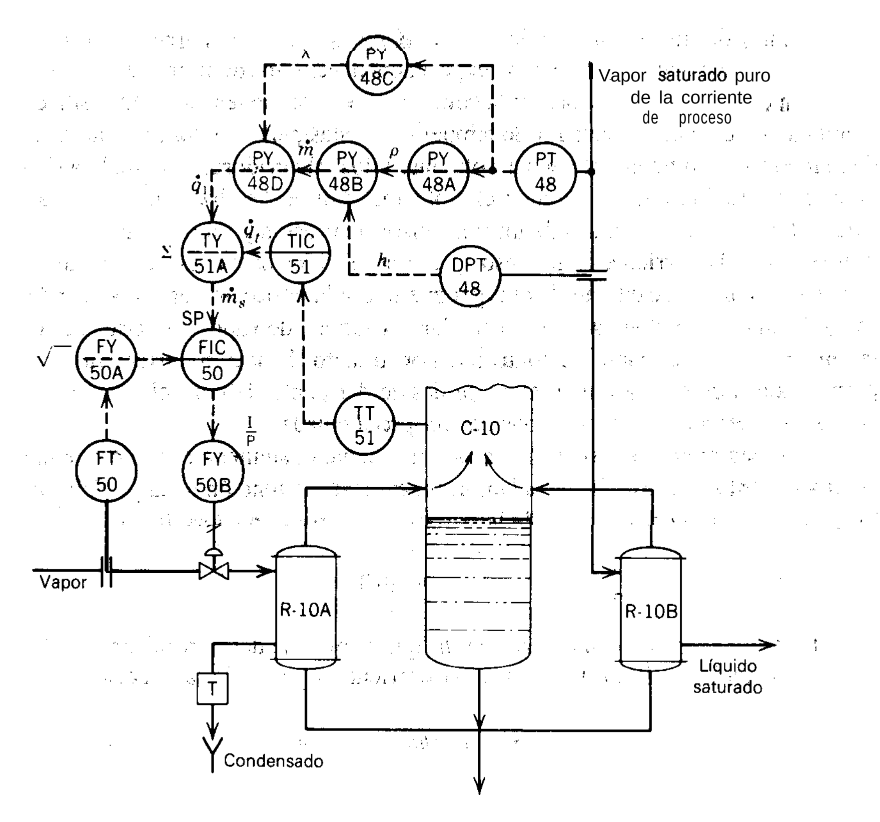


Figura 836. Esquema de control por acción precalculada para una columna de destilación.

Finalmente, se divide $\dot{q}_s$ entre el calor latente en la condensación del vapor, h_{fg}, para obtener el flujo de vapor que se requiere, $\dot{m}_s$:

$$m_s = \frac{q_s}{h_{fg}} \tag{8-25}$$

En el bloque **TY51A** se **efectúan** las **ecuaciones (8-24)** y **(8-25),** y su salida es el punto de control del controlador de flujo FICSO. En la ecuación **(8-25)** se supone que h_{fg} es constante.

En este esquema de control por acción precalculada se deben observar varias cosas.. Primera, el modelo del proceso no es una ecuación, antes bien, son varias; para obtener el modelo se utilizaron varios principios de la ingenieria de proceso, lo cual hace que el control de proceso sea divertido; interesante y excitante. Segunda, la **afinación** por **re**troalimentación es parte integral de la estrategia decontrol; esta **compensación** es $\dot{q}_t$ o la cantidad total de **energía** que se requiere para mantener el punto de control de **TIC5 1**. **Última,** en el esquema de control de la figura 8-36 no se muestra la compensación dinámica o unidad de **adelanto/retardo,** la cual se puede instalar posteriormente si se necesita.

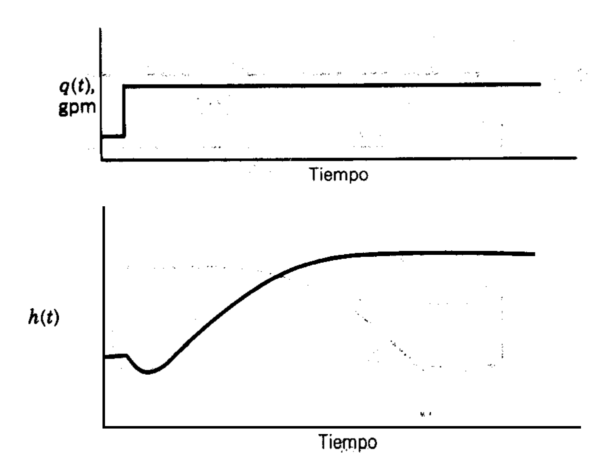


Figura 8-37. Respuesta del nivel del tambor.

Respuesta inversa

En la caldera de tambor del ejemplo 8-5 se presenta un fenómeno que 'se puede observar en varios procesos diferentes. Como se explicó en el ejemplo, el nivel que se puede registrar resulta de la mezcla de agua y burbujas y, por lo tanto, es mas alto que el nivel debido únicamente al agua. Ahora se supone que se desea determinar la ganancia, la constante de tiempo y el tiempo muerto en el circuito de nivel, y que, para ello se utilizará el procedimiento de prueba con escalón que se estudió en el capítulo 6. La válvula de alimentación de agua se abre para permitir que entre más agua al tambor, y también ahí se toma el registro de nivel dinámico, lo cual se ilustra en la figura 8-37; eh la figura se observa que primero baja el nivel en el tambor, y posteriormente se incrementa hasta alcanzar una nueva condición de operación ; este 'tipo de respuesta se conoce como "respuesta inversa''. Ciertamente, este tipo de respuesta no es mágica; al contrario,, existe una explicación física de la misma,' Lo que sucede es que, tan pronto como entra agua fría al tambor, cierta cantidad de burbujas se condensa y el espacio que ocupaban queda vacío, con lo cual se reduce el nivel aparente; eventualmente el nivel se incrementa, ya que entra más agua y se forman nuevas burbujas. Ciertamente, esta respuesta es, otra de las razones por las que son 'tan necesarios los esquemas de control de dos o tres elementos que se muestran en las figura 8-33 y 8-34.

En la literatura existen varios ejemplos[9] de sistemas con respuesta inversa. En el capítulo 9 se presenta. la elaboración del modelo para un reactor químico en el que se tiene dicha respuesta.

En la función de transferencia con que se describe este tipo de respuesta se requiere un cero positivo:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{K_1(-\tau_1 s + 1)}{\tau_2 s + 1} \tag{8-26}$$

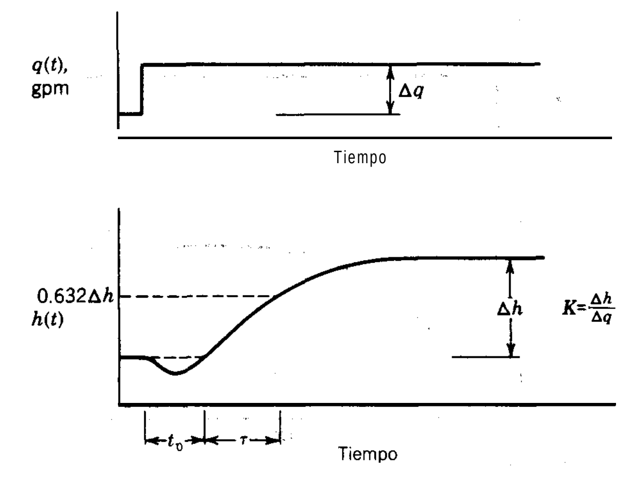


Figura 8-38. Evaluación de los parámetros de nivel del tambor.

Puesto que la evaluación de K_1, τ_1 y τ_2 no se hace fácilmente, la respuesta se puede aproximar mediante un retardo de primer orden mas tiempo muerto:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{Ke^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$$

En la figura 8-38 se ilustra la evaluación de los parámetros. Generalmente este tipo de sistema no es lineal y, en consecuencia, los parámetros K_1, τ y t_0 son muy sensibles a las condiciones de operación.

Resumen del control por acción precalculada

Como se mencionó anteriormente y se demostró en esta sección, el control por acción precalculada es una de las técnicas más eficaces de que se dispone; sin embargo, no es la solución para todos los problemas de control. Para su implementación se requiere más ingeniería que en la retroalimentación simple y, por lo tanto,' su costo monetario se debe justificar antes de su implantación. Cuando se aplica correctamente, las compensaciones económicas y la autosatisfacción de un trabajó bien hecho son significativas.

8-5. CONTROL POR SOBREPOSICIÓN Y CONTROL SELECTIVO

El ***control por sobreposición se*** utiliza generalmente como un control de protección para mantener las variables del proceso dentro de ciertos límites. Otro esquema de protección es el de control entrelazado, el cual se utiliza principalmente como protección contra mal funcionamiento del equipo; cuando se detecta mal funcionamiento, el proceso se detiene

mediante el sistema entrelazado. La acción del control por sobreposición no es tan drástica: el proceso se mantiene en operación, pero bajo condiciones más seguras. En esta sección se presenta un ejemplo de control por sobreposición para ilustrar sus principios y utilización; en este texto no se presentan los sistemas por control entrelazado, pero en la bibliografía aparecen referencias (4 y 5) para su estudio.

Ahora se considera el proceso que aparece en la figura 8-39, en el tanque entra un líquido saturado y de ahí nuevamente se bombea, bajo control, al proceso. En operación normal, el nivel del. tanque esta a la altura h_1, como se muestra en la figura: si por cualquier circunstancia el -nivel del líquido baja a la altura h_2, no se tendrá suficiente volumen positivo neto de succión (VPNS) (NPSH, por sus siglas en inglés), de lo que resulta **cavitación** (cabeceo) en la bomba. Por lo tanto, es necesario diseñar un sistema de control con el que se evite esa condición; este nuevo esquema de control se muestra en la figura 8-40.

Ahora se mide y controla el nivel en el tanque; es importante observar la acción de los controladores y del elemento final de control. La bomba de velocidad variable funciona de tal manera que, cuando se incrementa la entrada de energía (electricidad en este caso), se bombea más líquido; de lo anterior se tiene que FIC50 es un controlador con acción inversa; en cambio, LIC50 es un controlador con acción directa. La salida de cada controlador se conecta a un relé de selección baja, LS50, y de ahí la salida pasa a la bomba.

Bajo condiciones normales de operación, el nivel esta en h_1, el cual se encuentra por arriba del punto de control del 'controlador' de nivel y , por' lo' tanto', desde el controlador se tratará de acelerar a la bomba tanto como sea posible, mediante el incremento de la salida 8 20 mA. La salida del controlador de flujo puede ser de 16 mA y, en consecuencia, el conmutador de selección baja elige esta señal para manejar la velocidad de la bomba, la cual es la condición de operación que se desea.

Si ahora se suponeque el -flujo de lfquido'saturado caliente disminuye y el nivel del tanque empieza a bajar, tan pronto como el nivel llega abajo del punto de control del controlador de nivel, en este controlador se tratara de 'hacer más lento el bombeo, mediante

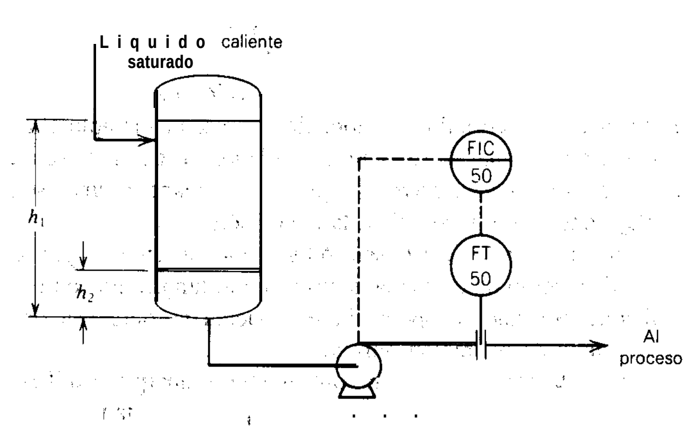


Figura **8-39.** Circuito de control Para el tanque y el flujo.

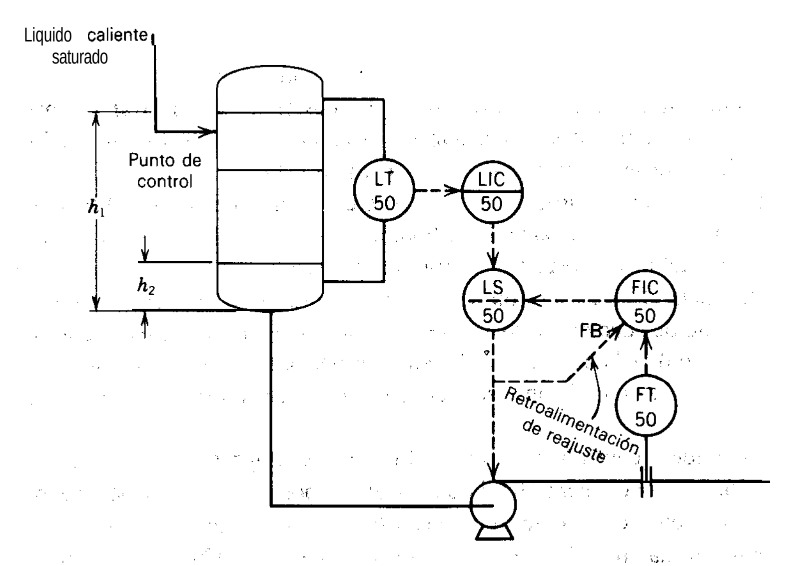


Figura 8-40. Esquema de control por superposición.

la reducción de la salida, Conforme continúa el descenso del nivel, la salida del controlador también sigue en descenso y, cuando llega por debajo de la salida del controlador de flujo, en el relé de selección baja se elige la salida del controlador de nivel para manejar la bomba. Se puede decir que el controlador de nivel "se superpone" al controlador de flujo.

Una consideración importante al diseñar un sistema de control por sobreposición es que, si en cualquiera de los controladores existe modo integral de control, también *debe* existir *protección* contra reajuste excesivo; la salida del controlador se debe detener en 20 mA y no a un valor más alto. En la figura 8-40 se muestra una conexión de reajuste por retroalimentación (FB) para el controlador de flujo FIC50, el cual es un método para implementar la protección contra reajuste excesivo, como se explicó en la sección 6-5. En la figura *6-29b* se supone que la salida del controlador va a la bomba; en la figura 8-40 la salida que va a la bomba es la del relé de selección baja, por lo tanto, esta señal se utiliza como reajuste por retroalimentación. En el presente ejemplo el controlador de nivel es únicamente proporcional; si fuera un controlador PI, entonces se requeriría también protección contra reajuste excesivo, ya que de otra manera nunca se superpone al controlador de flujo antes de que se inicie la cavitación.

Como se mencionó al inicio de esta sección y se vio en este ejemplo, el control por sobreposición se utiliza como un esquema de protección; tan pronto como el proceso regresa a sus condiciones normales de operación, el esquema de sobreposición regresa automáticamente a su estado de operación normal.

El control selectivo es otro esquema de control interesante que se utiliza en las industrias de proceso, su principio e implementación se exponen mediante dos ejemplos. Primero se considera el reactor catalítico exotérmico de tubo que se muestra en la figura

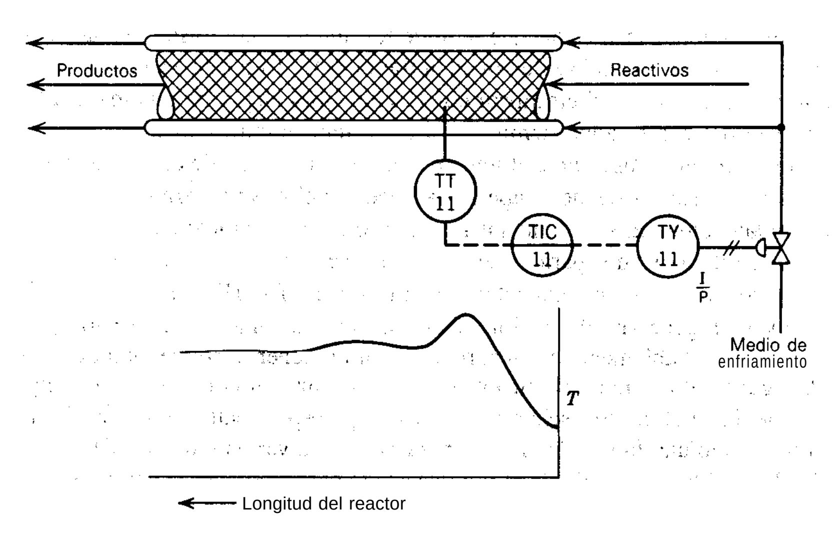


Figura 8-41. Control de temperatura para un reactor de tubo.

8-41, en la cual también aparece el perfil típico de la temperatura a lo largo del reactor. Se desea controlar la temperatura del reactor en el punto de mayor temperatura, como se observa en la figura; sin embargo, conforme envejece el catalizador o cambian las condiciones, el punto de mayor temperatura se mueve. En este caso se desea diseñar un es-

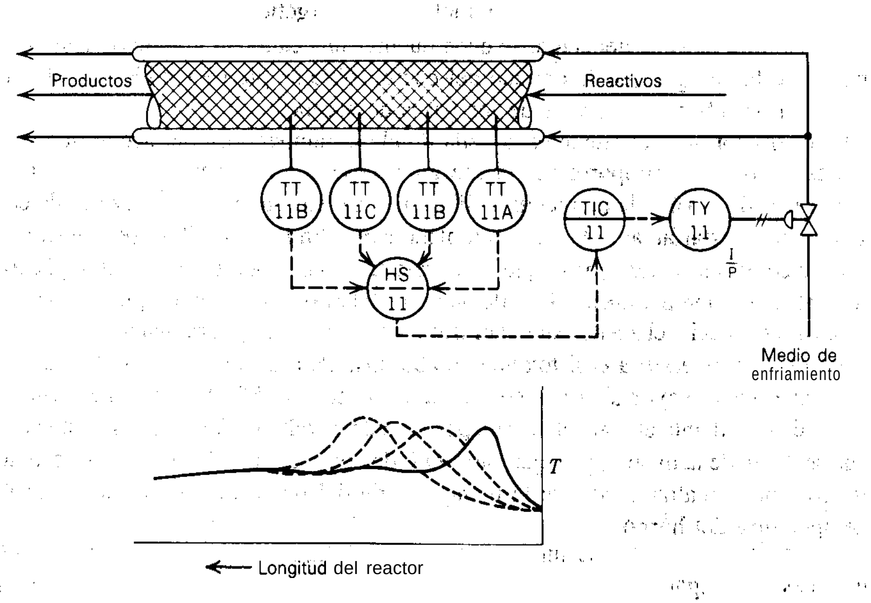


Figura 8-42. Esquema de control selectivo para un reactor de tubo.

quema de control donde la variable que se mide se "mueva" conforme se mueve el punto de mayor temperatura, lo cual se'ilustra en la figura 8-42. Con este esquema, en el selector de altas siempre se elige el **tansmisor** con la salida mas alta, y de esta manera la variable de proceso del controlador siempre esta en la temperatura más alta.

Una consideración importante al implementar este esquema de control es que el rango de todos los transmisores de temperatura debe ser el mismo para que las señales de salida se puedan comparar sobre una misma base; otra consideración importante es instalar alguna clase de indicador para-saber en qué transmisor se tiene la señal más alta. Si el punto de calor se mueve más allá del último transmisor, **TT1 1D,** esto puede ser signo de que es tiempo de regenerar o de cambiar el catalizador. La longitud del reactor que queda para la reacción probablemente no es suficiente para obtener 'la conversión que se desea.

En la figura 8-43 se muestra otro proceso interesante en el que se puede mejorar la operación mediante el control selectivo. En este proceso se calienta aceite (Dowtherm) en un horno, como una fuente de energía para proveer a varias unidades de proceso. En cada unidad individual se manipula el flujo de aceite para mantener la variable controlada en el punto de control; además, la temperatura del aceite que sale del horno también se controla mediante la manipulación del flujo de **combustible.** Con el fin de simplificar el diagrama, no se muestra el sistema de control de la razón **aire/combustible,** pero el lector debe recordar que se debe implementar éste. Para asegurar el retorno del aceite al horno se instala un circuito de control de reciclaje, **DPC101.**

Si se supone que se observa que la **válvula** de control, de temperatura en cada unidad no se abre mucho, **es decir,** TV101 se abre un **20%,** TV102 un 15% **y** TV103 un **30%,** esto **indica** que la temperatura del aceite que sale del horno es bastante alta **y,** en consecuencia, no se necesita mucho flujo de aceite, por lo cual la mayor parte de éste no pasa por los usuarios. Esta situación es muy ineficiente energéticamente, ya que para obtener una temperatura elevada del aceite se debe quemar una cantidad grande de combustible, y mucha de la energía que se obtiene del 'combustible'se pierde también en el entorno del sistema de tubería y a través de los gases de escape.

La **operación** más eficiente es aquella donde la temperatura del aceite que sale del horno es la justa para proporcionar la energía necesaria a los usuarios, con casi nada de flujo a través de la **válvula** de reciclaje (libramiento); en este **caso** las válvulas de control de temperatura estarían abiertas casi completamente. En **la** figura 8-44 se muestra un esquema de control selectivo con el que se logra este tipo de operación; la estrategia consiste en controlar la temperatura del aceite que sale **del** horno, de manera que sea justamente la necesaria (es decir, el aceite **estará** tan **frío** como sea posible) para mantener las **válvulas** de control de temperatura casi totalmente abiertas. Para hacer esto primero se elige la válvula que tenga mayor abertura con un selector de alta, **TY101,** y posteriormente se controla ésta mediante el controlador de **posición** de la **válvula, VPC101,** según la abertura que se desee de la misma, por ejemplo, **90% de** abertura. En el controlador, este trabajo de control se realiza mediante la manipulación del punto de control del controlador de temperatura del horno.

La válvula con mayor abertura se selecciona mediante la comparación de las señales neumáticas que llegan a cada válvula; en consecuencia, para que esta comparación sea correcta, las **características** de todas las **válvulas** deben ser las mismas.

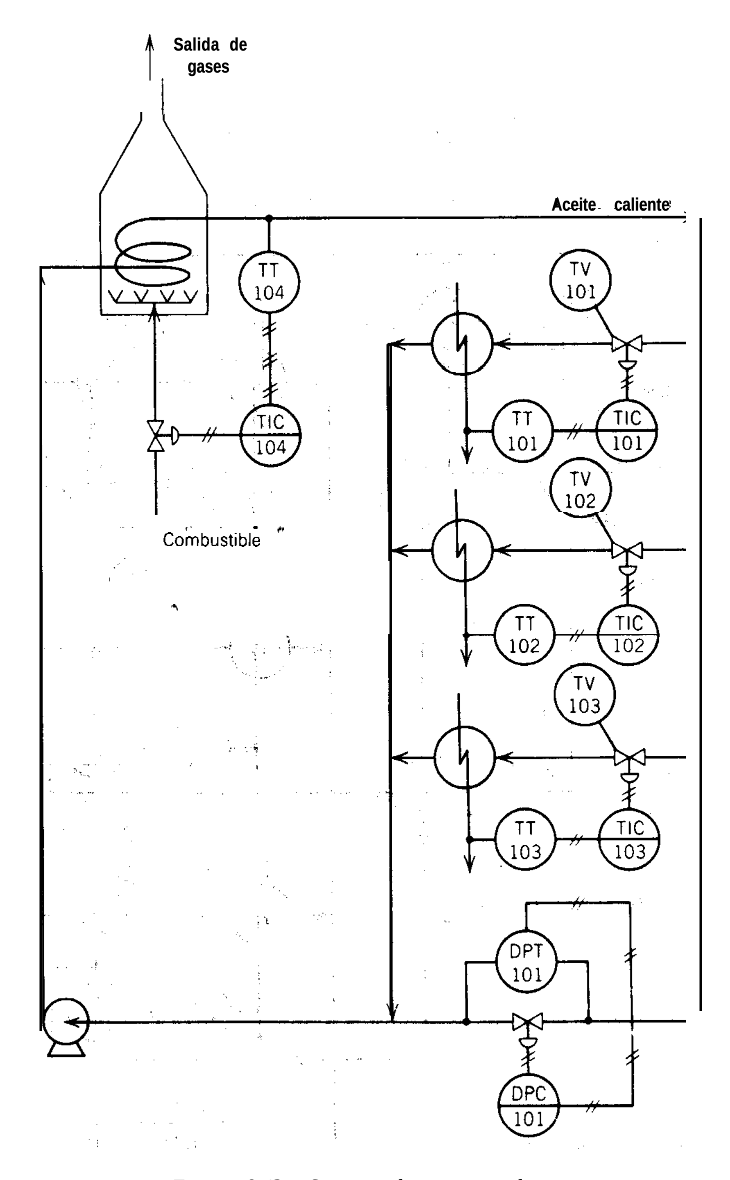


Figura 8-43. Sistema de aceite caliente.

En el esquema de control se observa que, con un poco de lógica, se puede mejorar significativamente la operación de un proceso, en este caso mediante la minimización de las pérdidas de energía. En el ejemplo también se demuestra la facilidad de la implementación de la estrategia de control.

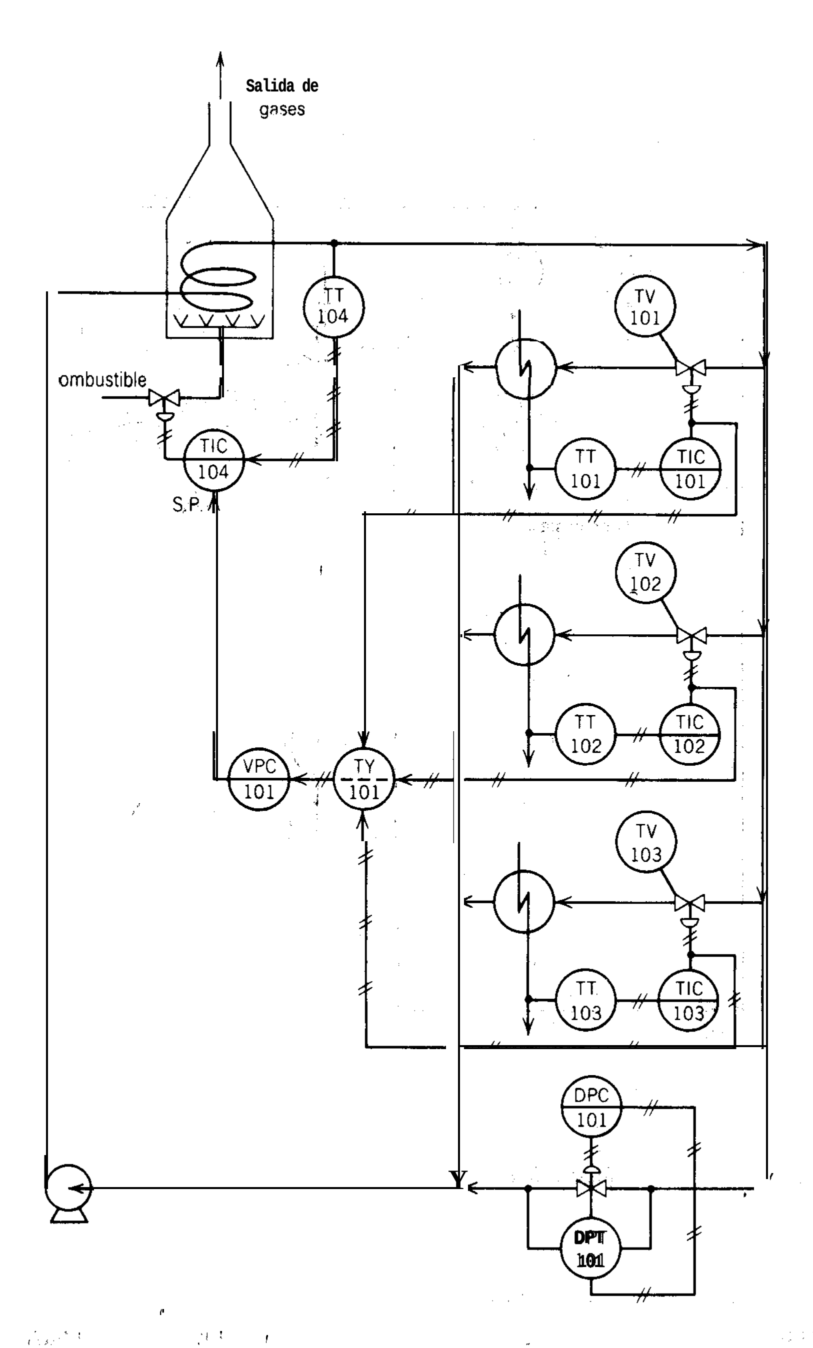


Figura 8-44. Control selectivo para un sistema de aceite caliente.

8-8. CONTROL DE PROCESO MULTIVARIABLE

Hasta este punto, en el estudio del control automático de proceso únicamente se consideraron procesos con una'sola variable controlada y manipuîada; dichos procesos se conocen como de entrada simple y salida simple (ESSS) (SISO por sus siglas en inglés). Sin embargo, frecuentemente se tienen procesos en los que se debe controlar más de una variable; éstos se denominan procesos multivariables o procesos de múltiples entradas y múltiples salidas (MEMS) (MIMO por sus siglas en inglés); en la figura 8-45 se muestran algunos ejemplos de tales procesos.

En la figura 8-45*a* se describe un-sistema de mezcla donde es necesario controlar el flujo de salida y la fracción de masa que sale de un componente *A*; para lograr tal objetivo se utilizan dos válvulas: una para controlar la corriente *A*, y otra para la corriente S. En la figura 8-45*b* se muestra un reactor químico en el cual se necesita controlar la temperatura de salida y la composición; en este' proceso las variables manipuladas son el flujo de agua para enfriamiento y el flujo de salida del proceso. En la figura 8-45*c* se ilustra un evaporador en-el que el nivel y 'la concentración a la salida son las variables controladas, y el flujo de salida del proceso y el flujo de vapor, las variables manipuladas. En la figura 8-45*d* se muestra una máquina secadora de papel, las variables controladas son la humedad y el peso del producto final (fibras/área), las dos variables manipuladas son el flujo del depósito a la máquina y el flujo de vapor que llega al último grupo de tambores de secado. Por último, en la figura 8-45*e* se describe una columna típica de destilación con las variables controladas necesarias; presión en la columna, composición del destilado, nivel del acumulador, nivel básico y temperatura de la charola; para completar este control se utilizan cinco variables manipuladas: flujo de agua para enfriamiento -la cual llega al condensador-, flujo del destilado, reflujo, flujo de los sedimentos y flujo de vapor que llega al rehervidor.

En los ejemplos anteriores se observa qúe el control de estos procesos puede ser completamente complejo y motivante para el ingeniero de proceso. Generalmente, el ingeniero se debe hacer tres preguntas' cuando se enfrenta con un problema de control de este tipo:

1. ¿Cuál es la "mejor' ' agrupación por pares de variables controladas y manipuladas?
2. ¿Cuánta interacción existe entre los diferentes circuitos de control y cómo afecta a la estabilidad de los circuitos?
3. ¿Se puede hacer algo para reducir la interacción entre los circuitos?

En esta sección se muestra cómo responder tales preguntas mediante técnicas simples y probadas. Para empezar se presenta una breve explicación sobre gráficas de flujo de señal (GFS) (SFG por sus siglas eninglés); GFS es un método conveniente y fácil para reducir a funciones de transferencia los diagramas de bloques complicados, y será útil para contestar la pregunta 2. A continuación se analizan las preguntas individualmente.

Gráficas de flujo de señal (GFS)

Las gráñcas de flujo de señál (GFS) son representaciones gráficas de las funciones de transferencia con que se describre a los sistemas de control. Para sistemas complejos es

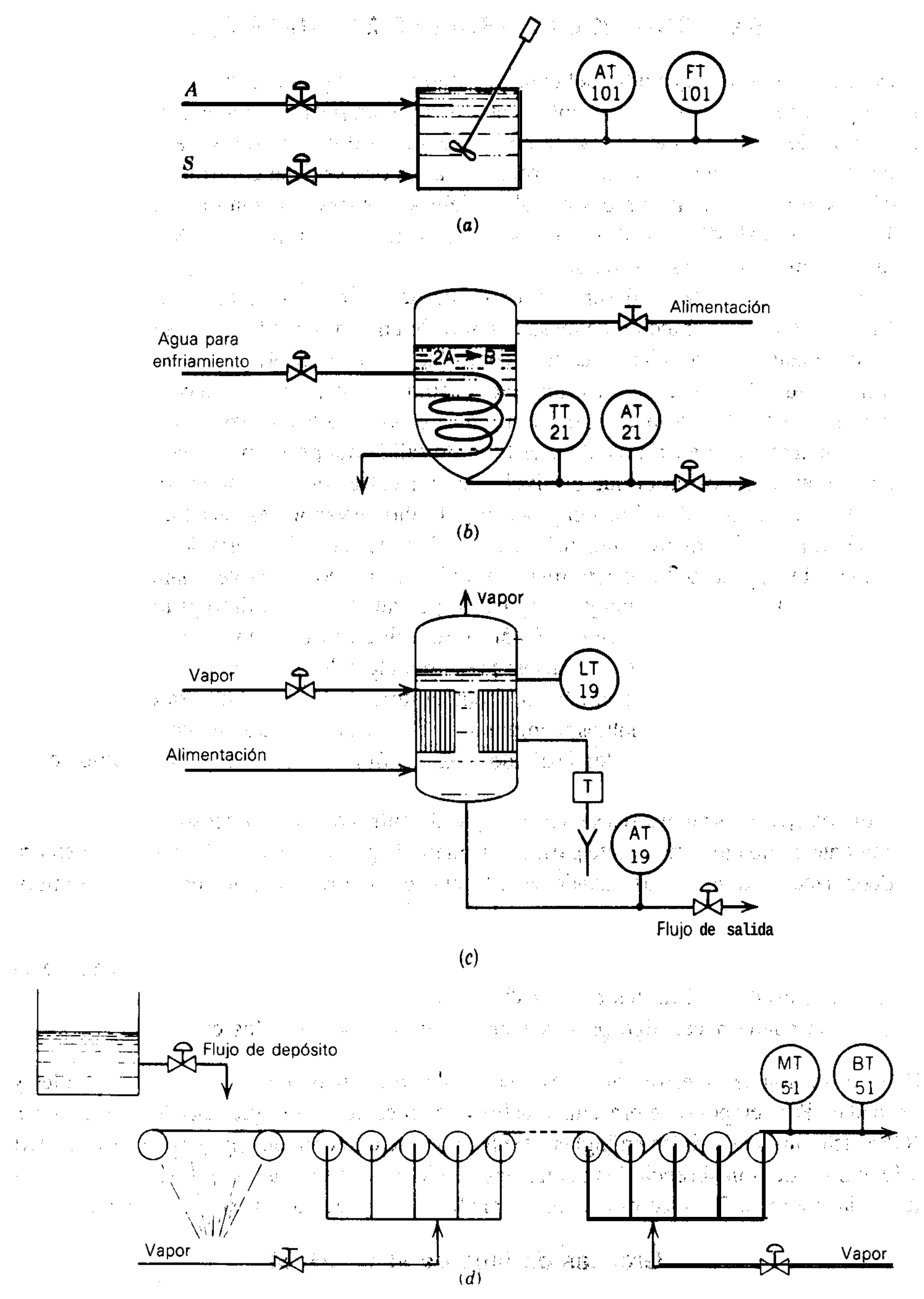


Figura 8-45. Procesos multivariable. *a)* Sistema de mezcla&. b) Reactor químico. c) Evaporador. *d)* Máquina para papel. e) Columna de **destilación.**

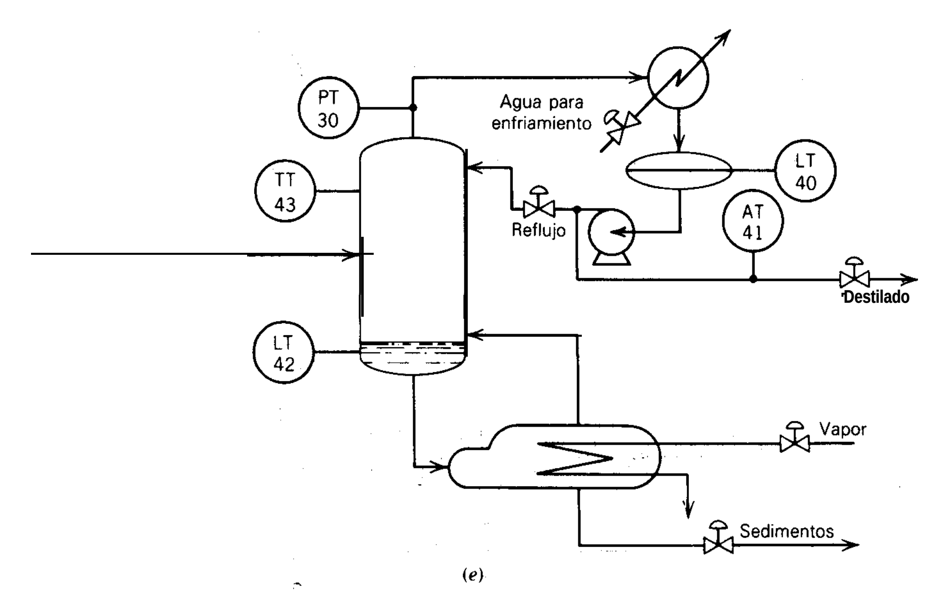


Figura 8-45. (*Continuación*).

mucho más fácil desarrollar la función de transferencia de circuito cerrado y la ecuación característica mediante la utilización de técnicas GFS que mediante la utilización de los métodos de diagramas de bloques que se estudiaron en el capítulo 3. En esta sección se presenta la técnica GFS, pero para una presentación más detallada se remite al lector a la referencia bibliográfica 6.

En la figura **8-46*a*** se muestra la representación gráfica de una función de transferencia en diagrama de bloques y en gráfica de flujo de señal. La figura **8-46*b*** es la representación de un sistema de control por retroalimentación en ambas formas.

Antes de pasar a las reglas de GFS es importante definir algunos términos.

- La variable se representa mediante un ***nodo.***
- La función de transferencia se representa por medio de una ***rama,*** una línea con una flecha, la cual relaciona los nodos que une.
- Una ***trayectoria*** es una sucesión unidireccional y continua de ramas, a lo largo de la cual no se pasa por ningún nodo más de una vez.
- ***La función de transferencia de la trayectoria es*** el producto de las ramas de las funciones de transferencia que se encuentran al recorrer la trayectoria.
- Un ***circuito*** es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo.

En la GFS de la figura **8-46*b*** se encuentran los siguientes valores:

Trayectoria:

$$R(s) \rightarrow E(s) \rightarrow M(s) \rightarrow F(s) \rightarrow C(s) \rightarrow C(s)$$

Función de transferencia de la trayectoria $= G_C(s)G_V(s)G_{P_1}(s)$

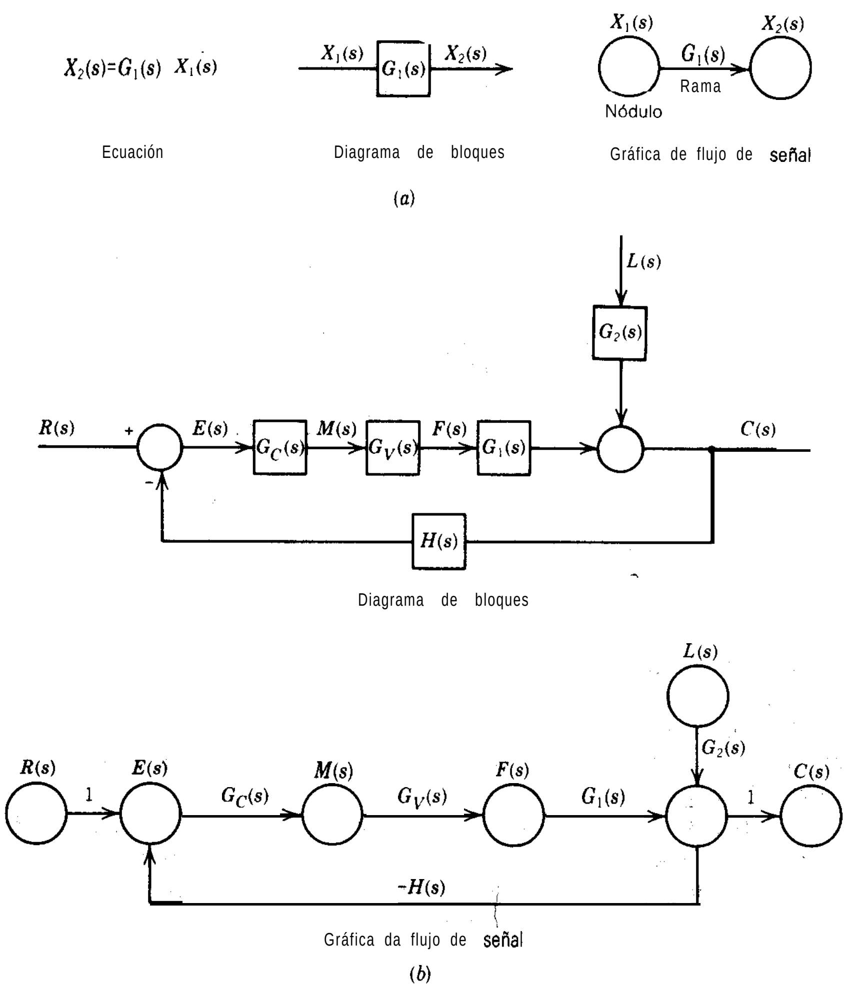


Figura **8-46.** Diagrama de bloques y **representación** en **gráficas** de flujo de señal.

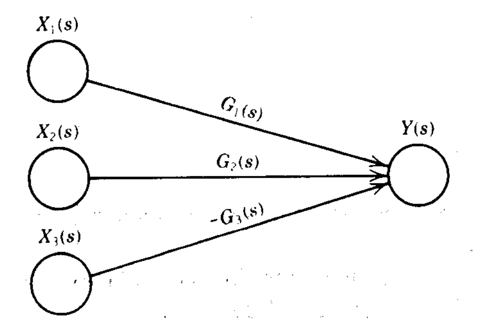
Circuito:

$$E(s) \rightarrow M(s) \rightarrow F(s) \rightarrow C(s) \rightarrow E(s)$$

$$\text{Función de transferencia del circuito} = -\ G_C(s)G_V(s)G_{P_1}(s)H(s)$$

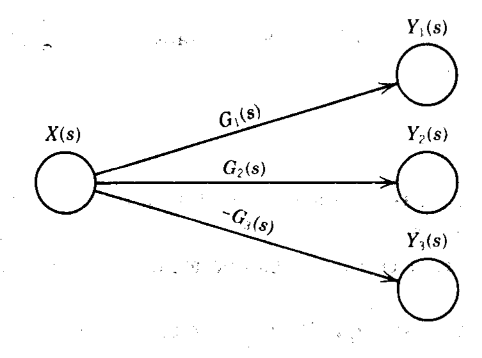
En la figura 8-47 se ínuestran algunas de las **reglas** que se necesitan en el **álgebra** de las gráficas de flujo de señal.

Con dichas reglas y las definiciones anteriores se puede determinar la función de transferencia que se requiere, a partir de la **gráfica** de flujo de señal. Con este propósito se utiliza la ***fórmula** de ganancia de **Mason**.*



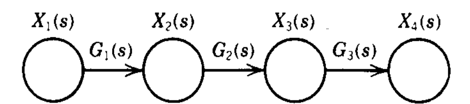
1. Regla de adición

$$Y(s) = G_1(s)X_1(s) + G_2(s)X_2(s) - G_3(s)X_3(s)$$



2. Regla de transmisión

$$Y_1(s) = G_1(s)X(s)$$
$$Y_2(s) = G_2(s)X(s)$$
$$Y_3(s) = -G_3(s)X(s)$$



3. Regla de multiplicación

$$X_4(s) = G_3(s)X_3(s) = G_3(s)G_2(s)X_2(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)X_1(s)$$

Figura 8-47. Reglas del álgebra de las gráficas de flujo de señal.

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} \tag{8-27}$$

donde:

T = factor de transmisión (función de transferencia) entre el nodo de entrada y el de salida.
P_i = producto de la función de transferencia en la iava trayectoria hacia adelante entre el nodo de entrada y el de salida
A = determinante de la gráfica de flujo de señal o ecuación característica
$= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j L_{jk}$
$= 1 - \sum_j L_{j1} + \sum L_{j2} - \sum_j L_{j3} + \ldots$
L_{j1} = producto de todas las funciones de transferencia en el circuito individual j
L_{j2} = producto de todas las funciones de transferencia en el grupo j de 2 circuitos que no se tocan
L_{j3} = producto de todas las funciones de transferencia en el grupo j de 3 circuitos que no se tocan

L_{jk} = producto de todas las funciones de transferencia en el grupo j de k circuitos que no se tocan
Δ_i = evaluación de A con circuitos que tocan P_i eliminados

Los circuitos que se tocan son aquellos que al menos tienen un nodo en común.

Ahora se verán varios ejemplos acerca de la utilización de GFS para obtener las funciones de transferencia que se desean.

Ejemplo 8-7. Se considera el diagrama de bloques que aparece en la figura 8-466 y se utiliza la gráfica de flujo de señal para determinar las funciones de transferencia de circuito cerrado.

$$\frac{C(s)}{R(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C(s)}{L(s)}$$

En la figura *8-466* se muestra la gráfica de flujo de señal para este diagrama de bloques.

Para la primera de las funciones de transferencia que se requieren

$$T = \frac{C(s)}{R(s)}$$

sólo hay una trayectoria hacia adelante entre el nodo de entrada, *R(s), y* el nodo de salida, C(s). También existe un solo circuito, por lo tanto

Trayectoria

$$P_1 = G_C(s)G_V(s)G_1(s)$$

Circuito

$$L_{11} = - G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)$$

$$A = 1 + G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)$$

Puesto que **sólo** con un circuito se toca la trayectoria hacia adelante, $\Delta_1 = 1$; entonces, se puede determinar que

$$\sum_i P_i\Delta_i = G_C(s)G_V(s)G_1(s)$$

Finalmente, se encuentra

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s)G_V(s)G_1(s)}{1 + G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)}$$

el cual es el resultado que se esperaba.

Para la otra función de transferencia que se requiere

$$T - \frac{C(s)}{L(s)}$$

también en este caso **sólo** hay una trayectoria entre el nodo de entrada, **$L(s)$**, y el nodo de salida, C(s), y **sólo** un laxo de este sistema toca a la trayectoria, de manera que

Trayectoria

$$P_1 = G_2(s)$$

Circuito

$$L_{11} = - G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)$$

$$A = 1 + G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)$$

$$A, = 1$$

Entonces, se encuentra que

$$\sum_i P_i\Delta_i = G_2(s)$$

Y, finalmente, se obtiene

$$\frac{C(s)}{L(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_C(s)G_V(s)G_1(s)H(s)}$$

el cual es nuevamente el resultado que se esperaba.

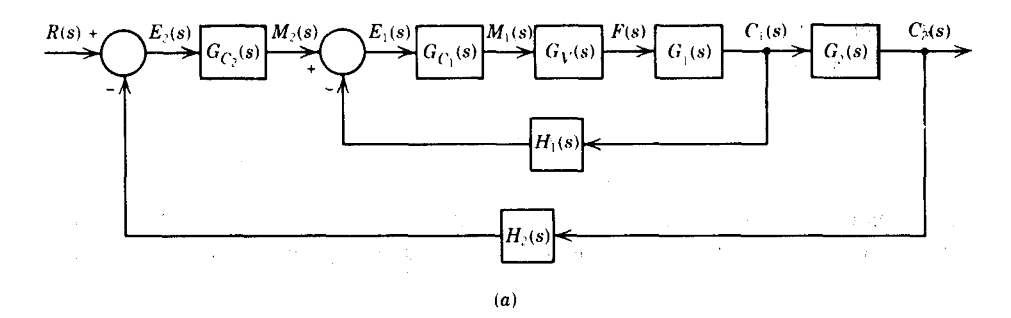
Ejemplo 8-8. Ahora se considera el diagrama de bloques del sistema de control en cascada que aparece en la figura 8-48*a*, y se debe obtener

$$\frac{C_2(s)}{R(s)}$$

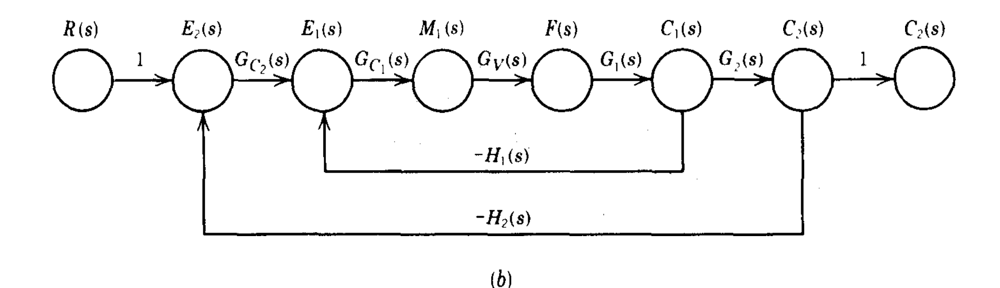
Para determinar

$$T = \frac{C_2(s)}{R(s)}$$

el primer paso es dibujar la gráfica de flujo de señal, como se muestra en la figura 8-486. Sólo existe una trayectoria entre $R(s)$ y $C_2(s)$ con la cual se tocan los dos circuitos del sistema; además, ambos circuitos se tocan entre si.



(*a*)



(*b*)

Figura 8-48. Diagrama de bloques y gráfica de flujo de señal de un sistema de control en cascada.

Trayectoria

$$P_1 = G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)$$

Circuitos

$$L_{11} = -G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)H_1(s)$$

$$L_{21} = -G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)H_2(s)$$

$$A = 1 + G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)H_1(s) + G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)H_2(s)$$

Puesto que se toca la trayectoria única con ambos circuitos, $\Delta_1 = 1$, y se encuentra que

$$\sum_i P_i\Delta_i = G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)$$

Y, finalmente, se obtiene

$$\frac{C_2(s)}{R(s)} = \frac{G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)H_1(s) + G_{C2}(s)G_{C1}(s)G_V(s)G_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

Ejemplo 8-9. Se considera el diagrama de bloques de la figura 8-49*a*, con el cual se describe un sistema multivariable 2 x 2. Para simplificar el diagrama de bloques se puede definir lo siguiente:

$$G_{P11}(s) = G_{V1}(s)G_{11}(s)H_1(s)$$

$$G_{P21}(s) = G_{V1}(s)G_{21}(s)H_2(s)$$

$$G_{P12}(s) = G_{V2}(s)G_{12}(s)H_1(s)$$

$$G_{P22}(s) = G_{V2}(s)G_{22}(s)H_2(s)$$

Por lo tanto, el diagrama de bloques es el que se muestra en la figura 8-49*b*. Se debe determinar

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C_2(s)}{R_1(s)}$$

Como se hace generalmente, primero se dibuja el diagrama de bloques en forma de gráfica de flujo de señal, como se muestra en la figura 8-50.

Primero se obtiene

$$T = \frac{C_1(s)}{R_1(s)}$$

En este sistema existen varios circuitos y trayectorias posibles.

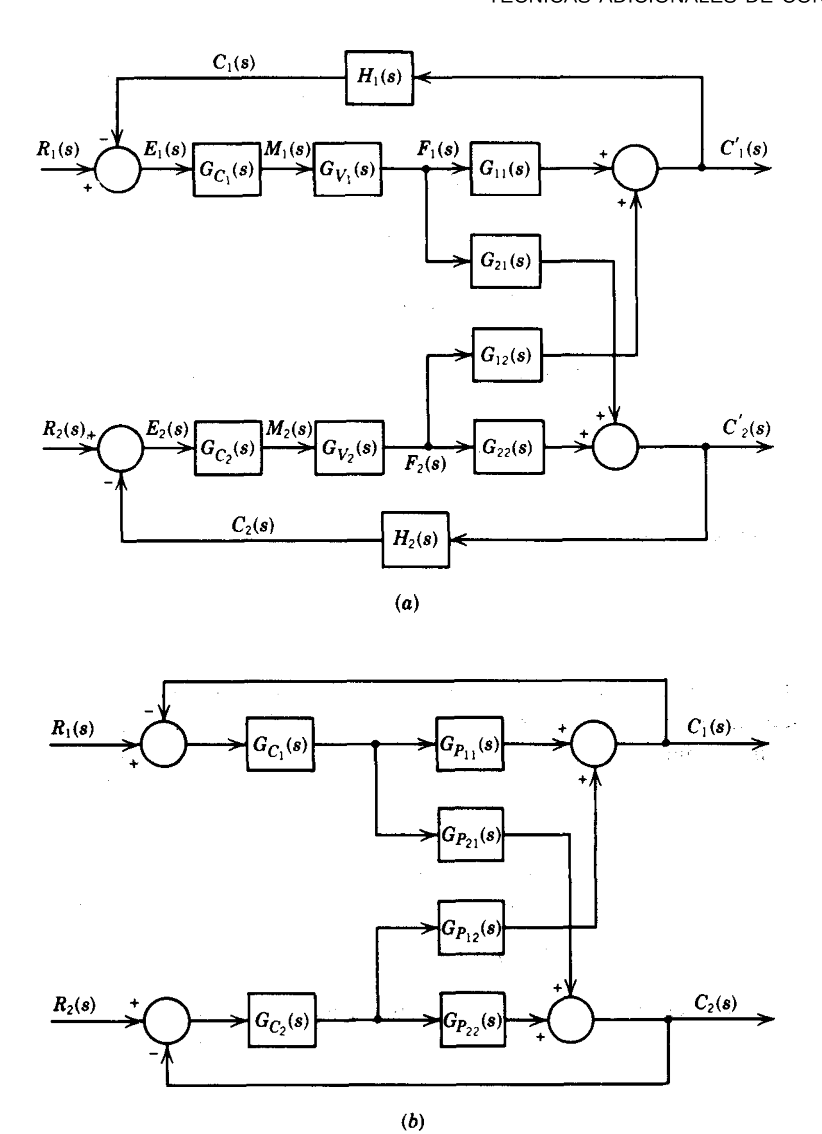


Figura *849*. Diagrama de bloques de un sistema multivariable 2 x 2.

Trayectorias

$$P_1 = G_{C1}(s)G_{P11}(s)$$

$$P_2 = - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P21}(s)$$

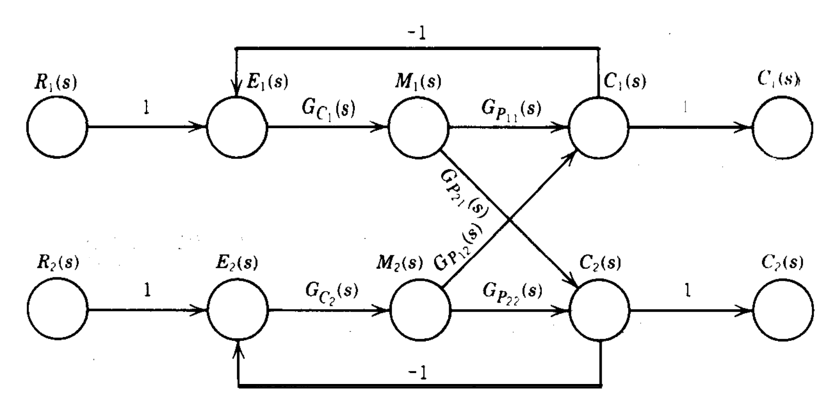


Figura **8-50.** Gráfica de flujo de señal para un sistema multivariable 2 x 2.

Circuitos

$$L_{11} = -G_{C1}(s)G_{P11}(s)$$
$$L_{21} = -G_{C2}(s)G_{P22}(s)$$
$$L_{31} = G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$
$$L_{12} = G_{C1}(s)G_{P11}(s)G_{C2}(s)G_{P22}(s)$$

Los circuitos L_{11} y L_{12} son los de retroalimentación que ya se conocen. El circuito L_{31} es más complicado y pasa a través de ambos circuitos de retroalimentación. El circuito L_{12} es el producto de multiplicar los circuitos L_{11} y L_{21}, ya que son circuitos que no se tocan. Entonces, se obtiene

$$\Delta = 1 + G_{C1}(s)G_{P11}(s) + G_{C2}(s)G_{P22}(s) - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$
$$+ G_{C1}(s)G_{P11}(s)G_{C2}(s)G_{P22}(s)$$

Si se utiliza álgebra, la A se puede escribir como sigue:

$$\Delta = [1 + G_{C1}(s)G_{P11}(s)][1 + G_{C2}(s)G_{P22}(s)] - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$

Este último paso no es necesario, sin embargo, se verá que es útil en el estudio de la estabilidad del control multivariable que se hará posteriormente en este capitulo. Se continúa para encontrar

$$\Delta_1 = 1 + G_{C2}(s)G_{P22}(s)$$
$$\Delta_2 = 1$$

De lo anterior, se ve que

$$\sum_i P_i\Delta_i = G_{C1}(s)G_{P11}(s)\,[1 + G_{C2}(s)G_{P22}(s)] - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$

Y, finalmente, se obtiene

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{C1}(s)G_{P11}(s)\,[1 + G_{C2}(s)G_{P22}(s)] - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)}{[1 + G_{C1}(s)G_{P11}(s)]\,[1 + G_{C2}(s)G_{P22}(s)] - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)}$$

Para la otra función de transferencia que se busca

$$T = \frac{C_1(s)}{R_2(s)}$$

los circuitos son los mismos, pero las trayectorias cambian

Trayectoria

$$P_1 = G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$

Por lo tanto, $\Delta_1 = 1$ y

$$\sum_i P_i\Delta_i = G_{C2}(s)G_{P12}(s)$$

Finalmente, se ve que

$$\frac{C_1(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{C2}(s)G_{P12}(s)}{[1 + G_{C1}(s)G_{P11}(s)]\,[1 + G_{C2}G_{P22}(s)] - G_{C1}(s)G_{P21}(s)G_{C2}(s)G_{P12}(s)}$$

Como se vio en estos ejemplos, la técnica de gráfica de flujo de señal es una herramienta' simple y poderosa, la cual representa una manera de obtener las funciones de transferencia de circuito cerrado que serán difíciles de obtener mediante el álgebra de diagramas de bloques.

Selección de pares de variables controladas y manipuladas

La primera pregunta que se hizo al principio de esta sección se relaciona con la forma de agrupar por pares (parear) las variables controladas y las manipuladas. La mayoría de las veces, la decisión sobre la agrupación por pares es simple, pero algunas veces es más difícil. Ejemplos de casos difíciles son el sistema de mezcla que aparece en la figura 8-45*a* y el reactor químico que se muestra en la figura 8-456. Para estos ejemplos existe una técnica con la que se tiene éxito en numerosos procesos industriales; se utiliza un procedimiento 2 x 2 para presentar los fundamentos de la técnica (ver figura 8-51); después de hacer esto, se extiende el método a procesos $n \times n$. En esta notación la primera n es la cantidad de variables controladas, y la segunda n es la cantidad de variables manipuladas.

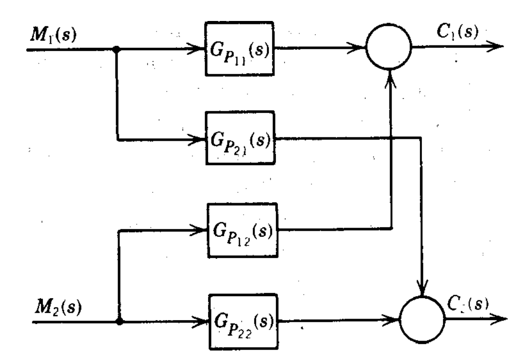


Figura 8-51. Diagrama de bloques parcial de un proceso multivariable 2 x 2.

Para empezar, tiene sentido que cada variable controlada se controle mediante la variable manipulada que ejerce mayor "influencia" sobre aquélla. En este contexto, la influencia y la ganancia tienen el mismo significado y, en consecuencia, para tomar una decisión se deben encontrar todas las ganancias del proceso (4 ganancias para un sistema 2 X 2). Específicamente, las ganancias de estado estacionario de circuito abierto de **interés** son las siguientes:

$$K_{11} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{m_2} \qquad K_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{m_1}$$

$$K_{21} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{m_2} \qquad K_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{m_1}$$

donde K_{ij} es la ganancia que **relaciona** la variable controlada i con la variable **manipulada** j.

'Las cuatro ganancias se pueden ordenar en forma de matriz, a fin de tener una descripción gráfica de su relación con las variables controlada y **manipulada.** La matriz se conoce como matriz de ganancia de estado estacionario (MGEE) (SSGM por sus siglas en inglés), y se muestra en la figura 8-52.

Con base en esta MGEE, parecerfa que debiera elegirse la combinación de variable controlada y manipulada con que se obtiene el valor absoluto más grande en cada línea; es decir, si $|K_{12}|$ es mayor que $|K_{11}|$, **entonces** se debe elegir m_2 para controlar a c_1; sin

	m_1	m_2
C_1	K_{11}	K_{12}
C_2	K_{21}	K_{22}

Figura 8-52. Matriz de ganancia de estado estacionario (MGEE).

embargo, esta manera de elegir el par de variable controlada y manipulada no es completamente correcta, ya que las ganancias K_{ij} pueden tener diferentes unidades y, consecuentemente, no es posible hacer la comparación. Como se ve, la matriz depende de las unidades y, por lo tanto, no es útil para este propósito.

Para normalizar la MGEE y hacerla independiente de las unidades, se propone una **técnica** que desarrolló Bristol”), cuyos resultados probaron ser buenos; dicha técnica se denomina ganancia relativa de la matriz (GRM) o medida de interacción.

En la forma en que la propuso Bristol, los términos de la GRM se definen como sigue:

$$\mu_{11} = \frac{\left.\dfrac{\partial c_1}{\partial m_1}\right|_{m2}}{\left.\dfrac{\partial c_1}{\partial m_1}\right|_{c2}} \approx \frac{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{m2}}{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c2}} = \frac{K_{11}}{K'_{11}}$$

0, en general

$$\mu_{ij} = \frac{\left.\dfrac{\partial c_i}{\partial m_j}\right|_{m}}{\left.\dfrac{\partial c_i}{\partial m_j}\right|_{c}} \qquad (8\text{-}28)$$

Para asegurar que se entienda el significado e importancia de todos los términos de la ecuación **(8-28),** se analizan a continuación. El numerador

$$\left.\frac{\partial c_i}{\partial m_j}\right|_{m}$$

es la ganancia de estado estacionario, K_{ij}, que se definió anteriormente; es decir, es la ganancia de m_j sobre c_i cuando todas las demás variables manipuladas se mantienen constantes , El denominador

$$\left.\frac{\partial c_i}{\partial m_j}\right|_{c}$$

es otro tipo de ganancia, K'_{ij} ; ésta es la ganancia de m_j sobre c_i cuando se cierran todos los demás circuitos, y se supone que los demás controladores tienen acción integral; por lo tanto, todas las demás variables controladas regresan a su punto de control. En consecuencia, se puede escribir

$$\mu_{ij} = \frac{\text{ganancia cuando se abren los demás circuitos}}{\text{ganancia cuando se cierran los demás circuitos}} = \frac{K_{ij}}{K'_{ij}}$$

	m_1	m_2
C_1	μ_{11}	μ_{12}
C_2	μ_{21}	μ_{22}

Figura 8-53. Matriz de ganancia relativa (MGR).

Como se aprecia en esta definición, el término de ganancia relativa es una cantidad sin dimensiones, la cual se puede utilizar para decidir la agrupación por pares de las variables controlada y manipulada.

Una vez que se evalúan los **términos** de ganancia relativa, es posible formar la matriz de ganancia relativa que se muestra en la figura 8-53; a partir de dicha matriz se puede hacer la agrupación por pares de variables controlada y manipulada. Antes de presentar la regla de agrupación por pares se tratara de lograr una mejor comprensión de los términos de ganancia relativa.,

Una propiedad de la matriz de ganancia relativa es que la suma de todos los términos en cada columna debe ser igual a uno, lo cual quiere decir que, para un sistema 2 X 2, únicamente se requiere **evaluar** un término, y los otros se pueden obtener mediante esta propiedad. En un sistema 3 x 3, en el cual existen nueve términos en la matriz, **sólo** se necesita evaluar cuatro **términos** independientes, y los otros se obtienen mediante aritmética simple. Esta propiedad se probará posteriormente en la presente sección.

Antes de proceder a la evaluación de μ_{ij} se debe comprender su significado. A partir de la definición de μ_{ij}, se observa que es una medida del efecto de cerrar todos los demás circuitos sobre la ganancia de proceso para un cierto par de variable controlada y manipulada. Por lo tanto, el valor numérico de μ_{ij} es una medida de la interacción entre los circuitos.

Si $\mu_{ij} = 1$, esto significa que, cuando se abren todos los demás circuitos, la ganancia del proceso es la misma que cuando se cierran; **esto indica** que entre el circuito de interés y los demás circuitos no hay- interacción o posible interacción que elimine la desviación. Cuanto más **se desvía** μ_{ij} de 1, tanto mayor es la interacción entre los circuitos.

Si $\mu_{ij} = 0$, esto puede deberse a dos posibilidades: primera, la ganancia de circuito abierto, $\left.\dfrac{\partial c_i}{\partial m_j}\right|_m$, puede ser cero, en este caso m_j no afecta a c_i, al menos en términos de lazos abiertos. Segunda, la ganancia de circuito cerrado es tan grande que $\mu_{ij} \approx 0$, esto significa que los demás interactúan en gran medida con el circuito de interés para mantener constantes las otras variables. En todo caso, cualquiera de las dos posibilidades indica que c_i no se debe controlar con m_j.

Si $\mu_{ij} = \infty$, la ganancia de circuito cerrado es cero o muy pequeña, lo cual significa que, cuando los demás circuitos se sitúan en automático, el lazo de interés no se puede controlar, porque m_j afecta a c_i muy poco o nada en absoluto. La única forma de controlar este circuito es colocar los demás circuitos en manual, y **¡ciertamente,** esta situación no es deseable!

En los tres últimos párrafos se presentaron los casos extremos del problema de multivariables. En general, los valores de ganancias relativas cercanos a la unidad representan combinaciones de variables controlada y manipulada que se pueden controlar; los valores de las ganancias relativas que tienden a cero representan combinaciones que no se pueden controlar.

Con esta base se puede presentar la regla para parear las variables controlada y manipulada. Bristol”’ presentó primero esta regla ***de agrupación por pares y,*** posteriormente, Koppel[16] la modificó como sigue:

Siempre se agrupan por pares los elementos positivos de la MGR más cercanos a 1 .0. La estabilidad de los pares se verifica mediante el teorema de Niederlinski; si el par da origen a un sistema inestable, entonces se elige otro par positivo con valores cercanos a 1 .0. Siempre que sea posible, se evitará la agrupación por pares negativa.

El teorema de Niederlinski[17] es una forma conveniente de verificar la estabilidad del par que se propone. En la utilización de este teorema se supone que los pares propuestos son los elementos en diagonal, $m_j - c_i$, en la MGEE. Por lo tanto, el enunciado del teorema es:

El sistema de circuito cerrado que resulta de agrupar por pares $m_1 - c_1, m_2 - c_2, \ldots,$ $m_n - c_n$ es inestable si y sólo si

$$\frac{|MGEE|}{\prod_{i=1}^{n} K_{ii}} < 0$$

donde MGEE es el determinante de MGEE y K_{ij} son los elementos en diagonal de la matriz.

La regla de agrupación por pares que se propone es conveniente y fácil de utilizar, se observará que únicamente se necesita información de estado estacionario, lo cual es ciertamente una ventaja, ya que esta información se puede obtener durante la etapa de diseño del proceso y, por tanto, no se requiere que la planta o el proceso estén en operación. En la próxima sección se abordarán diferentes formas para obtener las ganancias de estado estacionario. Para una exposición amplia de la regla de agrupación por pares (pareo) y el tema completo de control multivariable, se recomienda al lector leer la monografía de McAvoy[15].

Para concluir esta presentación, se estudiarán dos MGR posibles y se explicará que indican los términos μ_{ij} sobre el sistema de control. Primero se considera la siguiente MGR:

	m_1	m_2
c_1	***0.2***	***0.8***
c_2	***0.8***	***0.2***

Los términos $\mu_{11} = \mu_{22} = 0.2 = 1/5$ indican que con este par la ganancia de cada circuito se incrementa en un factor de 5 cuando se cierra el otro circuito. Los términos $\mu_{12} = \mu_{21} = 0.8 = 4/5$ indican que con este par la ganancia se incrementa únicamente en un factor de 1.25. Con esto se explica por qué la agrupación por pares de $c_1 - m_2$ y $c_2 - m_1$ es la correcta.

Ahora se considera otra MGR:

	m_1	m_2
c_1	2	-1
c_2	-1	2

Los términos $\mu_{11} = \mu_{22} = 2 = 1/0.5$ indican que la ganancia de cada circuito se corta a la mitad cuando se cierra el otro circuito. Los términos $\mu_{12} = \mu_{21} = -1$ indican que la ganancia de cada circuito cambia de signo cuando se cierra el otro circuito; ciertamente, este último caso no es deseable, ya que significa que la acción del controlador depende de que el otro lazo se abra o se cierre, con lo cual se explica por qué la agrupación por pares correcta es $c_1 - m_1$ y $c_2 - m_2$.

Obtención de las ganancias del proceso y de las ganancias relativas. El proceso de mezcla que se muestra en la figura 8-45*a* se utiliza para revisar los métodos con que se obtienen las ganancias de circuito abierto y para presentar la evaluación de las ganancias relativas.

Para obtener analíticamente las ganancias de estado estacionario con circuito abierto, primero se escriben las ecuaciones con que se describe el proceso; a partir de estas ecuaciones se evalúan las ganancias, K_{ij}. En 'el sistema de mezclado[10] se debe controlar el flujo de salida, F, y la fracción de masa que sale del componente A, x. La expresión para el flujo de salida se deriva de un balance de masa total en estado estacionario:

$$F = A + S \tag{8-29}$$

De un balance de masa de estado estacionario del componente A se obtiene la otra expresión que se requiere:

$$Fx = A$$

o

$$x = \frac{A}{F}$$

Se substituye la ecuación (8-29) en la ecuación para x y se obtiene:

$$x = \frac{A}{A + S} \tag{8-30}$$

En este sistema 2 x 2 hay cuatro ganancias de circuito abierto: K_{FA}, K_{FS}, K_{xA} y K_{xS}. A partir de la ecuación (8-20) se pueden evaluar las primeras dos

$$K_{FA} = \left.\frac{\partial F}{\partial A}\right|_S = 1$$

$$K_{FS} = \left.\frac{\partial F}{\partial S}\right|_A = 1$$

A partir de la ecuación (8-30) es posible evaluar las dos últimas ganancias, como

$$K_{xA} = \left.\frac{\partial x}{\partial A}\right|_S = \frac{S}{(A+S)^2} = \frac{1-x}{F}$$

Y

$$K_{xS} = \left.\frac{\partial x}{\partial S}\right|_A = \frac{-A}{(A+S)^2} = \frac{-x}{F}$$

En consecuencia, la matriz de ganancia de estado estacionario es

	A	S
F	1	1
x	$\frac{1-x}{F}$	$\frac{-x}{F}$

El desarrollo del sistema de ecuaciones descriptivo y la evaluación de las ganancias fue bastante simple para este proceso de mezclado. En algunos procesos esto no se hace fácilmente, por ejemplo, en la columna de destilación, en la máquina de papel y en el reactor químico que aparecen en la figura 8-45. Para estos procesos el sistema de ecuaciones con que se les describe es complejo y, en consecuencia, la evaluación de las ganancias se convierte en una tarea difícil; afortunadamente, el diseño de muchos procesos se hace generalmente mediante simulaciones de estado estacionario por computadora[13], a partir de las cuales es fácil evaluar las ganancias que se requieren; cuando se trata de un sistema 2 x 2, bastan tres corridas en la computadora para obtener las cuatro ganancias. En estos casos no se puede utilizar el diferencial de las variables para obtener las ganancias, sino que se utiliza la siguiente aproximación:

$$K_{ij} \approx \frac{\Delta c_i}{\Delta m_j}$$

Si por alguna razón es imposible utilizar el método analítico o el de simulación por computadora, existe otro método para obtener K'_{ij} cuando se requiere. Dicho método consiste en obtener los datos necesarios para evaluar las ganancias; la técnica para obtener las ganancias de circuito abierto puede ser cualquiera de las técnicas de identificación que se estudiaron hasta ahora, por ejemplo, la prueba de escalón (capítulo 6).

Una vez que se obtienen las ganancias de circuito abierto, la evaluación de las demás ganancias K'_{ij} y los términos de ganancia relativa es bastante directa. Primero se presenta un método para cualquier sistema 2 x 2 y luego se extiende para cualquier sistema de orden superior.

El efecto de un cambio en las variables manipuladas sobre c_1 se puede expresar como sigue:

$$\Delta c_1 = K_{11}\Delta m_1 + K_{12}\Delta m_2 \tag{8-31}$$

De manera semejante, para c_2 se tiene

$$\Delta c_2 = K_{21}\Delta m_1 + K_{22}\Delta m_2 \tag{8-32}$$

Para obtener la ganancia

$$\left.\frac{\partial c_1}{\partial m_1}\right|_{c_2}$$

o

$$\left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c_2}$$

En la ecuación (8-32) se iguala Δc_2 a cero:

$$0 = K_{21}\Delta m_1 + K_{22}\Delta m_2$$

o

$$\Delta m_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta m_1$$

Esta expresión para Δm_2 se substituye en la ecuación (8-31), con lo que se obtiene

$$\Delta c_1 = K_{11}\Delta m_1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{21}} \, Am,$$

y, finalmente, se tiene

$$K'_{11} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c_2} = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}} \tag{8-33}$$

De manera semejante, para la ganancia

$$\left.\frac{\partial c_2}{\partial m_2}\right|_{c_1}$$

0

$$\left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{c_1}$$

En la ecuación (8-31) se iguala Δc_1 a cero:

$$0 = K_{11}\Delta m_1 + K_{12}\Delta m_2$$

O

$$\Delta m_1 = -\frac{K_{12}}{K_{11}}\Delta m_2$$

Esta expresión para Δm_1 se substituye en la ecuación (8-32), con lo que se obtiene

$$\Delta c_2 = -\frac{K_{21}K_{12}}{K_{11}}\Delta m_2 + K_{22}\Delta m_2$$

y, finalmente, se obtiene

$$K'_{22} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_2}\right|_{c_1} = \frac{K_{22}K_{11} - K_{21}K_{12}}{K_{11}} \tag{8-34}$$

Se sigue el mismo procedimiento para evaluar las otras dos ganancias K'_{ij}

$$K'_{12} = \left.\frac{\Delta c_1}{\Delta m_2}\right|_{c_2} = \frac{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}}{K_{21}} \tag{8-35}$$

Y

$$K'_{12} = \left.\frac{\Delta c_2}{\Delta m_1}\right|_{c_1} = \frac{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}}{K_{12}} \tag{8-36}$$

Es interesante e importante observar que las ganancias K'_{ij} se pueden evaluar de manera simple mediante una combinación de ganancias de circuito abierto. Una vez que se obtienen dichas ganancias, la evaluación de las ganancias relativas se hace como sigue:

$$\mu_{11} = \frac{\left.\dfrac{\partial c_1}{\partial m_1}\right|_{m2}}{\left.\dfrac{\partial c_1}{\partial m_1}\right|_{c2}} \approx \frac{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{m2}}{\left.\dfrac{\Delta c_1}{\Delta m_1}\right|_{c2}} = \frac{K_{11}}{\dfrac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}}}$$

$$\mu_{11} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \tag{8-37}$$

Las otras ganancias relativas se obtienen de manera similar

$$\mu_{12} = \frac{K_{12}K_{21}}{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}} \tag{8-38}$$

$$\mu_{21} = \frac{K_{21}K_{12}}{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}} \tag{8-39}$$

y

$$\mu_{22} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \tag{8-40}$$

Finalmente, la matriz de ganancia relativa es

	m_1	m_2
c_1	$\dfrac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$	$\dfrac{K_{12}K_{21}}{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}}$
c_2	$\dfrac{K_{21}K_{12}}{K_{21}K_{12} - K_{11}K_{22}}$	$\dfrac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$

La combinación correcta de variables controlada, y manipulada se elige con base en esta matriz, mediante la regla de agrupación por pares que se presentó antes.

En la matriz se observa fácilmente que los términos en cada fila y encada columna suman uno. También se observa fácilmente la consistencia dimensional de cada término.

Al aplicar la matriz de ganancia relativa al ejemplo del proceso de mezcla, se obtiene

	A	S
F	x	$1 - x$
x	$1 - x$	x

La agrupación por pares depende del valor de x; si $x > 0.5$, el par correcto es $F - A$ y $x - S$. Si $x < 0.5$, el par Correcto será $F - S$ y $x - A$. Con un valor de $x = 0.5$

se logra que todas las μ sean iguales a 0.5. En un sistema 2 x 2 esto indica el grado más alto de interacción.

En los pasos que se siguieron para desarrollar la matriz de ganancia relativa para un sistema 2 x 2 se requiere únicamente álgebra simple. Para un sistema de orden superior se puede seguir el mismo procedimiento, sin embargo, se necesitan más pasos algebraicos para llegar a la solución final. En estos sistemas de orden superior se puede utilizar el álgebra de matrices para simplificar el desarrollo de la matriz de ganancia relativa. El procedimiento que propuso Bristol[7] es el siguiente:

> Se calcula la transpuesta de la inversa de la matriz de estado estacionario y se multiplica cada término de la nueva matriz por el término correspondiente en la matriz original. Los términos que se obtienen son los de la "(matriz de) medida de interacción" o matriz de ganancia relativa.

A las personas que no están familiarizadas con el álgebra de matrices este procedimiento puede parecerles fuera de lugar, pero ya que este método es bastante útil, vale la pena superar dicha dificultad; existen computadoras digitales con las que se pueden generar los números necesarios. Con este procedimiento se obtiene la misma matriz de ganancia relativa que se obtuvo con el mostrado anteriormente en la aplicación a cualquier sistema 2 × 2.

Índice de interacción. Nisenfeld y Schultz[8] definen el índice de interacción para un sistema multivariable en el que se utiliza la variable manipulada m_j para controlar la variable c_i de la siguiente manera:

$$I_{ij} \equiv \left| \frac{1 - \mu_{ij}}{\mu_{ij}} \right| \tag{8-41}$$

donde las barras indican el valor absoluto de la cantidad que encierran. *Estos autores establecieron que, con un índice de interacción menor a uno, se evita la inestabilidad que se debe a la interacción de los circuitos.*

A fin de lograr una mejor comprensión de este índice, se considera el sistema de mezclado que se muestra en la figura 8-54. Con el controlador de flujo se ajusta la corriente A, y con el contrdador de composición se ajusta la corriente S.

Un índice de interacción propio de este proceso es

$$I_{FA} = \left| \frac{1 - \mu_{FA}}{\mu_{FA}} \right| = \left| \frac{K_{FS}K_{xA}}{K_{FA}K_{xS}} \right|$$

Si hay un cambio en el punto de control de la razón de flujo, se detecta una desviación AF en el controlador de flujo; la acción correctiva en este controlador sería $\Delta A = \dfrac{AF}{K_{FA}}$ (en magnitud), para mover la razón de flujo a un nuevo punto de control: A causa de

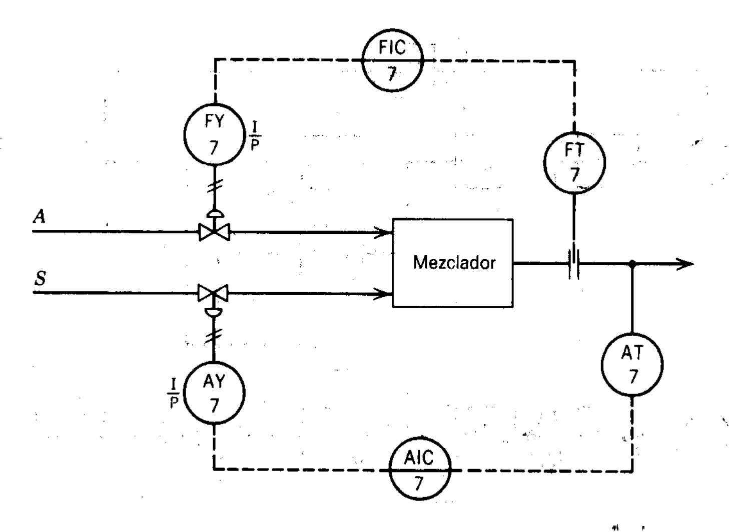


Figura 8-54. Sistema de mezclado.

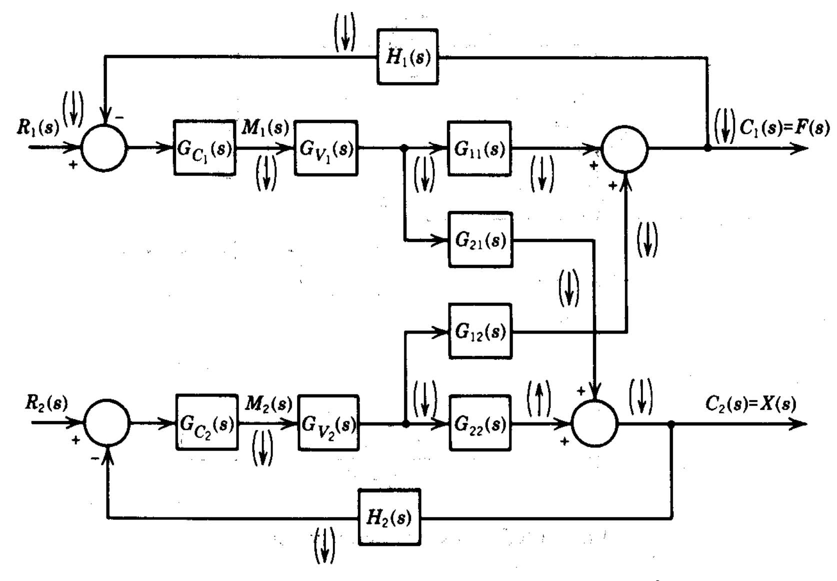
la interacción, con este cambio en la corriente A se provoca un cambio en la composición expresada por $\Delta x = K_{xA}\Delta A = K_{xA}\Delta F/K_{FA}$; este cambio en la composición se detecta en el controlador de composición, donde se toma una acción correctiva para regresar la composición al punto de control; la magnitud de esta acción sobre la corriente S es $\Delta S = \Delta x/K_{xS} = K_{xA}\Delta F/K_{FA}K_{xS}$. Finalmente, y nuevamente a causa de la interacción, este cambio en la corriente S ocasiona una desviación en la razón de flujo de magnitud $\Delta F' = K_{FS}\Delta S = K_{FS}K_{xA}\Delta F/K_{FA}K_{xS} = I_{FA}\Delta F$. Conforme se continúa, se observa que se completa un ciclo, el cual se repite hasta que todas las desviaciones se terminan. Se notara que, para que esto ocurra, el índice de interacción, I_{FA}, debe ser menor a la unidad, a fin de que después de completar un ciclo las desviaciones de flujo, $\Delta F'$, sean menores que la desviación, ΔF, al inicio del, ciclo. Si el índice de interacción es mayor que la unidad, las desviaciones se incrementaran después de cada ciclo, hasta que la salida del controlador llegue a la saturación, la cual es una situación altamente indeseable.

En los sistemas' de orden superior se pueden calcular los índices de interacción para cada agrupación por pares posible mediante la ecuación

$$I_{ij} = \left| \frac{1 - \mu_{ij}}{\mu_{ij}} \right|$$

Aquellas combinadones con las que se obtengan valores mayores a la unidad se deben descartar.

Interacción positiva y negativa. La interacción positiva es la interacción que existe cuando todos los términos de ganancia relativa son positivos. Esinteresante observar bajo qué condiciones se da' este tipo de interacción; se puede aprender'mucho de la' expresión de μ_{11} para un sistema 2 x 2:



Se usa la siguiente notación:

$C_i(s)$ = transformada de Laplace de la variable controlada, i
$M_i(s)$ = transformada de Laplace de la variable manipulada, i la cual es la salida del controlador i
$H_i(s)$ = función de transferencia del sensor-transmisor i
$G_{vi}(s)$ = función de transferencia de la válvula i
$G_{ij}(s)$ = función de transferencia que describe la forma en que el flujo de la corriente j afecta a la variable i controlada

Figura 8-55. Diagrama de bloques con notación para el sistema de mezclado.

$$\mu_{11} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} = \frac{1}{1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}} \tag{8-42}$$

Si la cantidad de K' positivas es impar, entonces el valor de μ_{11} será positivo y, además, su valor numérico estará entre 0 y 1. La demostración de 'que tsta es una regla general es bastante simple, queda al lector hacerla.

La interacción positiva es el tipo más común de interacción en los sistemas de control multivariable. En estos sistemas existe "ayuda" de los circuitos de control entre sí; con el fin de explicar lo que esto significa, se considera el sistema de mezclado que aparece en la figura 8-54 y su diagrama de bloques que se muestra en la figura 8-55. En este sistema las ganancias de las válvulas de control son positivas, ya que ambas requieren aire para abrirse. Las ganancias K_{11}, K_{21} y K_{12} también son positivas; en cambio, que la ganancia K_{22} es negativa. El controlador de flujo, $G_{C1}(s)$, es de acción inversa; en tanto que el controlador analizador, $G_{C2}(s)$, es de acción directa. Ahora se supone que el punto de control del controlador de flujo decrece (1) y que, a su vez, la salida del controlador de flujo desciende, $G_{C1}(s)$, con lo cual la salida de $G_{V1}(s)$ y $G_{11}(s)$ decrece (↓). Puesto

que K_{21} es positiva, la salida de $G_{21}(s)$ también decrece (1) cuando la salida de $G_{V1}(s)$ decrece, de lo que resulta un descenso en el análisis $X(s)$ (1); cuando esto sucede, la salida del controlador de análisis, $G_{C2}(s)$, decrece (1), lo cual ocasiona que la salida de $G_{V2}(s)$ y $G_{12}(s)$ decrezca (1) y que la salida de $G_{22}(s)$ se incremente (↑). En la figura 8-55 se muestran las flechas con que se indica la dirección en que se mueve la salida de cada bloque. En la figura se aprecia claramente que tanto la salida de $G_{11}(s)$ como la de $G_{12}(s)$ decrecen; esto significa que "ambos circuitos se ayudan entre sí".

Cuando existe una cantidad par de valores positivos de K o una cantidad igual de valores positivos y negativos de K, el valor de μ_{11} es mayor de 1 o menor que 0; en cualquier caso, habrá algunas μ_{ij} con valores negativos en la misma fila y columna. En este caso se dice que la interacción es negativa. Es importante tener en cuenta que, para que un término de gananciarelativa sea negativo, los signos de las ganancias de circuito abierto y los de las ganancias de circuito cerrado deben ser diferentes, lo cual significa que la ganancia-del controlador por retroalimentacidn *debe* ser inversa cuando se cierran-los demás circuitos. En este tipo de interacción los circuitos de control se "combaten" entre sí; se deja al lector la demostración de esto.

Ajuste del controlador en sistemas con interacción. El ajuste de los controladores en los sistemas con interacción es una labor difícil. Shinskey[9] recomienda ajustar cada controlador con los demás controladores en manual, de modo que, cuando se colocan en automático, se afina el ajuste (se retoca el ajuste); esta afinación se puede hacer con base en el termino de ganancia relativa de ese circuito; específicamente, se multiplica la ganancia del controlador por el término de ganancia relativa (se multiplica la banda proporcional por el recíproco del término de la ganancia relativa). Esto se deriva del hecho de que los términos de ganancia relativa son iguales a la razón de la ganancia de circuito abierto respecto a la ganancia de circuito cerrado.

Si en el sistema dé mezclado que se estudió anteriormente se desea que la concentración sea x = 0.6, los términos de ganancia relativa son $\mu_{FA} = \mu_{xS} = 0.6$ y la agrupación por pares apropiada. es F-A y x-S. Si con el controlador de composición en manual resulta una ganancia de 0.5 (200 % PB) del ajuste del controlador de flujo, ésta se debe reajustar a (0.6)(0.5) — 0.3 (333% PB). Para la ganancia del controlador' de composición que se obtiene mediante el ajuste con 'el controlador de flujo en manual se debe hacer una afinación semejante.

Es interesante observar que los términos de la matriz de ganancia relativa son útiles, no sólo como ayuda para decidir sobre la agrupación por pares de las variables controlada y manipulada, sino también para corregir los parámetros-de ajuste'del controlador que cuentan para la interacción.

Interacción y estabilidad

Ahora se utiliza el sistema de mezclado de la figura 8-54 para contestar la pregunta acerca de la forma en que la interacción entre los circuitos afecta a la estabilidad de los mismos. La interacción que existe en este proceso se muestra gráficamente en la figura 8-55. Se notara que con cualquier cambio en la salida del controlador 1 no sólo se afecta a $C_1(s)$

sino **también** a $C_2(s)$, lo cual también es verdad para cualquier cambio en la salida del controlador 2.

Como se explicó en los capítulos 6 y 7, la. estabilidad de los circuitos de control se define con las raíces de la ecuación característica. En el sistema de la figura 8-55 las ecuaciones características de cada circuito individual son

$$1 + G_{C1}(s)G_{V1}(s)G_{11}(s)H_1(s) = 0 \tag{8-43}$$

Y

$$1 + G_{C2}(s)G_{V2}(s)G_{22}(s)H_2(s) = 0 \tag{8-44}$$

Como ya se vio, cada circuito es estable si en las raíces de la ecuación característica hay partes reales negativas. Para analizar la estabilidad del sistema de control *completo* que aparece en la figura 8-55, primero se debe determinar la **ecuación característica** para el sistema completo; como se ve en el ejemplo 8-9,. esta ecuación característica es

$$[1 + G_{C1}(s)G_{V1}(s)G_{11}(s)H_1(s)][1 + G_{C2}(s)G_{V2}(s)G_{22}(s)H_2(s)] - G_{C1}(s)G_{V1}(s)G_{C2}(s)G_{V2}(s)G_{12}(s)G_{21}(s)H_1(s)H_2(s) = 0 \tag{8-45}$$

Los términos entre corchetes son las ecuaciones características de las circuitos individuales. Mediante el análisis de esta ecuación se puede llegar a las siguientes conclusiones para un sistema 2 × 2:

1. Las raíces de la ecuación característica de cada circuito individual *no* son las de la ecuación característica para el sistema completo y, por lo tanto, es posible que el sistema completo sea inestable a pesar de que cada circuito sea estable individualmente. "Sistema completo" significa que ambos circuitos se ponen en automático **simultáneamente.**
2. Para que la interacción afecte a la estabilidad del sistema completo debe de trabajar de los dos modos; es decir, cada variable manipulada debe afectar a ambas variables controladas. Si $G_{12}(s) = 0$ o $G_{21}(s) = 0$, desaparece el último término de la ecuación característica y, por lo tanto, si cada circuito es estable individualmente, el sistema completo también es estable. Cuando la interacción trabaja de,, los dos modos. se dice que el sistema es totalmente acoplado; cuando la interacción, sólo trabaja de un modo se dice que el sistema está parcialmente acoplado o acoplado a medias. La interacción no causa problemas en un sistema acoplado a medias.
3. El efecto de la interacción sobre un circuito se puede eliminar mediante la interrupción del otro circuito, lo cual se hace **fácilmente** mediante el "cambio" de un controlador a manual. Si se supone que el controlador 2 se cambia a manual, el efecto de esto es hacer $G_{C2}(s) = 0$, de lo que resulta& siguiente ecuación característica:

$$1 + G_{C1}(s)G_{V1}(s)G_{11}(s)H_1(s) = 0$$

que es la misma en caso de que. sólo existiera un lazo. Ésta es una de las razones por las cuales en la industria muchos controladores se ponen manual. Los cambios manuales en la salida del controlador 2 se convierten en simples perturbaciones para el circuito 1.

Sin embargo, generalmente no es necesario ser tan drástico para lograr un sistema estable; se puede lograr el mismo efecto, es decir, la estabilidad del sistema completo, con ambos controladores en automático si se baja la ganancia y se incrementa el tiempo de reajuste de uno de los controladores. El efecto que resulta al hacer esto es que todas las raíces de la ecuación característica se mueven al lado negativo del eje real:

En los párrafos precedentes se describió cómo analizar el efecto de la interacción sobre la'estabilidad de los circuitos de control. Esto se puéde simplificar bastante una vez que se conoce la ecuación característica del sistema. El lector debe recordar que estos comentarios se hicieron respecto a un sistema 2 x 2, que es probablemente el más común de los sistemas de control multivariable; para los sistemas de orden superior se debe seguir el mismo procedimiento, sin embargo, tal vez no se puedan determinar tan fácilmente las conclusiones que se obtienen a partir de la ecuación característica.

Desacoplamiento

Todavía queda una pregunta por responder: ¿Se puede hacer algo para reducir o eliminar la interacción entre los circuitos que interacttían? Es decir, ¿se puede construir un sistema de control en que se desacoplen los circuitos que interactúan o acoplados? El desacoplamiento puede ser una posibilidad realista y ventajosa cuando se aplica con cuidado; en la matriz de ganancia relativa se tiene una indicación acerca de cuando es benéfico el desacoplamiento. Mientras más cercano es el valor de los términos de la matriz entre sí, mayor es la interacción de los circuitos. En cuanto a los sistemas que existen actualmente, por lo general es suficiente la experiencia operativa para tomar una decisión.

Existen varios tipos de desacopladores y formas para diseñarlos, en esta sección se presentan los métodos mas fáciles y prácticos.

Ahora se considera el sistema general de control 2 x 2 con interacción que se muestra en la figura 8-56; en este diagrama de bloques se ilustra gráficamente la interacción entre los dos circuitos; para evitar dicha interacción se puede diseñar e instalar un desacoplador como el que se muestra en la figura 8-57. El desacoplador se debe diseñar de tal manera que con la combinación proceso-desacoplador se obtengan dos circuitos de control que parezcan independientes; en términos matemáticos

$$\left.\frac{\partial C_1}{\partial M_2}\right|_{M_1} = 0 \qquad \text{Y} \qquad \left.\frac{\partial C_2}{\partial M_1}\right|_{M_2} = 0$$

Esto es, el desacoplador se debe diseñar de tal manera que con un cambio en la salida del controlador 1; $M_1(s)$, se produzca un cambio en $C_1(s)$, pero no en $C_2(s)$; de manera

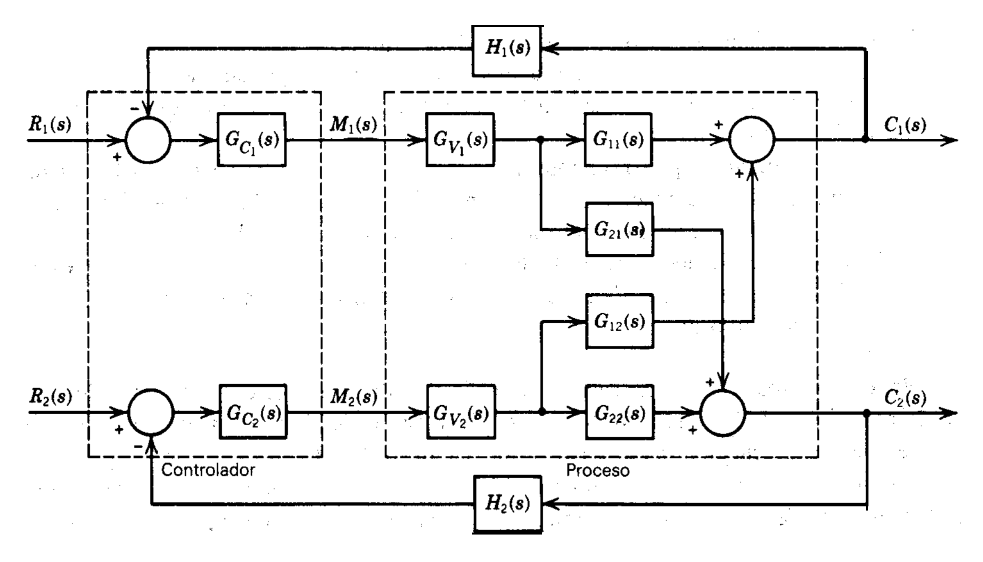


Figura **8-56.** Sistema interactivo general 2 x 2.

semejante, con un cambio en la salida del **controlador** 2, $M_2(s)$, se debe producir un cambio en $C_2(s)$, pero no en $C_1(s)$.

Otra forma de interpretar el desacoplador es considerarlo como **parte** de los **controladores**; de la combinación controlador-desacoplador se obtiene un controlador interactivo

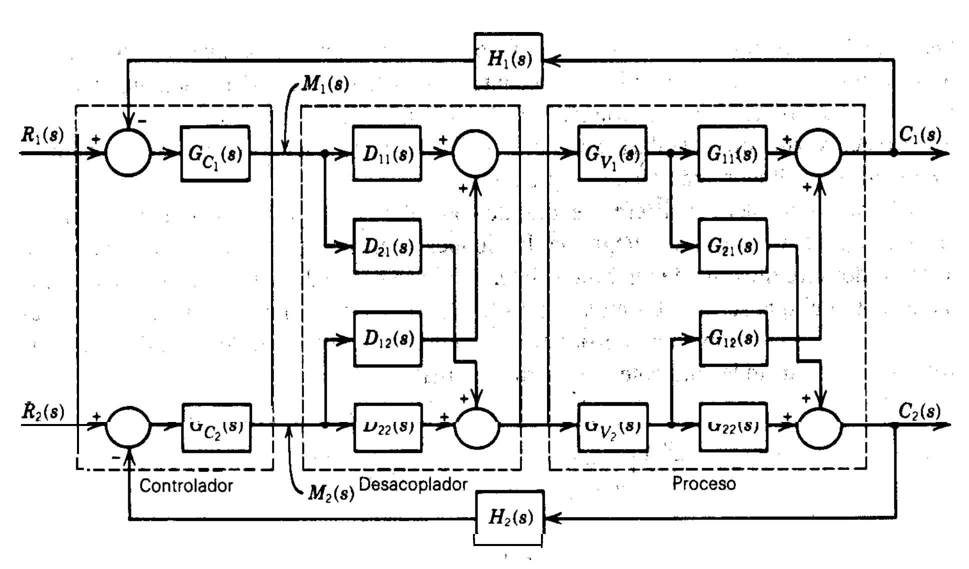


Figura 8-57. Sistema interactivo **general** 2 x 2 con **desacoplador.**

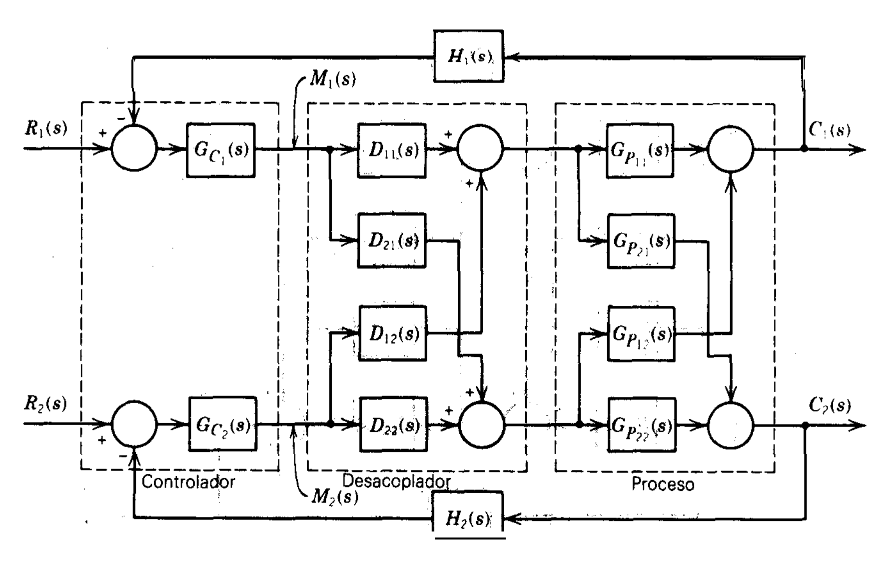


Figura 8-58. Diagrama de bloques simplificado de un sistema interactivo 2 x 2 con desacoplador.

y, por lo tanto, la idea es diseñar un controlador interactivo para producir un sistema no interactivo.

El diagrama de bloques de la figura 8-57 se puede simplificar si se combinan las funciones de transferencia del proceso de la siguiente manera

$$G_{Pij}(s) = G_{Vj}(s)G_{ij}(s)$$

El nuevo diagrama de bloques se muestra en la figura 8-58. En la figura 8-59 se muestra el diagrama de bloques de circuito abierto para el desacoplador y el proceso; a partir de este último diagrama se pueden diseñar los desacopladores para un sistema 2 x 2.

La salida del segundo controlador, $M_2(s)$, afecta a la primera variable controlada, $C_1(s)$, de la forma en que se expresa en la siguiente ecuación:

$$C_1(s) = [D_{12}(s)G_{P11}(s) + D_{22}(s)G_{P12}(s)]M_2(s) \tag{8-46}$$

De manera semejante, con $M_1(s)$ se afecta a $C_2(s)$, como se expresa en la siguiente ecuación:

$$C_2(s) = [D_{21}(s)G_{P22}(s) + D_{11}(s)G_{P21}(s)]M_1(s) \tag{8-47}$$

Como se ve, ahora se tienen dos ecuaciones, (8-46) y (8-47), y cuatro incógnitas, $D_{11}(s)$, $D_{12}(s)$, $D_{22}(s)$ y $D_{21}(s)$; por consiguiente, se tienen dos grados de libertad, lo que significa que dos de las incógnitas se deben fijar antes de calcular el resto; un procedi-

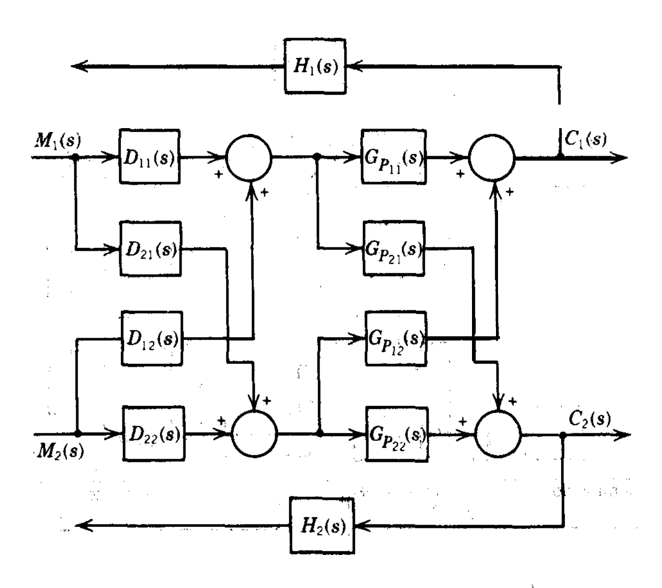


Figura 8-59. Diagrama de bloques de circuito abierto para un sistema interactivo 2 x 2 con **desacoplador.**

miento común es fijarlas a la unidad. Generalmente los elementos que se eligen son $D_{11}(s)$ y $D_{22}(s)$. De acuerdo con este procedimiento, las dos ecuaciones, se hacen

$$C_1(s) = [D_{12}(s)G_{P11}(s) + G_{P12}(s)]M_2(s) \tag{8-48}$$

Y

$$C_2(s) = [D_{21}(s)G_{P22}(s) + G_{P21}(s)]M_1(s) \tag{8-49}$$

Ahora el objetivo es diseñar $D_{12}(s)$ de manera que, **cuando la salida del segundo** controlador cambie, la primera variable controlada **permanezca constante.** Si **la variable** controlada tiene que permanecer constante, su variable de desviación es cero, $C_1(s) = 0$; entonces, a partir de la ecuación **(8-48)**, se tiene

$$0 = [D_{12}(s)G_{P11}(s) + G_{P12}(s)]M_2(s)$$

y, finalmente, se obtiene

$$D_{12}(s) = -\frac{G_{P12}(s)}{G_{P11}(s)} \tag{8-50}$$

De manera similar, $D_{21}(s)$ se puedediseñar de modo que, cuando $M_1(s)$ **cambie,** $C_2(s)$ permanezca en cero;. de la ecuación (849) se tiene

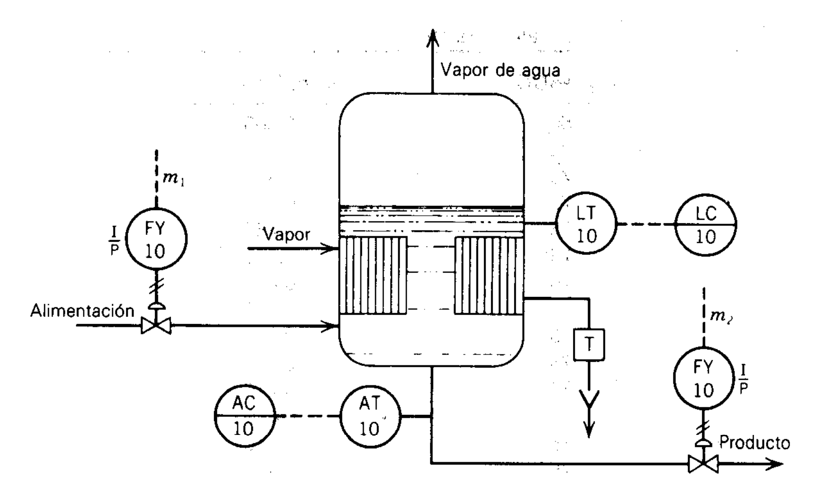


Figura 8-60. Evaporador..

$$D_{21}(s) = -\frac{G_{P21}(s)}{G_{P22}(s)} \tag{8-51}$$

Las ecuaciones (8-50) y (8-51) son las ecuaciones de diseño del desacoplador para un sistema 2 x 2. Se debe recordar que $D_{11}(s)$ y $D_{22}(s)$ se fijan a la unidad. Ahora se utilizará un ejemplo para mostrar con más detalle los cálculos y las implementaciones.

Ejemplo 8-10. Ahora se **considera** el evaporador **que aparece** en la figura **8-60,** en el cual una solución acuosa de **NaOH** se concentra de 0.2 a 0.5 fracciones de masa de **NaOH;** existen dos variables controladas, el nivel del liquido y la salida de fracción de masa de **NaOH,** y dos variables manipuladas, el caudal de entrada y el del producto. Los datos que aparecen en la tabla 8-5 se obtuvieron por medio de prueba dinámica. El rango del transmisor de nivel es de **1-5** m, y el del transmisor de concentración, de 0.2-0.8 fracciones de masa de **NaOH.** Se debe decidir la agrupación por pares correcta de las variables y diseñar el sistema para desacoplamiento; asimismo, es necesario dibujar el diagrama con la instrumentación que se requiere para implementar el desacoplador; toda la instrumentación, con excepción de las válvulas, es electrónica.

Lo primero que se debe hacer es dibujar el diagrama de bloques de circuito abierto general para este sistema, como se'muestra en la figura **8-61*a*.** Con base en los datos de que se dispone, se observa que el diagrama se puede simplificar al que se muestra en la figura **8-61*b*.** La información que aparece en la tabla 8-6 se utiliza en conjunto con el método de cálculo 3 que se estudió en el capítulo 6, para determinar las siguientes funciones de transferencia:

$$G_{PL1}(s) = \frac{0.072e^{-0.3s}}{2.7s + 1}, \quad \frac{\text{m}}{\text{\% de salida del controlador 1}}$$

Tabla **8-5.** Datos dinámicos del evaporador

Tiempo, min	m_1, %CO[a]	*x, fracción de masa*	*L, m*
0	50	0.500	3.00
0	75	0.500	3.00
0.25	75	0.493	3.10
0.50	75	0.477	3.22
0.75	75	0.464	
1.00	75	0.453	3.48
1.25	75	0.447	
1.50	75	0.439	
2.00	75	0.427	3.72
2.50	75	0.419	
3.00	75	0.416	3.14
4.00	75	0.416	4.48
5.00	75	0.416	4.50
6.00	75	0.416	4.62
7.00	75	0.416	4.70
8.00	75	0.416	4.76
9.00	75	0.416	4.79
10.00	75	0.416	4.80
11.00	75	0.416	4.80
Tiempo, min	**m_2, %CO[a]**	***x, fracción de masa***	***L, m***
0	50	0.500	3.00
0	75	0.500	3.00
0.5	75	0.497	3.12
1.0	75	0.488	3.25
1.5	75	0.483	3.35
2.0	75	0.479	3.42
3.0	75	0.470	3.57
4.0	75	0.466	3.70
5.0	75	0.465	3.80
6.0	75	0.464	3.85
7.0	75	0.464	3.89
8.0	75	0.464	3.90
9.0	75	0.464	3.90

[a] %CO significa porcentaje de la salida del controlador

$$G_{Px1}(s) = \frac{-0.00336e^{-0.15s}}{1.05s+1} \quad \frac{\text{fracción de masa}}{\text{\% de salida del controlador 1}}$$

$$G_{PL2}(s) = \frac{0.036e^{-0.03s}}{2.97s+1}, \quad \frac{\text{m}}{\text{\% de salida del controlador 2}}$$

$$G_{Px2}(s) = \frac{-0.00144e^{-0.4s}}{1.65s+1}, \quad \frac{\text{fracción de masa}}{\text{\% de salida del controlador 2}}$$

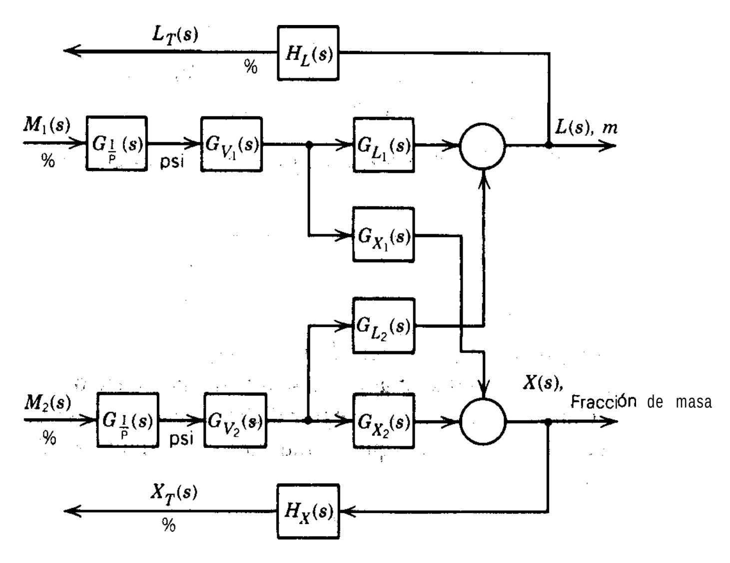


Figura 8-61*a*. Diagrama de bloques de circuito abierto para el evaporador.

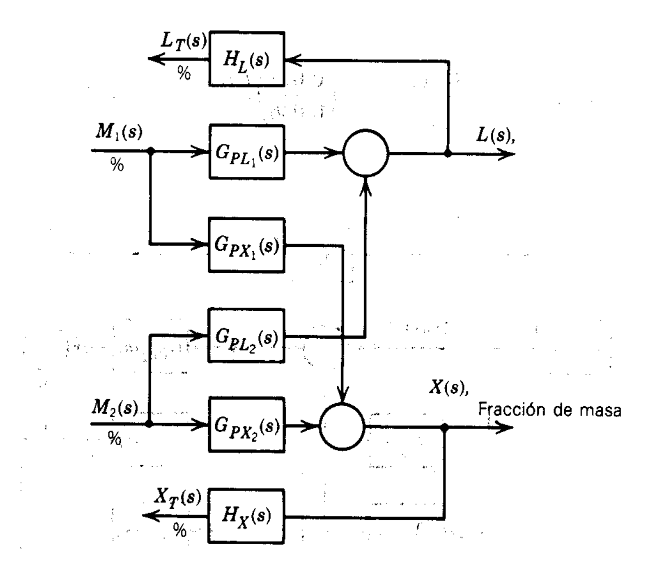


Figura 8-61*b*. Simplificación del diagrama de bloques de circuito abierto del evaporador.

Ahora, con esta información se puede decidir sobre la agrupación por pares correcta y el diseño de los sistemas de desacoplamiento. La matriz de ganancia de estado estacionario es la siguiente:

	m_1	m_2
L	0.072	0.036
x	−0.00336	−0.00144

Se aplican las ecuaciones (8-37) a (8-40) para obtener la matriz de ganancia relativa:

	m_1	m_2
L	−6	7
x	7	−6

de lo que resulta la agrupación por pares: L-m_2 y x-m_1.

Para diseñar el sistema de desacoplamiento se utilizan las ecuaciones (8-50) y (8-5 1); con el fin de evitar cualquier problema al seguir dichas ecuaciones, se desarrolla el diagrama de bloques de circuito cerrado que se muestra en la figura 8-62. A partir de la ecuación **(8-51),** se tiene

$$D_{x2}(s) = -\frac{G_{Px2}(s)}{G_{Px1}(s)} = -\left(\frac{0.00144}{0.00336}\right)\left(\frac{1.05s + 1}{1.65s + 1}\right)e^{-0.25s}$$

De la ecuación (8-50) se tiene

$$D_{L1}(s) = -\frac{G_{PL1}(s)}{G_{PL2}(s)} = -\left(\frac{0.072}{0.036}\right)\left(\frac{2.97s + 1}{2.7s + 1}\right)e^{-0.27s}$$

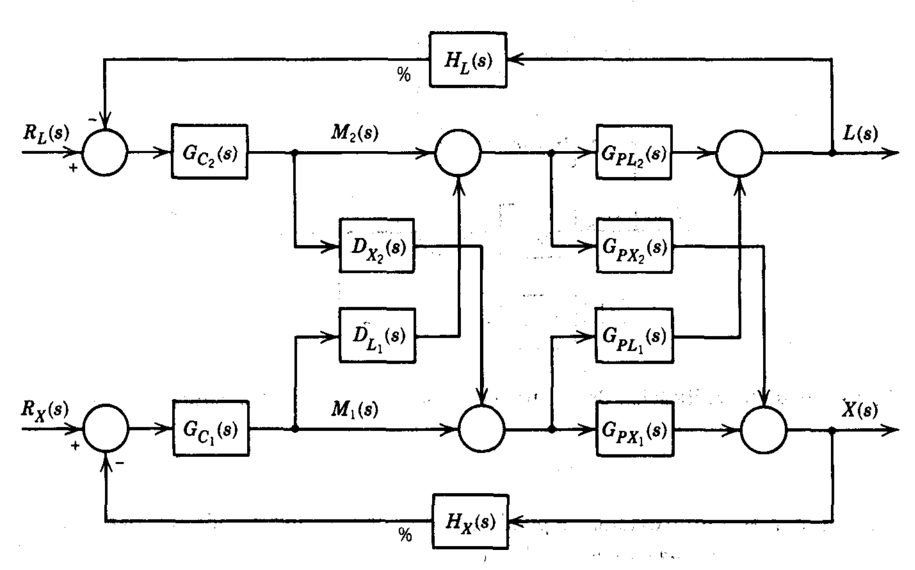


Figura 8-62. Diagrama de bloques de circuito cerrado con **desacoplador** para el evaporador.

Ahora se tienen las ecuaciones de los dos desacopladores; se observa que ambas constan de un término de ganancia, un término de adelanto/retardo y una compensación de tiempo muerto. Como se mencionó al estudiar el control por acción precalculada, la implementación de la compensación de tiempo muertii con instrumentación analógica es difícil; pero, por otro lado, con los controladores actuales con base en microprocesadores, es bastante fácil. Las ecuaciones que generalmente se implementan para desacopladores, son:

$$D_{x2}(s) = -0.428\left(\frac{1.05s + 1}{1.65s + 1}\right) \tag{8-52}$$

Y

$$D_{L1}(s) = -2\left(\frac{2.97s + 1}{2.7s + 1}\right) \tag{8-53}$$

En la figura 8-63 se muestra la implementación de este sistema de desacoplamiento.

Con el ejemplo 8-10 se ilustró la implementación de un sistema de desacoplamiento para un proceso 2 X 2. Si el proceso es completamente desacoplado, el circuito de nivel

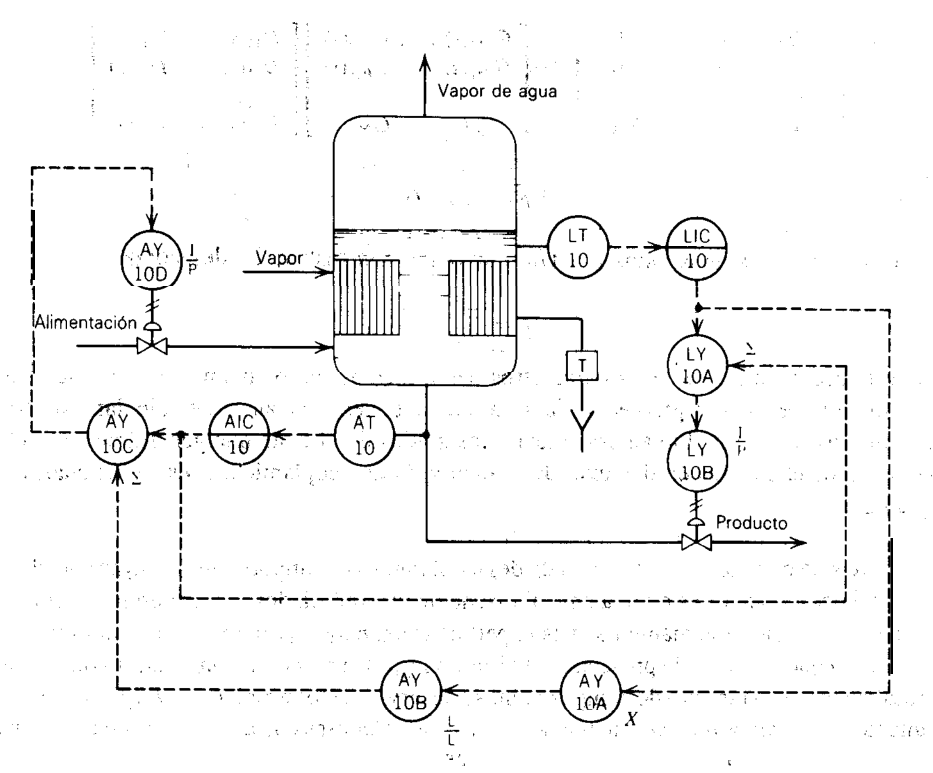


Figura 8-63. Sistema desacoplador para el evaporador.

no debe afectar al de composición, y viceversa; una forma de verificar esto es derivar las funciones de transferencia del. sistema de desacoplamiento mediante las gráficas de flujo de señal; éste será el tema de uno de los problemas al final del capítulo.

Hasta aquí se vio cómo diseñar sistemas de desacoplamiento para procesos 2 X 2, pero, ¿qué pasa con los procesos 3 X 3, o más complejos? A continuación se muestra la forma de diseñar tales sistemas.

Se considera un proceso con n variables controladas y n variables manipuladas; la relación de desacoplamiento que se desea entre las variables controladas, C(s), y las salidas del controlador, M(s), se puede escribir en forma de matriz, de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ \vdots \\ C_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_n(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \\ \vdots \\ M_n(s) \end{bmatrix} \tag{8-54}$$

donde $N_1(s), N_2(s), \dots, N_n(s)$ son cualquiera de las funciones que se desean.

Con la primera matriz, a la derecha de2 signo igual, se representa la combinación procesodesacoplador; más especificamente, esta matriz es

$$\begin{bmatrix} N_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{P11}(s) & \dots & G_{P1n}(s) \\ G_{P21}(s) & \dots & G_{P2n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{Pn1}(s) & \dots & G_{Pnn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}(s) & \dots & D_{1n}(s) \\ D_{21}(s) & \dots & D_{2n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1}(s) & \dots & D_{nn}(s) \end{bmatrix} \tag{8-55}$$

o

$$\overline{N} = \overline{G_P} \cdot \overline{D}$$

Si se multiplican ambos lados por $\overline{G_P}^{-1}$, se obtiene la matriz del desacoplador:

$$\overline{D} = \overline{G_P}^{-1} \cdot \overline{N} \tag{8-56}$$

En esta ecuación hay $n^2 + n$ parámetros desconocidos, pero solamente n^2 ecuaciones; por lo tanto, existen n grados de libertad que se deben fijar antes de calcular los otros parámetros. Como se dijo anteriormente, los grados de libertad que generalmente se eligen son los elementos en diagonal de la matriz de desacoplamiento, $D(s)$, los cuales se igualan a uno.

Antes de concluir con este tema de desacoplamiento es importante subrayar que el diseño del desacoplador es equivalente al diseño de un controlador por acción precalculada en el que cada variable manipulada es la perturbación mayor para los demás circuitos. En el ejemplo que se acaba de presentar, el término $D_{21}(s)$ sirve como controlador con acción precalculada en el circuito de composición; se observa que los términos en $D_{21}(s)$ son exactamente los términos que hay en muchos de los controladores con acción precalculada, una ganancia y un adelanto/retardo; es decir, compensación dinámica y de estado estacionario. El termino $D_{12}(s)$ sirve como controlador por acción precalculada para el circuito de nivel.

Finalmente, también es importante tenei en cuenta que, a diferencia del control por acción precalculada, los desacopladores' forman 'parte de la ecuación característica de los circuitos de control y, por lo tanto, afectan la estabilidad de¡ circuito de control.

8-7. RESUMEN

En este capítulo' se presentaron varias técnicas que sirven como auxiliares en el control de procesos. Todas estas técnicas, con excepción del control multivariable, son completamente usuales en la industria actual. Para el control multivariable se requiere un mayor grado de elaboración y comprensión, lo cual ha retrasado su aplicación: se remite al lector a la referencia bibliográfica 15 para'una presentación detallada de este tema tan interesante.

Todas las técnicas se presentaron y explicaron sin importar la instrumentación que se utiliza para implementarlas. Se utilizan instrumentos tanto analógicos como digitales, sin embargo, con la creciente utilización dé los sistemas con base en microprocesadores, la implementación se torna más fácil y, en consecuencia, la aplicación de estas técnicas se vuelvé cada vez más popular. También es importante tener en cuenta que con ninguna de las técnicas se substituye completamente al control por retroalimentación, siempre se requiere algún tipo de control por retroalimentación para completar el control. Como se mencionó al principio del capítulo, para aplicar estas técnicas se requiere una cantidad mayor de ingeniería y equipo, en comparación con el control por retroalimentación simple, y, en consecuencia, debe existir una justificación de su empleo antes de aplicarlas. Además,' para aplicar estas técnicas se requiere mayor entrenamiento del personal de operación; si el operario no entiende las técnicas, habrá dificultad en 'su aplicación. Lo más' recomendable es desarrollar lá técnica de control más' simple, con la que se logre el desémpéño de control que se requiere.

BIBLIOGRAFÍA

1. O'Meara, J. E., "Oxygen Trim for Combustion Control," *Znstrumentation Technology,* Marzo '1979.
2. Johnson, M. L., "Dehydrogenation Reactor Control," *Znstrumentation Technology,* Diciembre 1976.
3. *Znstrument Engineers Handbook*—Vol. II, Bela G. Liptak, Editor, Chilton, 1970.
4. Becker, J. V., y R. Hill, "Fundamentals of Interlock Systems," *Chemical Engineering Magazine,* Octubre 15, 1979.
5. Becker, J. V., ' 'Designing Safe Interlock Systems, '' *Chemical Engineering Magazine,* Octubre 15, 1979.
6. DiStefano, J. J., A. R. Stubberud, y T. J. Williams, *Feedback and Control Systems,* Schaum, Nueva York.
7. Bristol, E. H., "On a New Measure of Interaction for Multivariable Process Control," *Trans. IEEE.* Enero 1966.

8. Nisenfeld, A. E., y H. M. Schultz, "Interaction Analysis Applied to Control System Design," *Instrumentation Technology*, Abril 1971.
9. Shinskey, F. G., *Distillation Control for Productivity and Energy Conservation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1977.
10. Shinskey, F. G., *Process Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
11. Scheib, T. J., y T. D. Russell, "Instrumentation Cuts Boiler Fuel Costs," *Instrumentation and Control Systems*, Noviembre 1981.
12. Congdon, P., "Control Alternatives for Industrial Boilers," *InTech*, Diciembre 1981.
13. Wang, J. C., "Relative Gain Matrix for Distillation Control-A Rigorous computational Procedure," Instrument Society of America, 1979.
14. Hulbert, D. G., y E. T. Woodburn, "Multivariable Control of a Wet Grinding Circuit," *AIChE J*, Marzo 1983.
15. McAvoy, T., "Interaction Analysis: Principles and Applications," Instrument Society of America, Research Triangle Park, N. C., 1983.
16. Koppel, L. B., "Input-Output Pairing in Multivariable Control," sometido al *AIChE J*, Enero 1982.
17. Niederlinski, A., "A Heuristic Approach to me Design of Linear Multivariable Control Systems," *Automatica*, Vol. 7, No. 691, 1971.

PROBLEMAS

Se considera el sistema de tubería que se muestra en la figura 8-64, en la cual fluye gas natural hacia un proceso; se necesita medir. el flujo de gas y totalizarlo, de manera que cada 24 horas se sepa la cantidad total. Se propone sumar la salida de ambos transmisores y entonces totalizar (integrar) el resultado. La razón de flujo en cada medidor, como diferencial de presión, se expresa de la siguiente manera:

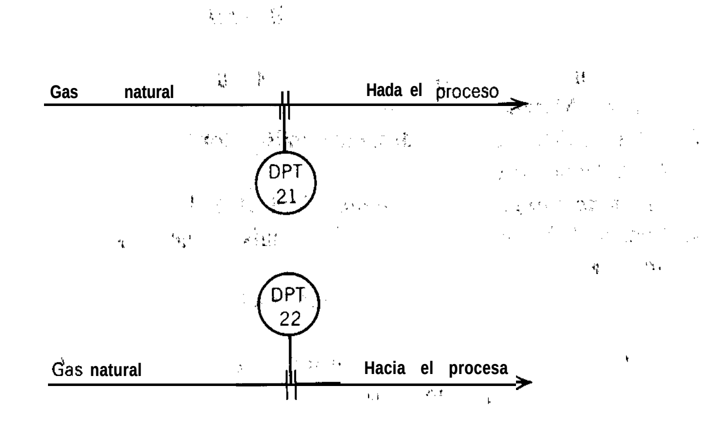


Figura 8-64. Croquis para el problema 8-1.

$$DPT21: Q(MSCFH) = 44.73\sqrt{h}$$
$$DPT22: Q(MSCFH) = 48.10\sqrt{h}$$

donde h es el diferencial de presión en-pulgadas de H_2O. El rango de ambos transmisores es de 0-100 pulg de H_2O. Se debe especificar la instrumentación que se requiere para calcular la razón total de flujo, para lo cual se utiliza la tabla 8-2. Se deben determinar los factores de escalamiento.

8-2. Ahora se considera el intercambiador de calor de la figura 8-15, en el cual se calienta el fluido bajo proceso mediante condensación de vapor. Para el esquema de control se requiere calcular la energía que se transfiere al fluido bajo proceso, mediante la siguiente ecuación:

$$Q = F\rho C_p(T - T_i)$$

Se conoce la siguiente información:

Variable	Rango	Estado estacionario
F	0-50 gpm	30 gpm
T	50– 120°F	80°F
T_i	25–60°F	50°F
Q	0-300,000 $\frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$	182,070 $\frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$

Se supone que la densidad y la capacidad calorífica son constantes, y que se producen 202.3 Btu/gpm-°F-h. Se debe utilizar la tabla 8-1, para especificar la instrumentación que se requiere para calcular la energía que, se transfiere. Se deben especificar los factores de escalamiento.

8-3. En la figura 8-65 se muestra el reflujo hacia la parte superior de una columna de destilación. En la "computadora de reflujo interno" se calcula el punto de control, E_E^{fijo}, del controlador de reflujo externo, de modo que se mantenga el reflujo interno, L_I, en un valor fijo, L_I^{fijo}. El reflujo interno es mayor que el reflujo externo, debido a la condensación de los vapores en la charola superior, los cuales se requieren para llevar hasta su punto de búrbujeo, T_V, el reflujo subenfriado con temperatura T_L. La siguiente ecuación se obtiene a partir del balance de energía para la charola superior:

$$(L_I - L_E)\lambda = L_E C_{P_L}(T_V - T_L)$$

Se debe dibujar la instrumentación que se requiere para la computadora de reflujo interno y, además; utilizar la tabla 8-3 para calcular los coeficientes de escalamiento. Las especificaciones de diseño son las siguientes:

$$C_{P_L} = 0.76 \text{ Btu/lbm-°F}; \qquad \lambda = 285 \text{ Btu/lbm}$$

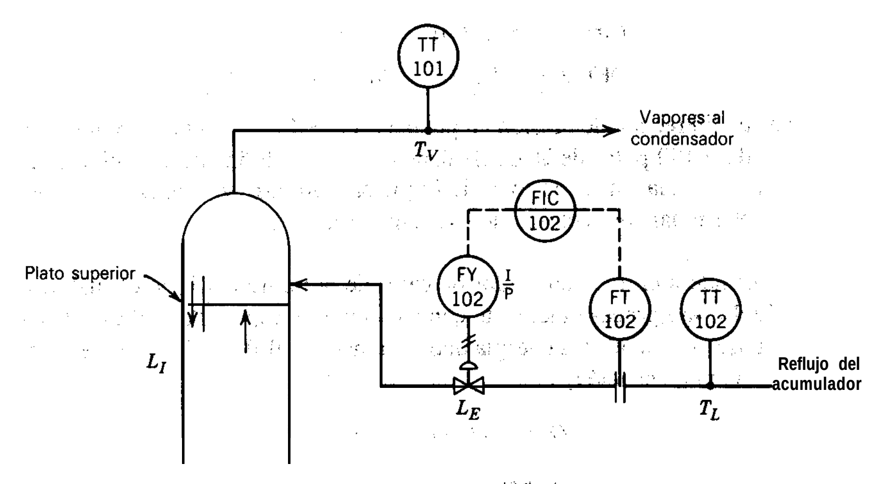


Figura 8-65. Croquis para el problema 8-3.

Transmisor	Rango	Valor normal
FT102(L_E)	0-5000 $\frac{\text{lbm}}{\text{hr}}$	3000 $\frac{\text{lbm}}{\text{hr}}$
TT102(T_L)	100–300°F	195°F
TT101(T_V)	150–250°F	205°F

8-4. El sistema que aparece en la **figura 8-66** se utiliza para **diluir** una **solución** al 50% en peso de **NaOH** y **formar** una solución al **30%** en peso. **La válvula** 'de **NaOH** se manipula mediante un controlador **que no** se muestra en el diagrama. Puesto que el flujo de la solución **al** 50% puede **variar frecuentemente,** se **desea** diseñar un esquema de control para manipular el **flujo** de **H_2O,** de **modo** que la solución de

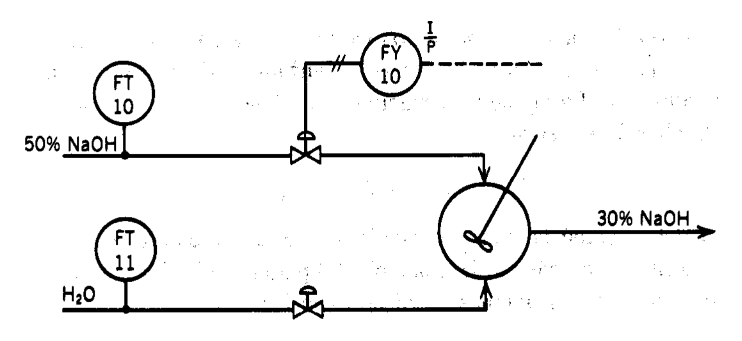


Figura 8-66. Croquis para el problema 8-4.

salida se mantenga en el porcentajeque se requiere. El flujo nominal de la solución de **NaOH** al 50% es de 200 **lbm/h.** El **elemento de** flujo que se utiliza para ambas corrientes funciona de **tal** manera que la **señal** que sale de los transmisores se relaciona de manera lineal con el flujo **volumétrico.** Además, se puede suponer que la densidad de cada corriente es muy constante y, por lo tanto, la salida de cada transmisor también se relaciona con el flujo de masa. Se debe especificar el rango de ca& transmisor en unidades de **flujo de masa,** de. modo que el caudal nominal esté a mitad de la escala. Se deben especificar los **relés** de cómputo, **así** como las constantes de tiempo correspondientes que-se requieren para implementar el **esquema** de control de razán; se **utilizarán** los bloques de cómputo que aparecen en la tabla 8-2.

8-5. En la fabricación de papel se requiere mezclar algunos componentes en una cierta proporción para formar una pasta base con que se alimenta a una máquina de papel, y de **ahí** se produce la hoja final con las **características** que se desean; el proceso se muestra en **la** figura 8-67. Para una **fórmula** en especial, la mezcla final debe contener 47 **%** en masa de pulpa de maderas duras, **50 %** en masa de pulpa de pino, 2 **%** de masa de aglutinante y 1% en masa de colorante. El sistema nominal se debe diseñar para un **máximo** posible de producción de 2000 **lbm/h.**

a) Se debe, especificar, **el** rango de cada medidor de flujo; los **fluxómetros** que se utilizan; en este caso son **magnéticos** y su señal de salida se relaciona de manera lineal con la **razón** de flujo de masa.

b) Se debe diseñar un sistema de control para controlar el nivel en el depósito de mezclado y, a la vez, mantener: la **fórmula** en la proporción correcta. Al final del **día** también se requiere saber la cantidad total de masa que se añadió de cada corriente al depósito de mezclado. Se debe establecer la instrumentación que se necesita para implementar el esquema de control y con los bloques de cómputo de la tabla 8-3, obtener la graduación de la instrumentación necesaria.

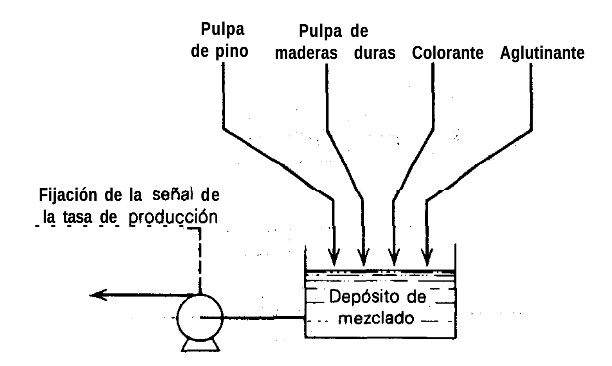


Figura 8-67. Croquis para **el** problema 8-5.

8-6. En el ejemplo 8-2 se muestra un esquema de control (figura 8-8) para controlar la razón **aire/combustible** que entra'a una caldera u horno. Como se explicó en el ejemplo; en este esquema el **flujo** de aire siemprese retrasa respecto al flujo de combustible.

a) Se debe diseñar un esquema de control en el que él flujo de combustible siempre se mueva primero, y que posteriormente lo siga el flujo 'de aire.

b) La manera más común de implementar este control es mediante el esquema que se conoce como "control por **limitación** cruzada": Esta implementación se hace de manera tal que, cuando la presión del vapor desciende, por lo que se requiere más combustible, primero se incrementa el flujo de aire y posteriormente le sigue el flujo de combustible. Cuando la presión de vapor se incrementa, y, por lo tanto, se requiere menos combustible, primero se disminuye el flujo de combustible, y entonces le sigue el flujo de aire. Se debe **diseñar** el sistema de control para lograr este objetivo.

Nota: Este problema es muy interesante; se sugiere utilizar selectores de máximo y mínimo para elegir la señal que se debe enviar a los 'controladores de aire y combustible.

8-7. En la figura 8-68 se muestra un sistema de control en cascada. Como se explicó en este capitulo, el ajuste del controlador primario no se hace de manera directa; sin embargo, con las técnicas de respuesta en frecuencia se cuenta con un medio de ajuste del controlador.

a) Se debe ajustar el controlador secundario, *P*, para **obtener** un factor de amortiguamiento de 0.707. .

b) Se debe ajustar el controlador primarió, PI, mediante el método de **Ziegler-Nichols**.

Nota: Mediante las técnicas de respuesta en frecuencia se puede determinar la ganancia y el período últimos del circuito de control primario.

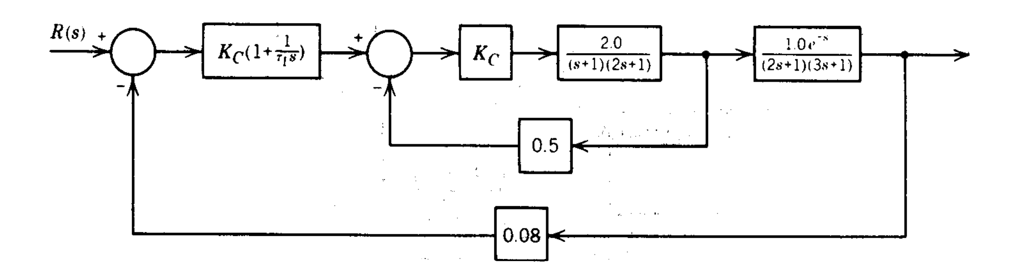


Figura 8-68. Croquis **para el** problema 8-7.

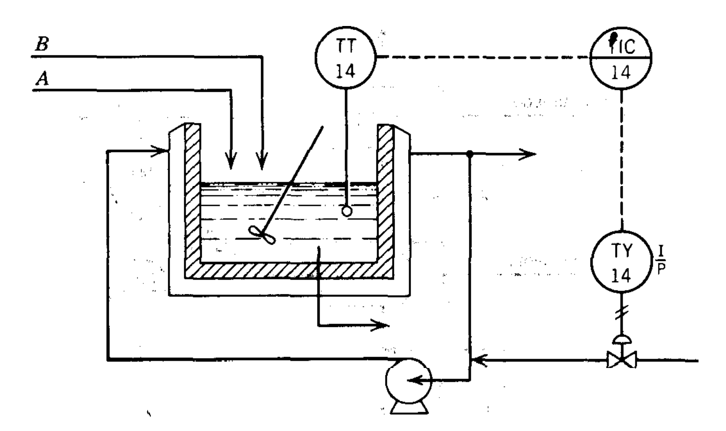


Figura 8-69. "Croquis para el problema 8-8.

8-8. Ahora se considera el reactor exotérmico que se muestra en la figura 8-69. En el diagrama se ilustra el control de la temperatura del reactor mediante la manipulación de la válvula de agua de enfriamiento.

a) Se debe diseña? el esquema para 'controlar la entrada de reactivos al *actor. Tanto el flujo *A* como el *B* se pueden medir y controlar, la razón que se requiere entre estos flujos es de 2.5 gpm de Blgpm de *A*. El fluxómetro de *A* se calibra entre 0 y 40 gpm, y el de *B* entre 0 y 200 gpm. Se debe utilizar la tabla 8-1 para indicar y señalar la graduación de la instrumentación necesaria.

b) De la experiencia de operación se sabe que la temperatura de entrada del agua para enfriamiento tiene algunas variaciones. Generalmente esta perturbación da 'por resultado un ciclaje en la temperatura del reactor, debido a los retardos en el sistema, es decir, el casquillo de enfriamiento, la pared de metal y el volumen del reactor. El ingeniero a cargo de esta unidad se pregunta si con algún otro esquema de control se puede mejorar el control de temperatura; se debe diseñar un esquema de control para lograrlo.

c) Por la experiencia& operación, también se sabe que bajo'ciertas condiciones poco frecuentes no se logra suficiente enfriamiento con el sistema de enfriamiento. En este caso el único medio para controlar la temperatura es disminuir el caudal de los reactivos. Se debe diseñar el esquema de control para hacer lo anterior automáticamente; el esquema debe funcionar de manera tal que, cuando la capacidad de enfriamiento regresa a la normalidad, se restablezca el esquema de la parte (*b*).

8-9. En el proceso de secado que aparece en la figura 8-70 se. seca el suministro de papel húmedo para producir el producto final. El secado se hace mediante aire caliente, el cual pasa por un calentador en el que se quema combustible para proveer

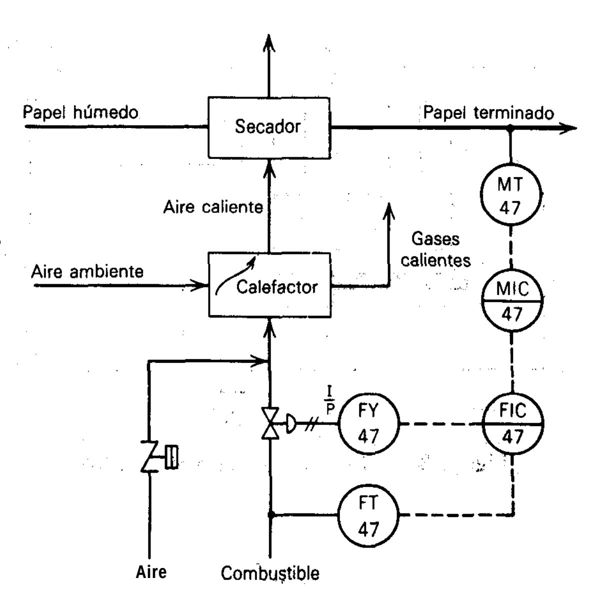


Figura 8-70. Croquis para el problema 8-9.

la **energía.** La variable controlada es la humedad del papel que sale de la secadora. En la figura 8-70 se muestra el esquema de control que se propuso e instaló originalmente .

a) Algunas semanas **después** de poner\ en servicio el proceso, el ingeniero observa que, a pesar de que con el controlador de humedad **ésta** se mantiene dentro de ciertos **límites** del punto de control, las oscilaciones eran **más** que las de su agrado. **Después** de investigar las posibles causas y asegurarse de que el ajuste del controlador de humedad (MIC47) es eficaz, se encontró que la temperatura del aire caliente que sale del calentador varía más de lo que se pensó originalmente en la etapa de diseño; estas variaciones se atribuyen a los cambios diarios en la temperatura ambiente y a posibles perturbaciones en la **cámara** de combustión del calentador. Se debe diseñar un **esquema** de control para mantener la temperatura del aire caliente en el valor que se desea, a fin de ayudar a mantener el punto de control de la humedad,

b) Con el esquema de control que se acaba de describir se ayudó significativamente a controlar la humedad, sin embargo, algunas semanas **después** los operarios se **quejan** de que de vez en cuando la humedad difiere considerablemente del punto de control, aunque finalmente con el esquema de control se le regrese de nuevo al punto de control. A causa de esta perturbación, se requiere volver a procesar el papel que se produce durante este período, lo que representa **pérdidas** en **la producción.** Después de revisar los registros de producción, el ingeniero descubre que la perturbación se debe a cambios en lahumedad de entrada. Se

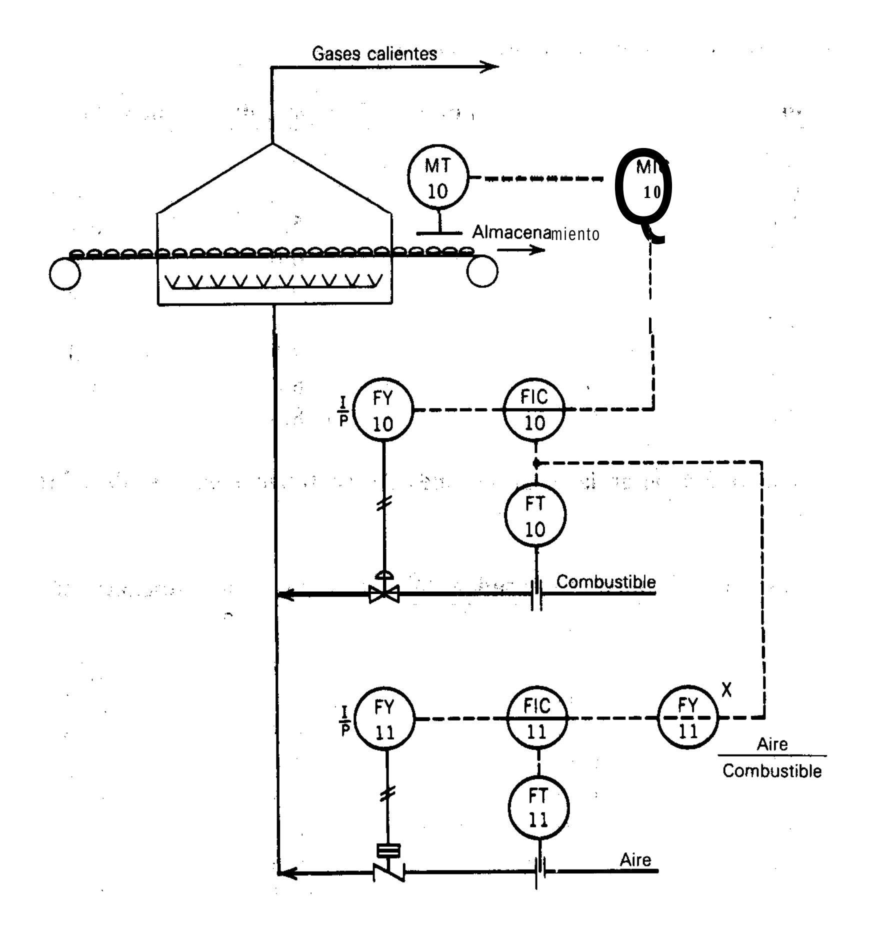


Figura 8-71. Croquis para el problema 8-10.

debe diseñar: un esquema de control con acción precalculada para compensar **tales** perturbaciones; se dispone de un transmisor, de humedad con rango de 5 a 20% de masa para medir la humedad de entrada.

8-10. Ahora se considera el esquema de control para el'sistema de secado de sólidos que se ilustra en la figura 8-7 1. **La** mayor **perturbación** en este proceso es el contenido de humedad de los sólidos que entran; debido a que el sistema de control responde con bastante lentitud a tal perturbación, se desea implementar un sistema con acción precalculada para mejorar dicho control. **Después** de algún trabajo inicial, se obtuvieron los siguientes datos:

Cambio escalón en la humedad de entrada = +2%

Tiempo, min	Humedad a la salida, %	Tiempo, min	Humedad a la salida, %
0	5.0		
0.5	5.0	5.0	6.6
1.0	5.1	5.5	6.7
1.5	5.2	6.0	6.8
2.0	5.4	6.5	6.9
2.5	5.7	7.0	7.0
3.0	5.9	7.3	7.0
3.5	6.1	8.0	6.9
4.0	6.3	8.5	7.0

Cambio escalón en la señal de salida del controlador de humedad, MIC-10, = +4mA.

Tiempo, min	Humedad a la salida, %	Tiempo, min	Humedad a la salida, %
0	5.0	5.0	3.81
0.5	5.0	5.5	3.70
1.0	4.95	6.0	3.55
1.5	4.93”	6.5	3.45
2.0	4.85	7.0	3.35
2.5	4.70	7.5	3.25
3.0	4.60	8.5	3.10
3.5	4.40	9.5	3.03
4.0	4.20	10.5	2.99
4.5	4.00	11.5	3.00

El rango del analizador de humedad por retroalimentación es de 1 a 7% de humedad; se tiene otro analizador con rango de 10 a 15 % de humedad, el cual se puede utilizar para medir la humedad de entrada. Estos analizadores se utilizaron anteriormente para este proceso en particular, y se demostró que son confiables. Los dos sensores-transmisores son electrónicos, con una constante de tiempo de aproximadamente 15 segundos.

a) Con base en los principios de ingenierfa de proceso (balances de masa, balances de energía, etc.), se debe desarrollar un esquema de control con acción precalculada; En cl planteamiento del problema no se suministró toda la información necesaria; se debe suponer que dicha información se puede obtener del archivo de la planta. Se debe indicar la implementación de este esquema.

b) Se debe dibujar el diagrama de bloques completo para este proceso;, se requiere incluir todas las funciones de transferencia conocidas.

c) Se debe desarrollar un esquema de control con acción precalculada mediante el método de diagramas de bloques e ilustrar la implementación de este esquema.

8-11. **Después** de poner en operación el proceso que aparece en la figura 8-10, la experiencia indica que es difícil mantener constante la temperatura de salida del calentador, a *causa* de los cambios frecuentes en la razón de flujo de masa del aire para regeneración; estos cambios se deben a las variaciones en la presión y temperatura de entrada.

a) Se debe diseñar un esquema de control para compensar los cambios en el flujo de masa de aire de regeneración e indicar la instrumentación necesaria, para lo cual se utilizan los bloques de cómputo que aparecen 'en la tabla 8-2.
b) El esquema de control **con acción** precalculada que se **diseñó** en *a*) es un compensador de estado estable; 'se debe explicar qué clase de datos se requieren para aplicar la compensación dinámica y los pasos a seguir para obtener los datos.

Datos de operación

Flujo de aire = $10000 \frac{\text{lbm}}{\text{h}}$ **Temperatura** de entrada, = **70°F**

Temperatura 'del aire de salida = **600°F** **Presión** de entrada = 30 psig
Cp del aire = 7 **Btu/lb mol-°F**

Coeficiente de entrada de aire del orificio: $K = 2085 \frac{\text{lbm/hr}}{\left(\text{in.} - \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}\right)^{1/2}}$

Valor calorífico del combustible = 18,000 **Btu/lbm**

Las condiciones de entrada de aire se medirán con los siguientes **sensores-transmisores:**

Temperatura: 25 **a 125°F**
Presión: 0 a 45 **psig**
Transmisores de diferencial de presión: 0 pulg a 150 pulg.

La temperatura de salida del calentador se mide mediante un sensor-transmisor cuyo rango es de 400 a **800°F.** La razón de flujo de combustible se mide mediante un sensor-transmisor con un rango de 0-200 lbm/h.

8-12. Se debe diseñar un controlador con acción precalculada para controlar la temperatura de salida del horno que se esboza en la figura 8-72. El controlador debe tener compensación para las variaciones en la razón de alimentación y temperatura de entrada mediante la manipulación del punto **de control del controlador** de flujo

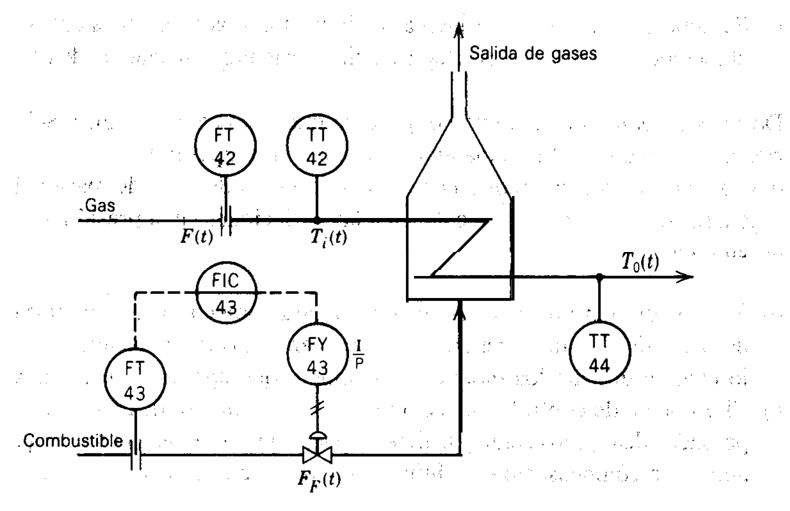


Figura 8-72. Croquis para el problema 8-12.

de combustible. Para indicar la instrumentación que se requiere se utiliza la tabla 8-3. Se conoce la siguiente información:

Calor especifico de gas: C_p = 0.24 Btu/lbm-°F
Calor de combustión del combustible: H_C = -22,000 Btu/lbm
Temperatura de entrada del gas: $\bar{T}_i$ = 85°F
Temperatura de salida del gas: $\bar{T}_o$ = 930°F
Eficiencia del. horno = 0.80
Rango de FT42: 0 a 15000 lbm/h
'Rango de TT42: 0 a 120°F
Rango de FT43: 0 a 200 lbm/h
Rango de TT44: 700 a 1100°F

Con la intención de simplificar no se indica el aire para combustión.

8-13. Ahora se supone que se ignoran algunos datos del proceso, tales como el calor que genera la combustión del combustible o el calor específico del gas, del horno del problema 8-12; por lo tanto, para diseñar el controlador con acción precalculada se debe utilizar el método de diagramas de bloques. Después de hacer la prueba escalón en el horno, se obtuvieron los siguientes datos:

Variable	Cambio escalón	Cambio de T_o	Cohsfante de tiempo	Tiempo muerto
F	750 lbm/hr	14°F	35 s	5 s
T_i	10°F	13°F	10 s	15 s
F_F^{fijo}	5% del rango	20°F	66 s	6 s

a) Se debe dibujar el diagrama a bloques completo con todas las funciones de transferencia.

b) Se debe diseñar un control con' acción precalculada para' compensar las variaciones en la razón de alimentación y en'la 'temperatura de alimentación mediante la manipulación del punto de control del controlador de flujo de combustible; se debe incluir el compensador dinámico.

c) Si se decide compensar solamente' una perturbación, ¿cuál se elige y por qué? ¿En qué se modifica el diseño?

8-14. En la sección de descortezamiento de una torre de destilación; la cual se muestra en la figura 8-73, se necesita mantener en un cierto valor la pureza de los sedimentos; este objetivo se alcanza comúnmente mediante el control de la temperatura en "una de las bandejas (se supone que la presión en la torre es constante), para lo cual se utiliza como variable manipulada el flujo de vapor que llega al rehervidor. Una perturbación "mayor" común es el flujo con que se alimenta a la torre.

a) Se debe esbozar, el esquema de control por acción precalculada/retroalimentación para compensar esta perturbación mayor,, la cual se debedescribir brevemente.

b) Se describirán brevemente las pruebas dinámicas que se deben realizar en la torre para ajustar el controlador con acción precalculada y el de retroalimentación.

8-15. Ahora se considera el filtro de vacio que se expone en el problema 6-15. Se debe utilizar la información que se da en ese problema, a fin de diseñar un esquema de

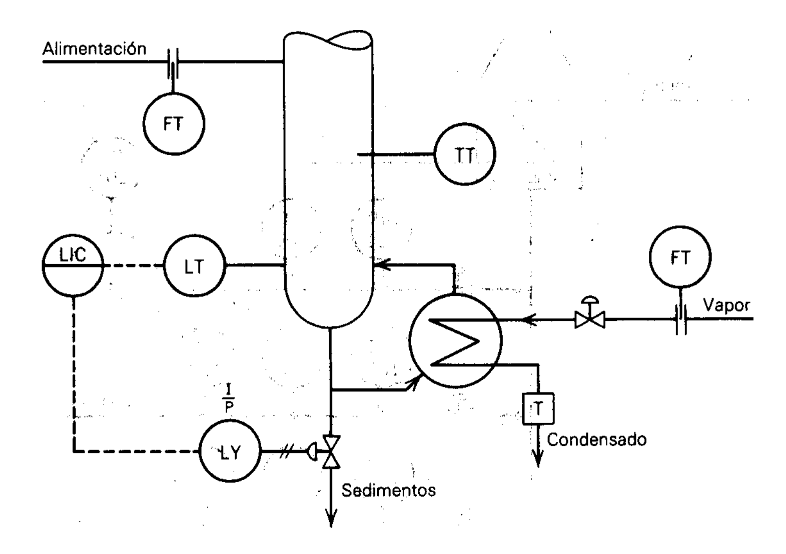


Figura 8-73. **Croquis** para el problema 8-14.

control con el que se compensen los cambios en la humedad de entrada. Se puede suponer que el rango del transmisor de humedad es de 60 a 95 % , la dinámica del transmisor es despreciable. Se debe mostrar la implementación completa con los bloques de cómputo de la tabla 8-2 y especificar el factor de escalamiento.

8-16. Se considera el sistema de evaporación del problema 6-20, para el cual se debe diseñar un esquema de control por acción precalculada/retroalimentación con el que se compensen los cambios de densidad de la solución que entra al primer efecto. El rango del medidor de densidad con que se mide la densidad de entrada es de 55 a 75 lbm/pies³, y la dinámica es despreciable. Se utilizarán los relés de cómputo de la tabla 8-1 para implementar el esquema.

8-17. Ahora se considera el proceso del problema 6-22, en el cual se seca granulado de fosfato. Como se mencionó en este problema, una de las perturbaciones importantes es la humedad con que entra el granulado. Con la información disponible se debe diseñar un esquema de control por acción precalculada/retroalimentación para compensar esta perturbación. Se cuenta con un transmisor de humedad para medir la humedad de entrada; el rango del transmisor es de 12 a 16% y su dinámica es despreciable. Para implementar el esquema se deben utilizar los bloques de cómputo de la tabla 8-3 y especificar los factores de escalamiento.

8-18. En el horno, que se muestra en la figura 8-74 se debe controlar la temperatura de salida del hidrocarburo, mediante el control del combustible que entra al calenta-

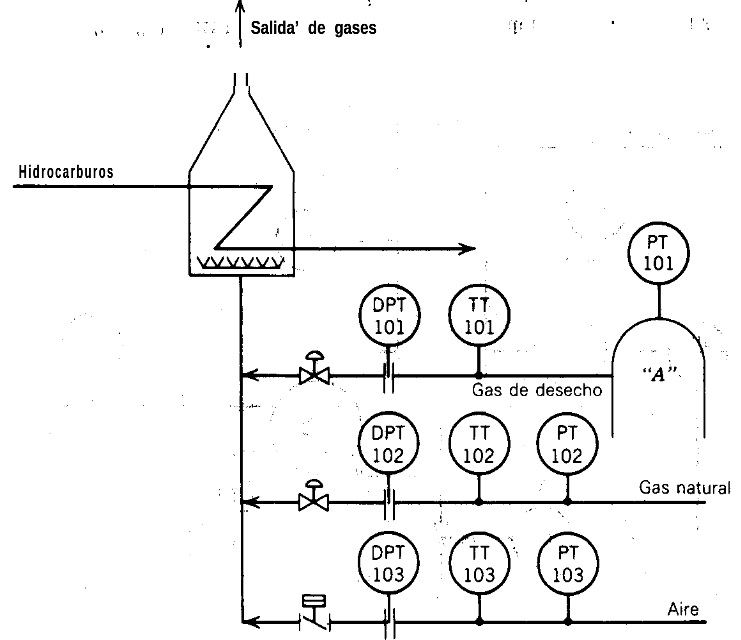


Figura 8-74. Croquis para el problema 8-18.

dor. Se dispone de dos tipos de combustible: gas de desecho que se produce en otra unidad de proceso, y gas natural. El mejor procedimiento de operación es utilizar la mayor cantidad posible de gas de desecho, con lo cual se conserva el gas natural. El flujo del gas de desecho se utiliza para controlar la presión en la unidad de proceso donde se produce.

Se puede suponer que el valor calorífico neto del gas de desecho es casi la quinta parte del valor del gas natural. Las razones de aire/combustible que se requieren, con base en la masa, son:

$$\frac{\text{aire}}{\text{gas de desecho}} = R_1 \quad \text{Y} \quad \frac{\text{aire}}{\text{gas natural}} = R_2$$

a) Se debe diseñar un sistema de control simple para controlar la presión en el proceso *A*.

b) Se debe diseñar un esquema para controlar la temperatura de salida del hidrocarburo. Puesto que todos los combustibles son gases,' se recomienda compensar las variaciones de' presión y temperatura. Se puede suponer que nunca hay suficiente gas de desecho para calentar el flujo de hidrocarburo; es decir, siempre se necesita algo de gas' natural.

c) Por razones de seguridad', se necesita diseñar un esquema de control con el que se suspenda el' flujo de gas natural y aire, en caso de que se apague la flama del quemador; el flujo de gas dé desecho puede continuar. Para este trabajo, en el quemador se dispone de un interruptor con una salida de 20 mA, mientras existe flama; si la flama se apaga, la salida baja a 4 mA. Este esquema de control se debe diseñar con base en el anterior.

8-19. Ahora se considera el reactor que se muestra en la figura 8-75, en el cual se realiza la reacción completa e irreversible de los líquidos $A + B \rightarrow C$. El producto C es la materia prima para varias unidades de proceso que están después del reactor. La

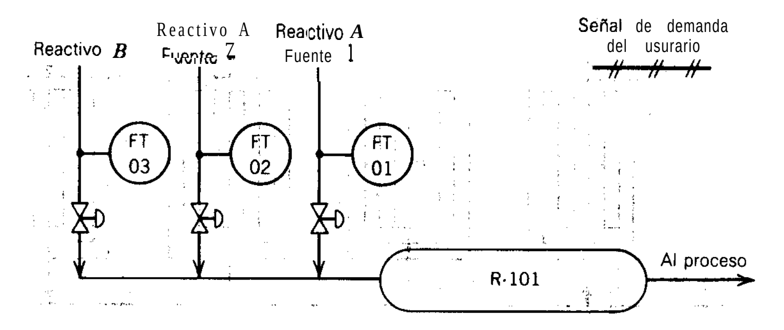


Figura 8-75. Croquis para el problema 8-19.

producción que se requiere del reactor depende de la cantidad de unidades en operación y de su razón de producción, y puede variar entre 4000 y 20,000 kmol/h. El reactivo *A* se obtiene de dos fuentes; gracias a un contrato a largo plazo, la fuente 1 es la menos cara, sin embargo, en el contrato existen dos limitantes: una razón máxima instantánea de 16,800 kmol/h y un consumo mensual máximo de $3{,}456 \times 10^6$ kmol. Si se excede cualquiera de estas limitantes, se debe pagar una multa muy alta y, en este caso, es menos caro obtener ,el excedente de la fuente 2. Se puede suponer que la densidad de cada reactivo, *A* y *B*, y del producto C no varía mucho y, por tanto, se puede suponer que es constante.

Se debe diseñar un sistema de control con el cual se utilice preferentemente el reactivo *A* de la fuente. 1 y no se exceda ninguna de las limitantes contractuales. La razón de alimentación de *A* contra *B es* de 2:1.

8-20. En la figura 8-76, se ilustra un sistema para filtrar aceite antes de procesarlo. El aceite entra a un distribuidor ‘donde se controla la presión mediante la manipulación de la válvula de entrada (admisión); desdeeste distribuidor se reparte el aceite a los filtros. Los filtros consisten en un casquillo, en el cual hay tubos, de manera semejante a la del intercambiador de calor, los tubos son el medio de filtraje por que debe pasar el aceite. El aire entra al recipiente y fluye a través del medio de filtraje, pero, conforme pasa el tiempo? se acumulan residuos en el filtro y, en consecuencia,, se incrementa la presión necesaria para que haya flujo; si, la presión se incrementa demasiado, las paredes se pueden romper. Por lo anterior, en algún momento se saca el filtro de servicio y se limpia; bajo condiciones normales, el flujo total de aceite se puede manejar con tres filtros.

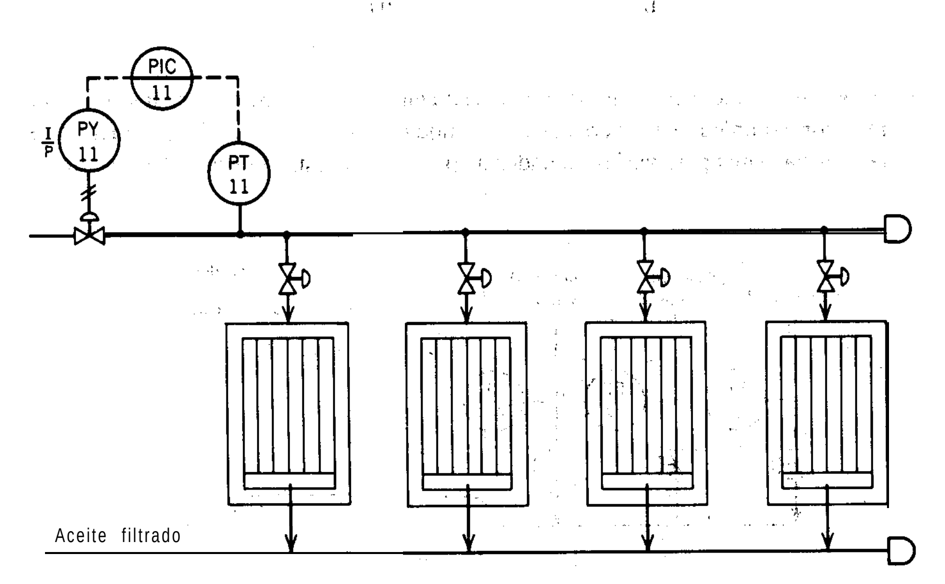


Figura 8-76. Croquis para el problema 8-20.

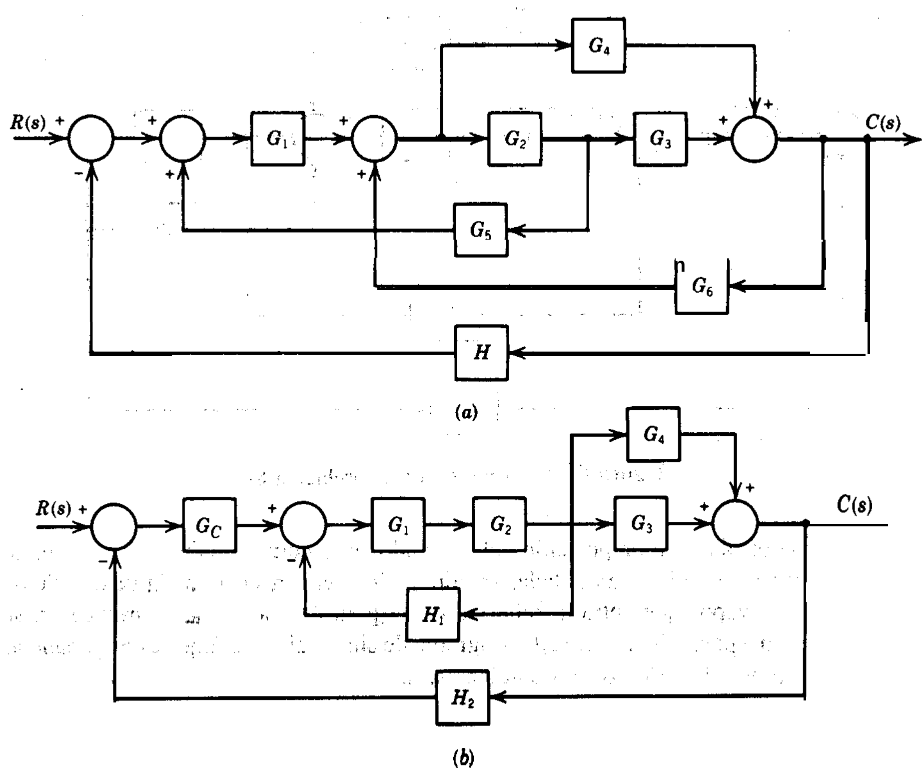


Figura 8-77. Croquis para el Problema **8-21**.

a) Se debe diseñar un sistema de control de flujo para fijar el flujo de aceite a través de este sistema.

b) Se debe diseñar un sistema de control tal que, cuando la presión en cada filtro se incremente por arriba de un valor **predeterminado**, el **flujo de** aceite hacia ese filtro empiece a disminuir. El flujo **total** de aceite en **el sistema** se debe **mantener** constante.

8-21. Para **este problema** se **consideran** los **diagramas** de bloques de las figuras **8-77*a*** y **8-77*b***; mediante la **técnica** de gráficas de flujo de señal se debe obtener $C(s)/R(s)$ para cada uno **de ellos**.

8-22. Para **el sistema de control** en cascada con circuitos interactivos; cuyo diagrama de bloques se **muestra en** la **figura 8-78, se deben determinar las** funciones de **transferencia** $C_2(s)/R(s)$ y $C_2(s)/L(s)$.

8-23. Como se vio en la sección **8-6**, las **columnas** de destilación son el ejemplo **típico** de **los sistemas** multivariable. En un **interesante artículo** de **Wang**[13], **cuya lectura** se recomienda, las ganancias de **estado estacionario** con **que se** relacionan las **va-**

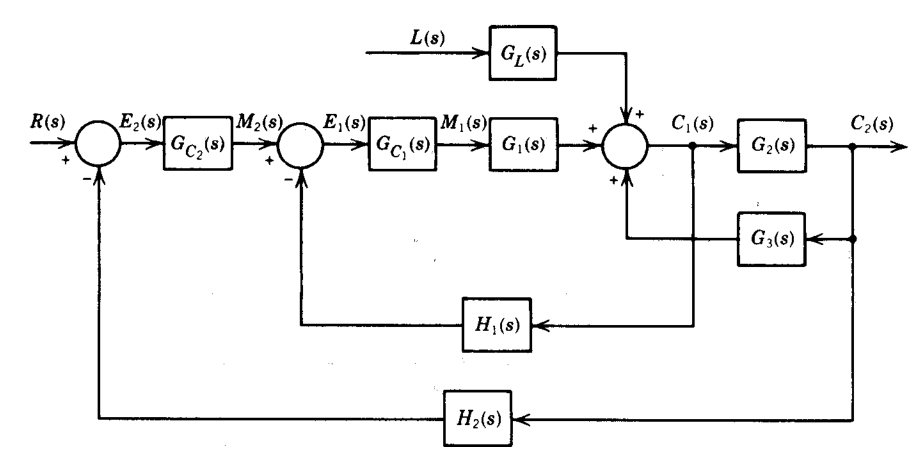


Figura 8-78. Croquis para el problema 8-22.

riables controladas (composición del destilado, y, y composición de los sedimentos, x) y las variables manipuladas (razón de destilación, D, y razón de ebullición o razón de vapor que entra al rehervidor, V) para una columna en particular, se obtuvieron a partir de una hoja de programa de simulación de flujo; estas ganancias de estado estacionario son las siguientes:

	D	V
y	-0.205991×10^{-2}	0.912422×10^{-5}
x	10.272573×10^{-4}	-0.644203×10^{-5}

Con base en estos datos se debe decidir la agrupación por pares correcta.

8-24. En un artículo de D. G. Hulbert y E. T. Woodburn[14] se presenta el control multivariable para un circuito de molido con agua, el cual se muestra de manera esquemática en la figura 8-79. Para este circuito particular, se decidió controlar las siguientes variables: el torque (par) que se requiere para girar el molino (TOR), la densidad del material que se alimenta mediante la tolva (DCF) y la razón del flujo que sale del molino (FML). Como se explica en el artículo, estas variables se eligieron con base en las consideraciones de observación, posibilidad de control e importancia desde el punto de vista metalúrgico. TOR y FML se toman en cuenta para describir las condiciones en el molino y DCF se relaciona con las condiciones en la tolva. TOR y DCF se miden directamente, pero FML se calcula con base en las mediciones de balance de masa en la tina; sin embargo, para simplificar el diagrama de la figura 8-79 se supone que FML se obtiene mediante un transmisor.

En este sistema, las variables manipuladas son la razón de alimentación de sólidos (SF), la razón de alimentación de agua al molino (MW) y la razón de alimentación de agua a la tina (SW) . La razón de alimentación de sólidos se manipula

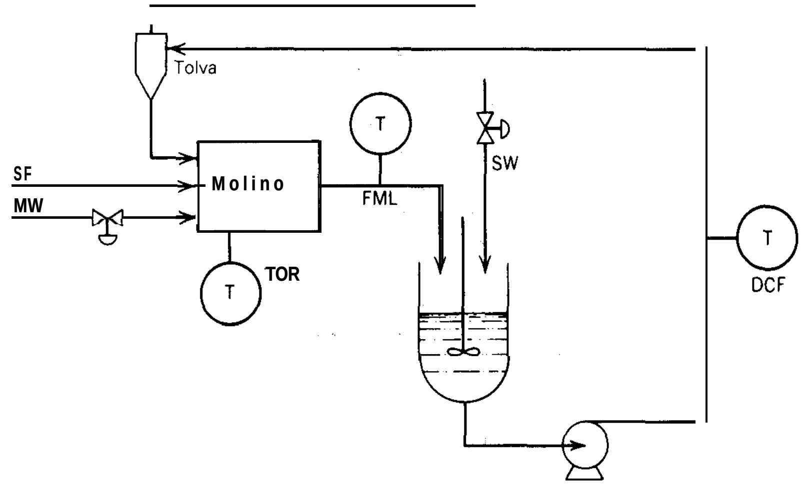


Figura 8-79. Croquis para el problema 8-24.

por medio de la velocidad de la banda con que se acarrean los sólidos al molino (se utiliza una señal eléctrica).

Las siguientes funciones de **transferencia con** que se relacionan las variables controladas y las manipuladas, se obtuvieron mediante la prueba de circuito abierto:

	SF ($kg\text{-}s^{-1}$)	MW ($kg\text{-}s^{-1}$)	SW ($kg\text{-}s^{-1}$)
TOR (Nm)	$\frac{119}{217s+1}$	$\frac{153}{337s+1}$	$\frac{-21}{10s+1}$
FML ($m^3\text{-}s^{-1}$)	$\frac{0.00037}{500s+1}$	$\frac{0.000767}{33s+1}$	$\frac{-0.00005}{10s+1}$
DCF ($kg\text{-}m^{3}$)	$\frac{930}{500s+1}$	$\frac{-667e^{-320s}}{166s+1}$	$\frac{-1033}{47s+1}$

Todas las constantes de tiempo y los tiempos muertos **están** en segundos. Con base en esta información, se debe elegir la agrupación por pares correcta, diseñar un desacoplador para este sistema y exponer toda la instrumentación que se requiere.

8-25. Se debe demostrar que el sistema de la figura 8-60 es desacoplado, lo cual se puede hacer mediante la deducción de la función de transferencia de circuito cerrado, $C_1(s)/R_2(s)$, y la substitución de las funciones de transferencia del diseño de los desacopladores, si se supone que es posible lograr un desacoplamiento perfecto.

8-26. Ahora se considera la columna de destilación que aparece en la figura 8-80. Las **siguientes funciones** de transferencia se determinaron mediante la aplicación de la prueba de pulso a un modelo de computadora de la columna:

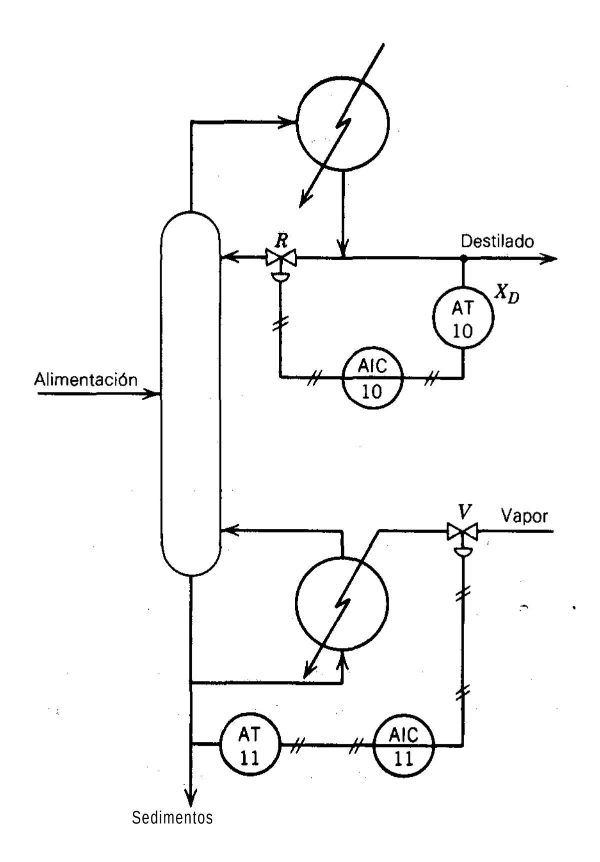


Figura 8-80. Croquis para el problema 8-26.

$$X_D(s) = G_{P11}(s)R(s) + G_{P12}V(s)$$

= composición superficial, clave principal

$$X_B(s) = G_{P21}(s)R(s) + G_{P22}V(s)$$

= composición de los sedimentos, clave principal

$$G_{P11}(s) = -6.0\left(\frac{1 - 0.78s}{1 + 0.25s}\right)\frac{\%}{\%}$$

$$G_{P12}(s) = 1.5\left(\frac{1 - 0.22s}{1 + 0.25s}\right)\frac{\%}{\%}$$

$$G_{P21}(s) = -5.0\left(\frac{1 + 0.86s}{1 + 0.25s}\right)\frac{\%}{\%}$$

$$G_{P22}(s) = 7.0\left(\frac{1 + 0.09s}{1 + 0.25s}\right)\frac{\%}{\%}$$

R(s) es la razón de reflujo y $V(s)$ es la razón de vapor. Ambas razones están en porcentaje de rango.

a) Se debe calcular la medida de interacción de estado estacionario de este sistema. ¿Los circuitos de control de composición, se refuerzan o combaten entre sí? ¿Es correcta la agrupación por pares de las variables controladas y manipuladas?

b) Se deben diseñar los desacopladores para este sistema y exponer brevemente cualquier problema que haya en la implementación de dichos desacopladores. ¿Cuáles son las sugerencias del lector?

8-27. Para este problema se considera el proceso 2 x 2 que se ilustra en la figura 8-81. Las siguientes funciones de transferencia se determinaron mediante la prueba de pulso:

$$C_1(s) = G_{P11}(s)M_1(s) + G_{P12}(s)M_2(s) + G_{P1L}(s)L(s)$$
$$C_2(s) = G_{P21}(s)M_1(s) + G_{P22}(s)M_2(s) + G_{P2L}(s)L(s)$$

donde:

$$G_{P11}(s) = \frac{0.81}{(1.2s+1)(0.63s+1)}\frac{\%}{\%}$$
$$G_{P12}(s) = \frac{1.2}{(2.3s+1)(1.1s+1)}\frac{\%}{\%}$$
$$G_{P21}(s) = \frac{1.1e^{-0.3s}}{1.2s+1}\frac{\%}{\%}$$
$$G_{P22}(s) = \frac{0.6e^{-s}}{2s+1}\frac{\%}{\%}$$
$$G_{P1L}(s) = \frac{0.5}{2.0s+1}\frac{\%}{\%}$$
$$G_{P2L}(s) = \frac{1.5}{1.8s+1}\frac{\%}{\%}$$

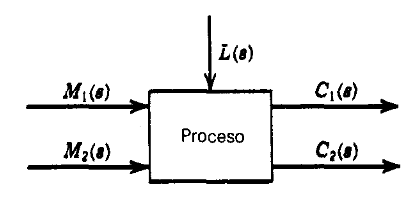


Figura 8-81. Croquis para el problema 8-27.

a) Se debe obtener la agrupación por pares correcta para este sistema.
b) Se debe dibujar el diagrama de bloques completo y la gráfica de flujo de señal del sistema.
c) Se deben determinar las funciones de transferencia de circuito cerrado,

$$\frac{C_1(s)}{L(s)} \quad \text{y} \quad \frac{C_2(s)}{L(s)},$$

d) Se debe diseñar el desacoplador para este sistema y exponer su implementación.

CAPÍTULO 9

Modelos y simulación de los sistemas de control de ‘proceso

Los modelos matemáticos y la simulación por computadora son indispensables en el análisis y diseño de los sistemas de control para procesos complejos no lineales. Con ellas se complementan las herramientas para análisis de sistemas lineales que se estudiaron en los capítulos anteriores de este libro.

Una pregunta que surge en este punto es: ¿Cuándo se debe utilizar la simulación por computadora en el diseño de un sistema de control? En la toma de tal decisión existen varios factores que deben tomarse en cuenta. Primeramente se debe considerar qué tan critico es el desempeño del sistema de control para la operación segura y rentable del proceso; por ejemplo, el sistema de control para un compresor centrífugo grande es lo suficientemente crítico como para hacer la simulación; en cambio, el de un controlador sencillo de nivel puede no serlo. La segunda consideración es la confiabilidad del desempeño del sistema de control, lo cual generalmente depende de la experiencia y familiaridad que se tenga con una aplicación particular del control; por ejemplo, un ingeniero con experiencia no se molestaría en simular el control de temperatura para un ataque de reacción con agitación continua; en cambio, el mismo proyecto de simulación puede ser bastante interesante e informativo para un estudiante de facultad en su primer curso de control. La tercera consideración es el tiempo y esfuerzo que se requiere para llevar a cabo la simulación, que puede ir desde algunas horas, para un proceso relativamente simple, hasta varios meses-hombre, en un proceso complejo que se simula por primera vez. Entre otras consideraciones se incluyen la disponibilidad de los recursos de cómputo, personal con experiencia y suficientes datos acerca del proceso para realizar la simulación.

Los tres pasos principales para realizar la simulación dinámica de un proceso son:

1. Desarrollo del modelo matemático del proceso y de su sistema de control.
2. Resolución de las ecuaciones del modelo.
3. Análisis de los resultados.

Las primeras tres secciones de este capítulo se dedican al primero de estos pasos; en ellas se incluye el desarrollo de los modelos matemáticos de dos procesos complejos: una torre de destilación de componentes múltiples y un horno de proceso. El resto del capítulo se dedica a la resolución de las ecuaciones del modelo. A pesar de que el tercer paso no se abordará de manera formal, no se exagera en la importancia de analizar apropiadamente los resultados de la simulación, sin lo cual se desperdicia todo el esfuerzo que se hace al realizar la simulación; en este análisis se debe incluir la verificación de los resultados de la simulación siempre que sea posible.

9-1. DESARROLLO DE MODELOS DE PROCESO COMPLEJOS

En el capítulo 3 se presentaron los principios básicos para escribir las ecuaciones con que se describe la respuesta de las variables del proceso. En resumen, la forma general de la ecuación fundamental de conservación es

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Razón de}\\ \text{acumulación de}\\ \text{la cantidad que}\\ \text{se conserva}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Razón de}\\ \text{la cantidad que}\\ \text{se conserva}\\ \text{entrando}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Razón de}\\ \text{la cantidad que}\\ \text{se conserva}\\ \text{saliendo}\end{array}\right\} \tag{9-1}$$

La cantidad que se conserva puede ser masa total, masa de un componente, energía y momento. Los términos de razón de entrada y salida se deben tomar en cuenta para todos los mecanismos debido a los cuales la cantidad que se conserva entra o sale del volumen ***de controlo*** porción del universo sobre la que se realiza el "balance"; por ejemplo, todas las cantidades que se conservan enunciadas pueden fluir hacia adentro o hacia afuera del volumen de control (convección); la energía puede entrar y salir mediante conducción de calor y radiación; los componentes se pueden transferir mediante difusión, y el momento se puede generar o destruir mediante fuerzas mecánicas. En el caso de las reacciones químicas, la razón de reacción se debe tomar en cuenta como término de entrada para los productos de la reacción, y como término de salida para los reactivos.

La razón de acumulación de la ecuación (9-1) siempre tiene la forma

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Razón de}\\ \text{acumulación de}\\ \text{la cantidad que}\\ \text{se conserva}\end{array}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{c}\text{Cantidad total}\\ \text{que se conserva}\\ \text{en el volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} \tag{9-2}$$

donde t es tiempo. Esto significa, que los modelos matemáticos consisten en un sistema de ecuaciones diferenciales simultaneas de primer orden o, en su forma más simple, en una sola ecuación diferencial de primer orden cuya variable independiente es el tiempo. Además, en el modelo puede haber ecuaciones algebraicas que resultan de las expresiones para las propiedades físicas y para las razones de entrada y salida, así como de las ecuaciones de balance en las que se desprecia el término de acumulación.

Para expresar la cantidad total que se conserva y las razones de entrada y salida en términos de las variables del proceso (es decir, temperaturas, presiones, composiciones), estas variables deben ser relativamente uniformes en todo el volumen de control; cuando este requerimiento se satisface en un modelo en que el proceso se divide en cierta cantidad de volúmenes de control de tamaño finito o "localidades", se dice que el modelo es un "modelo de parámetros localizados". Por otro lado, los "modelos de parámetros distribuidos" se obtienen cuando las variables del proceso varían continuamente con la posición; en este caso las ecuaciones de balance se deben aplicar a cada ***punto*** del proceso y el modelo matemático constará de ecuaciones diferenciales parciales cuyas variables independientes son el tiempo y la posición; aun en este caso, cada ecuación es siempre de primer orden respecto a la variable tiempo. La única forma en que las ecuaciones pueden ser de orden superior al primero es cuando se combinan las ecuaciones para eliminar variables. Aquí se hace énfasis en el hecho de que las ecuaciones son de primer orden respecto al tiempo, porque éste sirve de guía para el diseño de los programas de computadora con que se simula el proceso; esto se hace evidente en la sección 9-5.

Para desarrollar el modelo matemático es importante tener en cuenta la cantidad máxima de ecuaciones de balance. independientes que se aplican a cada volumen de control (o punto) del proceso; en un sistema con N componentes, éstas se expresan con:

N balances de masa
1 balance de energía
1 balance de momentos en cada dirección de interés, que pueden ser hasta tres.

Los N balances de masa independientes pueden ser N balances de componentes o un balance total de masa y N − 1 balances de componentes. Generalmente, el balance de momentos no se utiliza en la simulación del proceso, porque con él entran como incógnitas las fuerzas de reacción sobre el equipo y las paredes de la tubería, las cuales rara vez son de interés. Un balance más útil es la ecuación de Bernoulli extendida para incluir la fricción, el trabajo del vástago y la acumulación de energía cinética.

Además de las ecuaciones de balance se escriben -otras ecuaciones de manera separada para expresar las propiedades físicas (por ejemplo, densidad, entalpia, coeficientes de equilibrio) y las razones (por ejemplo, de reacción, de transferencia de calor, de transferencia de masa) en términos de las variables del proceso (por ejemplo, temperatura, presión, composición).

A continuación se ilustran los conceptos que se resumieron arriba con el desarrollo de dos modelos; uno es el de una torre de destilación con múltiples componentes y el otro el de un horno de proceso. El primero es un ejemplo del modelo complejo con parámetros localizados, y el segundo es un ejemplo del modelo de parámetros distribuidos. Para que la notación se conserve simple, no se indica explícitamente que las variables son funciones del tiempo, por ejemplo, para $T(t)$ se escribe simplemente T.

El método que se utiliza para desarrollar los modelos matemáticos es el que se presentó en el capítulo 3, esto es:

1. Se escriben las ecuaciones de balance.
2. Se contabilizan las nuevas variables (incógnitas) que aparecen en cada ecuación, de manera que se tengan los antecedentes de la cantidad de variables y ecuaciones.

3. Se introducen relaciones hasta que se tiene la misma cantidad de ecuaciones y variables y se toman en cuenta todas las variables de interés.

El orden en que se escriben las ecuaciones de balance es el siguiente:

Balance total de masa
Balance de componentes (o elementos)
Balance de energía
Balance de energía mecánica (si acaso es importante)

9-2. MODELO DINÁMICO DE UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN

Los modelos dinámicos de columnas de destilación se encuentran entre los sistemas de control más complejos que hay para una sola unidad de operación. La complejidad del modelo estriba en la gran cantidad de ecuaciones diferenciales no lineales que se deben resolver para estudiar la respuesta dinámica de la temperatura, de la composición en cada bandeja de la columna y la composición de los productos. Por ejemplo, para una columna con 100 bandejas y cinco componentes de alimentación se requiere resolver alrededor de 600 ecuaciones diferenciales -cinco de balance de componentes y una de balance de entalpia para cada una de las 100 bandejas- sin contar las ecuaciones que se requieren para simular el condensador, el rehervidor y el sistema de control. Además, para cada componente de cada bandeja se debe establecer una relación de equilibrio de fase y las relaciones hidráulicas en la bandeja; entalpia, densidad y otras propiedades físicas. En la mayoría de los casos estas relaciones son funcionales no lineales de la temperatura, la presión y la composición.

A continuación se considera la columna de destilación que se esboza en la figura 9-1, con N componentes de alimentación, un condensador total y un rehervidor de termosifón; se tiene interés en la respuesta de la composición de los productos x_D y x_B a lo largo del tiempo. Las dos variables manipuladas son el flujo de vapor que llega al rehervidor y la razón de destilación de producto. La razón de reflujo se maneja en el controlador del nivel del acumulador, y la de producción de sedimentos, con el controlador de nivel de sedimentos; éste es un arreglo usual de controladores. Se supone que la presión en la columna no se controla, y que es esencialmente constante desde la parte baja hasta la parte alta, es decir, la caída de presión de una bandeja a otra es despreciable.

A pesar de que únicamene se tiene interés en la composición y las razones de las corrientes del producto, éstas dependen de las condiciones en las bandejas, el rehervidor y el condensador, lo cual provoca que se divida la columna en cierta cantidad de volúmenes de control, uno por cada bandeja, uno para el rehervidor y uno para el condensador. Para cada uno de estos volúmenes de control se deben escribir los N balances de masa y las ecuaciones de balance de entalpia; todas estas ecuaciones se deben resolver simultáneamente, junto con las ecuaciones adicionales con que se describe el sistema de control.

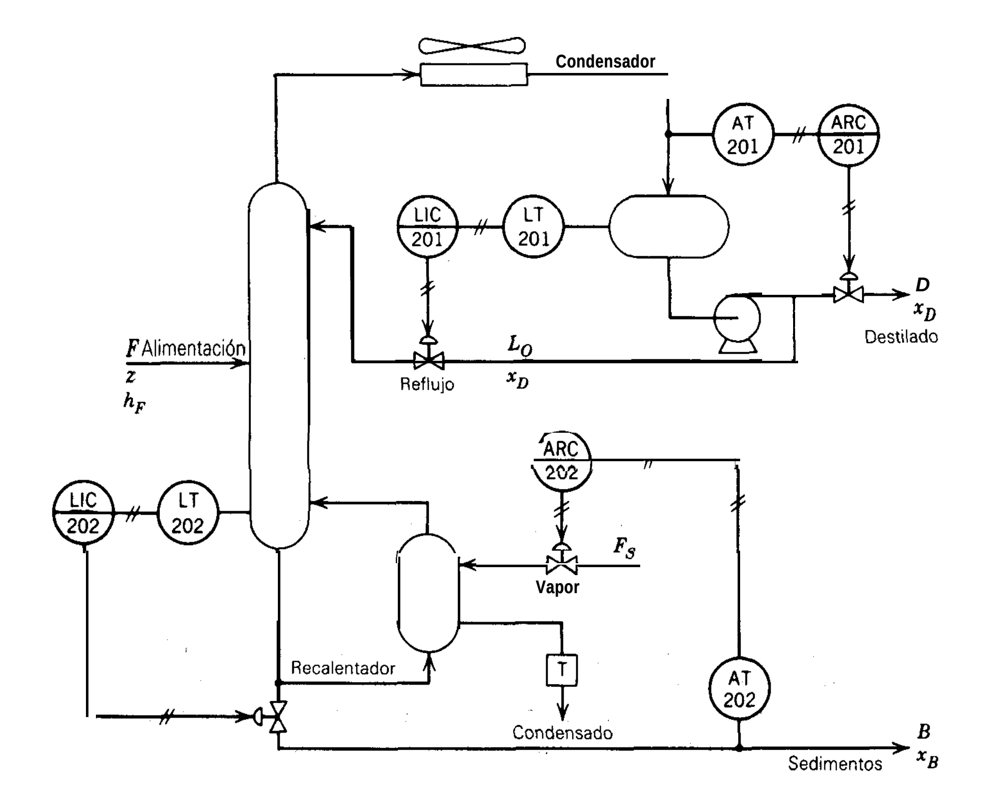


Figura 9-1. Esquema de una columna de destilación

Ecuaciones de bandeja

En la figura 9-2 se esboza una bandeja típica, la bandeja j, contando de arriba a abajo. La primera ecuación que se escribe es el balance total de masa, el cual, cuando no hay reacciones químicas, se puede escribir en unidades molares. Si se supone que a causa de su baja densidad la acumulación de masa en la fase de vapor es despreciable, en comparación con la de la fase líquida, el balance total de masa es:

$$\frac{dM_j}{dt} = L_{j-1} + V_{j+1} - L_j - V_j \tag{9-3}$$

donde:

M_j es el líquido residual en la bandeja j, kgmol
L_j es la razón de líquido que sale de la bandeja j en kgmol/s
V_j es la razón de vapor que sale de la bandeja j en kgmol/s

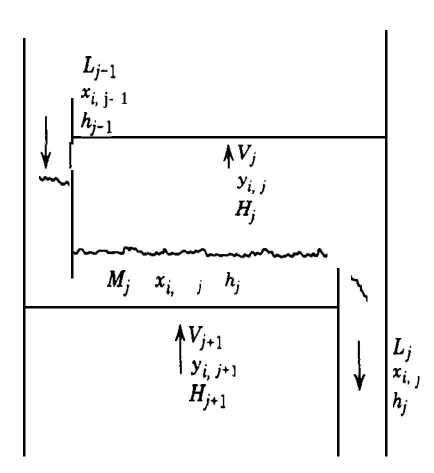


Figura 9-2. Bandeja típica de una columna de destilación.

Para escribir el balance de masa del componente en cada bandeja, se supone que el líquido en la misma está perfectamente mezclado, de manera que las propiedades del líquido que sale de la bandeja son iguales a las del líquido que resta en la misma. Sin esta aproximación de parámetro localizado, seria necesario escribir los balances en cada punto de cada bandeja, y las ecuaciones resultantes serían diferenciales parciales. Una cuestión importante es saber qué hacer con el liquido que sigue hacia abajo; se puede suponer que se mezcla perfectamente con el que está en la bandeja y tratar ésta como un tanque con mezclado perfecto (retardo en las propiedades del líquido), como una tubería en la que no hay mezclado (tiempo muerto) o despreciar los dos tipos de tratamiento. Se notará que la única diferencia entre la primera posición y la última consiste en que los moles del líquido que va hacía abajo forman parte o no del que queda en la bandeja (M_j).

Entonces, el balance del componente i en la bandeja j es

$$\frac{d}{dt}(M_j x_{i,j}) = L_{j-1}x_{i,j-1} + V_{j+1}y_{i,j+1} - L_j x_{i,j} - V_j y_{i,j} \quad (9\text{-}4)$$

donde:

$x_{i,j}$ es la fracción molar del componente i en el líquido de la bandeja j
$y_{i,j}$ es la fracción molar del componente i en el vapor que sale de la bandeja j

La ecuación (9-4) se aplica a $N - 1$ componentes, ya que la suma de las fracciones molares debe ser uno:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,j} = 1 \quad (9\text{-}5)$$

En este punto se tienen N + 1 ecuaciones para cada bandeja; se incluye la ecuación **(9-5),** la cual no es una ecuación de balance, y 2N + 3 variables; es decir, 2N composiciones de líquido y vapor, las razones de líquido y vapor y los moles de líquido en la bandeja. Si se desprecian las pérdidas de calor, el balance de energía en la bandeja j se expresa mediante

$$\frac{d}{dt}(M_j h_j) = L_{j-1}h_{j-1} + V_{j+1}H_{j+1} - L_j h_j - V_j H_j \tag{9-6}$$

donde:

h_j es la entalpia molar del líquido en la bandeja j, J/kgmol
H_j es la entalpia molar del vapor que sale de la bandeja j, J/kgmol

En la ecuación **(9-6),** así como en los balances de energía que siguen, se supone que la entalpia del líquido, h_j, es esencialmente igual a su energía interna. En rigor, en el término de acumulación se debe utilizar la energía interna en lugar de la entalpia.

Ahora se tienen (N + 2) ecuaciones por bandeja y (2N + 5) variables, las dos nuevas variables son la entalpiadel líquido (h_j) y del vapor (H_j). Puesto que se utilizaron ya todas las ecuaciones de conservación de interés, ahora se debe recurrir a la termodinámica y a otras relaciones para calcular las variables que restan; la composición del vapor se puede obtener a partir de la relación de Murphree para la eficiencia en una bandeja:

$$\eta_M = \frac{y_{i,j} - y_{i,j+1}}{y^*_{i,j} - y_{i,j+1}} \tag{9-7}$$

donde:

η_M es la eficiencia de Murphree para la bandeja (se supone constante)
$y^*_{i,j}$ es la fracción molar del componente i en el vapor, en equilibrio con el líquido que sale de la bandeja j

Al aplicar la ecuación (9-7) a cada componente de cada bandeja, se obtienen N ecuaciones adicionales por bandeja, a la vez que se introducen N variables nuevas, las fracciones molares en equilibrio $y^*_{i,j}$. Entonces, de las N relaciones de equilibrio vapor-líquido, se obtiene:

$$y^*_{i,j} = K_i(T_j, P, x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{N,j})x_{i,j} \tag{9-8}$$

donde:

K_i es el coeficiente de equilibrio para el componente i
T_j es la temperatura en la bandeja j, K
P es la presión en la columna, N/m^2

La ecuación (9-8) se puede escribir para cada componente en cada bandeja, con lo que se obtienen N ecuaciones adicionales por bandeja y sólo una nueva variable, la temperatura T_j, debido a que la presión es común a todas las bandejas. Con base en el hecho de que la suma de las fracciones molares de vapor debe ser igual a la unidad, se obtiene una ecuación adicional:

$$\sum_{i=1}^{N} y_{i,j} = 1 \tag{9-9}$$

En este punto se tienen 3N + 6 variables y (3N + 3) ecuaciones para cada bandeja. A partir de la hidráulica de la bandeja se puede obtener una relación entre los moles del líquido que están en la bandeja y la razón de líquido que sale de la misma; una ecuación popular es la fórmula de Francis para presas:

$$L_j = k\rho_j \left(\frac{M_j - M_0}{A\rho_j}\right)^{1.5} \tag{9-10}$$

donde:

M_0 es el líquido que se retiene con flujo cero, kgmol
ρ_j es la densidad molar del líquido, kgmol/m^3
A es el área transversal de la bandeja, m^2
k es un coeficiente dimensional, m$^{1.5}$/s

Las relaciones finales se obtienen a partir de las correlaciones de las propiedades físicas:

$$h_j = h(T_j, P, x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{N,j}) \tag{9-11}$$

$$H_j = H(T_j, P, y_{1,j}, y_{2,j}, \ldots, y_{N,j}) \tag{9-12}$$

$$\rho_j = \rho(T_j, P, x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{N,j}) \tag{9-13}$$

De esto se obtiene un total de 3N + 7 ecuaciones con 3N + 7 variables por bandeja y, por lo tanto, se tiene una ecuación para calcular cada variable. De las ecuaciones, N + 1 son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y el resto son ecuaciones algebraicas.

Bandeja de alimentación y superior

A pesar de que las ecuaciones de bandeja se aplican a todas las bandejas, las ecuaciones para la de alimentación y la superior son ligeramente diferentes. En la bandeja de alimentación se tiene un término adicional de entrada, la alimentación, lo cual significa que en el miembro derecho de las ecuaciones de balance se deben añadir los siguientes términos de razón:

Masa total F **kgmol/s**, en la ecuación (9-3)
Masa del componente $F\ z_i$ **kgmol/s**, en la ecuación (9-4)
Energía $F\ h_F$ **J/s**, en la ecuación (9-6)

donde :

z_i es la fracción molar del componente i en la alimentación
h_F es la entalpia molar de la alimentación, J/kgmol

Para la bandeja superior, las ecuaciones son las mismas que para las demás, con excepción de que el caudal de líquido que entra a la bandeja es el reflujo. En la notación esto significa que el término L_0 es la razón de reflujo, $x_{i,0}$ es la fracción de mol del componente i en el reflujo, y h_0 es la entalpia molar del reflujo.

Rehervidor

En la figura 9-3 se muestra el diagrama de un rehervidor; se supone que la razón de **recirculación** a través del rehervidor de termosifón es alta, en comparación con la razón de sedimentación, de manera que en la parte baja de la torre el líquido esta bien mezclado y tiene la misma composición que el líquido en los tubos del rehervidor. Por lo tanto, el balance de masa total es

$$\frac{d}{dt} M_B = L_{NT} - B - V_{NT+1} \tag{9-14}$$

donde :

M_B es el líquido que se retiene en el fondo de la torre, incluyendo el líquido en los **tubos** del rehervidor, kgmol
L_{NT} es la razón de líquido de la bandeja NT, la última bandeja, **kgmol/s**
B es la razón de producción de sedimentos, **kgmol/s**
V_{NT+1} es la razón de vapor que entra a la última bandeja, **kgmol/s**

Los balances de masa del componente para N - 1 de los componentes se pueden escribir como sigue:

$$\frac{d}{dt}(M_B x_{i,B}) = L_{NT} x_{i,NT} - B x_{i,B} - V_{NT+1}\ y_{i,NT+1} \tag{9-15}$$

donde:

$x_{i,B}$ es la fracción molar del componente i en el fondo de la torre
$y_{i,NT+1}$ es la fracción molar del componente i en la corriente de vapor que entra a la última bandeja

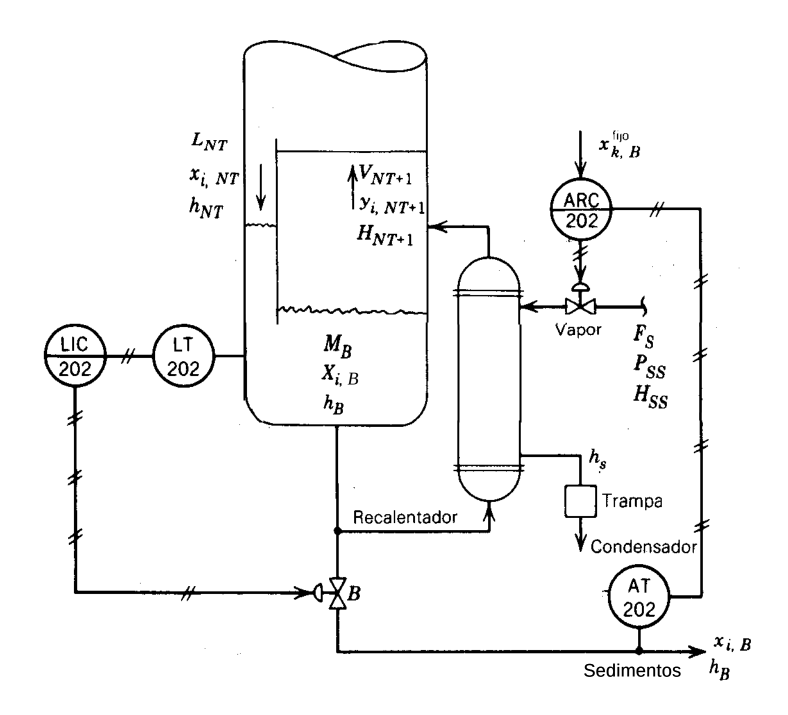


Figura 9-3. Fondo de una columna de destilación con termosifón rehervidor.

Para el componente N se aprovecha el hecho de que la suma de las fracciones de mol debe ser igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,B} = 1 \tag{9-16}$$

En el balance de energía se debe considerar la capacidad de transferencia de calor del rehervidor; para ello se expresa la razón de calor como una función de la diferencia de temperatura:

$$\frac{d}{dt}(M_B h_B) = L_{NT}h_{NT} - Bh_B - V_{NT+1}H_{NT+1} + U_R A_R(T_S - T_B) \tag{9-17}$$

donde:

h_B es la entalpia molar del líquido en el fondo de la torre, J/kgmol
H_{NT+1} es la entalpia molar del vapor que entra a la última bandeja, J/kgmol
U_R es el coeficiente total de transferencia de calor del rehervidor, $J/s\text{-}m^2K$
A_R es el área de transferencia de calor del rehervidor, m^2

T_S es la temperatura del vapor fuera de los tubos del rehervidor, K
T_B es la temperatura en el rehervidor y en el fondo de la columna, K

Se supone que el vapor que sale del rehervidor esta en equilibrio con el líquido en el fondo de la torre y, por lo tanto, las fracciones molares de vapor se expresan con las N relaciones de equilibrio:

$$y_{i,NT+1} = K_i(T_B, P, x_{1,B}, x_{2,B}, \ldots, x_{N,B})\, x_{i,B} \tag{9-18}$$

También se puede utilizar el hecho de que la suma de las fracciones de mol de vapor es igual a la unidad

$$\sum_{i=1}^{N} y_{i,NT+1} = 1 \tag{9-19}$$

En este punto, para el rehervidor se tienen 2N + 3 ecuaciones y 2N + 7 variables: M_B, B, V_{NT+1}, $X_{i,B}$, $y_{i,NT+1}$, h_B, H_{NT+}, , T_B y T_S. De la relación entre la razón de producción de sedimentos y la retención de los mismos resulta una ecuación adicional, la cual se establece en el controlador proporcional de nivel (LIC202); se supone que la válvula de control es lineal:

$$B = K_{BC}\left(\frac{M_B - M_{B0}}{A_B \rho_B}\right)\frac{B_{max}}{R_L} \tag{9-20}$$

donde:

K_{BC} es la ganancia del controlador, sin dimensiones
M_{BO} es la retención con flujo cero, kgmol
ρ_B la densidad molar del líquido, kgmol/m^3
A_B es el área de la sección transversal de la columna, m^2
$B_{máx}$ es la razón de sedimentos cuando la salida del controlador de nivel es máxima, kgmol/s
R_L es el rango del transmisor de nivel, m

Las propiedades físicas se obtienen con relaciones termodinámicas:

$$h_B = h(T_B, P, x_{1,B}, x_{2,B}, \ldots x_{N,B}) \tag{9-21}$$

$$H_{NT+1} = H(T_B, P, y_{1,NT+1}, y_{2,NT+1}, \ldots, y_{N,N+1}) \tag{9-22}$$

$$\rho_B = \rho(T_B, P, x_{1,B}, x_{2,B}, \ldots, x_{N,B}) \tag{9-23}$$

Con esto queda una variable más por calcular, la temperatura del vapor, T_S, para lo cual es necesario definir un nuevo volumen de control, la cámara de vapor externa a los tubos del rehervidor; para los balances de la cámara de vapor se supone que la condensación no se acumula, es decir, con la trampa de vapor se remueve todo el vapor condensado

en la misma razón en que se produce. También se supone que el vapor en la cámara esta saturado y que los tubos del rehervidor están casi a la misma temperatura que el vapor que se condensa; es decir, se desprecia la resistencia a la transferencia de calor en el lado de condensación de los tubos del rehervidor. Por lo tanto, la acumulación de energía se concentra en los tubos del rehervidor, debido a que la masa del vapor es pequeña en comparación con la masa de metal de los tubos. Con base en esta suposición, el balance de energía en la cámara de vapor se expresa mediante

$$C_{MR} \frac{d}{dt} T_S = F_S \, [H_{SS} \quad h_S(T_S)] - U_R A_R \, (T_S \quad T_B) \tag{9-24}$$

donde:

C_{MR} es la capacitancia calorífica de los tubos del rehervidor, J/K
F_S es la razón de flujo del vapor, kg/s
H_{SS} es la entalpia con que entra el vapor, J/kg
$h_S(T_S)$ es la entalpia del vapor condensado cuando sale a través de la trampa de vapor, J/kg

Se notará que en la ecuación (9-24) la acumulación de vapor en la cámara se hace despreciable mediante la suposición de que la razón de flujo del vapor condensado que sale es igual a la del que entra en la cámara.

La razón de flujo del vapor se calcula a partir del modelo de la válvula de control:

$$F_S = C_{VS}(VP_S) \sqrt{P_{SS} - P_S} \tag{9-25}$$

donde:

C_{VS} es el factor de capacidad de la válvula de vapor, kg/s (N/m^2)$^{1/2}$
VP_S es la posición de la válvula de vapor en fracción de desplazamiento
P_{SS} es la presión con que se suministra el vapor, N/m^2
P_S es la presión en la cámara de vapor, N/m^2

La posición de la válvula puede ser una variable de entrada a la columna o la variable manipulada que se utiliza para controlar la fracción molar de uno de los componentes en la producción de sedimentos. En este último caso, se calcula con base en el modelo del controlador de composición (ARC202):

$$VP_s = f_{AC}(x_{k,B} - x_{k,B}^{\text{fijo}}) \tag{9-26}$$

donde:

f_{AC} es la función del controlador analizador
$x_{k,B}$ es la fracción molar del componente clave en la producción de sedimentos.
$x_{k,B}$ es el punto de control para la fracción molar del componente clave.

En la ecuación (9-26) no se muestra el modelo a detalle del sensor y transmisor de composición, el cual debe formar parte de ésta. Estos detalles se dan más adelante, en el modelo del controlador de la composición del destilado, el cual forma parte del modelo del acumulador de condensación.

La presión en la cámara de vapor es una función de la temperatura, si se supone que el vapor está saturado cuando se condensa:

$$P_S = P_S(T_S) \tag{9-27}$$

Con esto se completa el modelo de la cámara de vapor, en el cual se introducen tres variables adicionales: F_S, VP_S y P_S; una ecuación de balance de entalpia y tres ecuaciones algebraicas para calcular la variable de estado, T_S.

Modelo de condensador

En la figura 9-4 se muestra un diagrama de todo el condensador; la corriente de vapor que entra al condensador es el vapor que sale de la bandeja superior de la columna (bandeja número 1) y el líquido que sale del tambor acumulador se reparte entre el producto destilado (D) y el reflujo a la columna (L_0), el cual es la entrada de líquido a la bandeja superior. La razón del producto destilado se manipula mediante el controlador de composición del producto superficial (ARC201) y la razón de reflujo se manipula mediante un controlador proporcional de nivel en el tambor del acumulador (LIC201).

En una columna con un condensador total, la presión se determina únicamente mediante el balance de calor; es decir, si al rehervidor se le suministra calor a una razón superior a la razón con que se elimina en el condensador, la presión en la columna aumenta conforme transcurre el tiempo. Lo anterior tiene el efecto de incrementar la temperatura en todas las bandejas y en el condensador, con lo cual se ocasiona un incremento en la razón de calor que se elimina en el condensador; dicho incremento continúa hasta que se satisface nuevamente el balance de calor con una presión (más alta) de estado estacionario. Este mecanismo de autorregulación se presenta aun cuando se controle la presión y, por tanto, la presión de la columna se puede controlar mediante la manipulación de la razón de transferencia de calor en el condensador o en el rehervidor. Con el fin de simplificar, se supondrá que no se controla la presión en la columna y que el condensador esta a su máxima capacidad, con lo cual se logra mantener la presión de la columna en el punto más bajo que permite la capacidad del condensador, de lo cual generalmente resulta una mayor separación de los componentes.

Al elaborar el modelo del condensador se despreció la acumulación de masa en la fase de vapor, lo cual significa que el líquido que entra al tambor acumulador tiene la misma composición y razón de flujo que el vapor que entra al condensador y, por tanto, no se requieren balances de material alrededor del volumen de control del condensador. Sin embargo, como la entalpia y la temperatura cambian al haber condensación, se requiere un balance de energía:

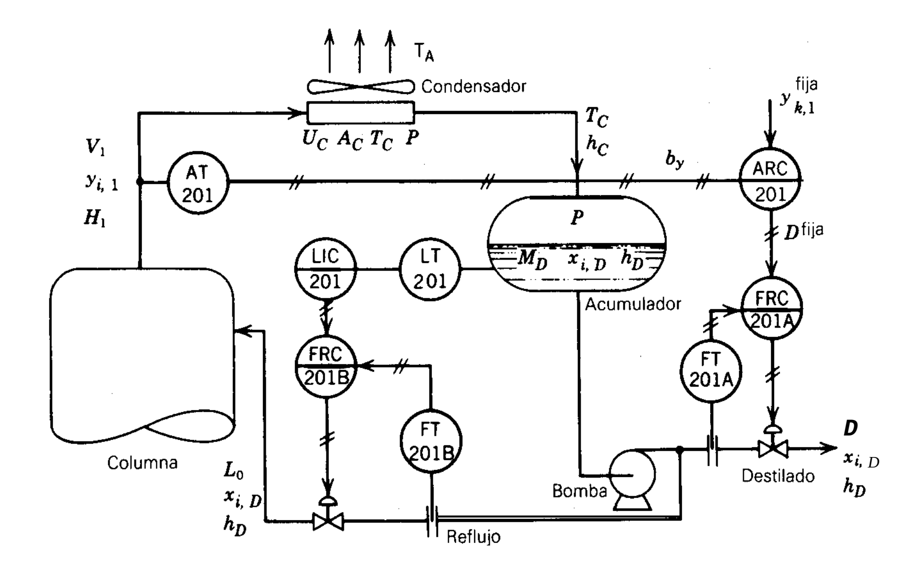


Figura 9-4. Condensador total enfriado por aire para una columna de destilación.

$$C_{MC} \frac{d}{dt} T_C = V_1(H_1 - h_C) - U_C A_C (T_C - T_A) \tag{9-28}$$

donde:

T_C es la temperatura en el condensador, K
T_A es la temperatura del aire de enfriamiento en el exterior de los tubos del condensador, K
h_C es la entalpia molar del líquido que sale del condensador, J/kgmol
C_{MC} es la capacidad calorífica de los tubos del condensador, J/K
U_C es el coeficiente de transferencia de calor del condensador, J/s-m^2-K
A_C es el área de transferencia de calor del condensador, m^2

Al escribir la ecuación (9-28) se hicieron varias consideraciones para simplificar: primera, se supuso que la acumulación de energía únicamente tiene lugar en las paredes de los tubos del condensador como el medio de enfriamiento externo, están a temperaturas uniformes T_C y T_A, respectivamente; la tercera suposición es que la resistencia a la transferencia de calor en el lado de condensación de los tubos de condensación es despreciable, en comparación con la resistencia a la transferencia de calor del lado que está en contacto con el aire. La suposición de que el líquido que sale del condensador tiene la misma composición que el vapor que abandona la columna, se utiliza para calcular la entalpia del líquido que sale del condensador

$$h_C = h(T_C, P, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{N,1}) \tag{9-29}$$

y la presión en la columna, así como la presión de punto de burbuja de este líquido a la temperatura del condensador, se calcula mediante

$$P = P_{BP}(T_C, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{N,1}) \tag{9-30}$$

donde:

P_{BP} es la presión de punto de burbuja en función de la temperatura y la composición, N/m^2

Se notará que con la combinación de las ecuaciones (9-28) y (9-30) se elabora el modelo del efecto de regulación de presión del balance de calor que se trató anteriormente. En el modelo, al incrementar la razón de vapor que sale de la columna, V_1, se provoca un aumento en la temperatura T_C, lo cual, a su vez, causa un incremento en la razón de eliminación de calor, ecuación (9-28), y en la presión de la columna, ecuación (9-30). Si la presión se controlara mediante la manipulación del flujo de aire de enfriamiento a través del condensador, entonces U_C y T_C se convertirían en variables en la ecuación (9-28), por lo que serían necesarios los balances para el lado del condensador en contacto con el aire. El cálculo de?", queda como ejercicio para el estudiante.

Tambor acumulador del condensador

Ahora la atención se vuelve al tambor acumulador del condensador de la figura 9-4. En estado estacionario, la razón, composición y entalpia de las corrientes de líquido que salen del acumulador -el reflujo y el producto destilado- son las mismas que las del líquido que sale del condensador; sin embargo, el líquido en el acumulador constituye un retardo de tiempo para los cambios en razón, composición y entalpia; a esto se debe que en el modelo dinámico sea necesario incluir los balances referentes al acumulador. El retardo para los cambios en la razón de vapor se obtiene con base en el balance total de masa:

$$\frac{d}{dt} M_D = V_1 - L_0 - D \tag{9-31}$$

donde:

M_D es el líquido que se retiene en el acumulador, kgmol
L_O es la razón de reflujo, kgmol/s
D es la razón del producto destilado, kgmol/s

En la ecuación (9-31) la razón de líquido en el acumulador es la misma que la razón de vapor en el condensador, ya que se desprecia la acumulación de masa en el condensador.

El retardo para los cambios en la composición del vapor se obtiene con base en los N − 1 balances de masa de los componentes:

$$\frac{d}{dt}(M_D x_{i,D}) = V_1 y_{i,1} - L_0 x_{i,D} - D x_{i,D} \tag{9-32}$$

donde:

$x_{i,D}$ es la fracción molar del componente i en el líquido del acumulador

La fracción molar del componente N se obtiene a partir del hecho de que la suma de las fracciones molares debe ser igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,D} = 1 \tag{9-33}$$

El modelo para el retardo de los cambios de entalpia se hace con el balance de energía:

$$\frac{d}{dt}(M_D h_D) = V_1 h_C - L_0 h_D - D h_D \tag{9-34}$$

donde:

h_D es la entalpia molar del líquido en el acumulador, J/kgmol

Hasta ahora se tienen N + 2 ecuaciones y N + 4 variables: M_D, $x_{i,D}$, h_D, L_O y D. La ecuación para la razón de reflujo se obtiene del controlador proporcional del nivel del acumulador (LIC201); en su forma más simple, si se supone que el control del caudal del reflujo es perfecto (FRC201B)

$$L_0 = K_{LC0} L_{0\text{máx}} \left(\frac{M_D - M_{D0}}{M_{D\text{máx}} - M_{D0}} \right) \tag{9-35}$$

donde:

$L_{0\text{máx}}$ es la razón de reflujo cuando la salida del controlador esta al máximo, kgmol/s
K_{LC0} es la ganancia del controlador de nivel (sin dimensiones)
M_{D0} es el líquido que se retiene en el acumulador cuando la razón de reflujo es cero, kgmol
$M_{D\text{máx}}$ es el líquido que se retiene en el acumulador cuando el nivel es máximo, kgmol

En la ecuación (9-35) se desprecian las variaciones en la densidad del líquido; en cambio, con la ecuación (9-20) se tiene un modelo alternativo para el controlador de nivel, en el

cual se consideran las variaciones de densidad. Cualquiera de los modelos se puede utilizar para cualquier controlador de nivel.

La ecuación final que se necesita para completar el modelo del tambor acumulador es la ecuación para la razón de destilación D, en la cual se requiere un modelo del circuito de control de la composición del destilado. Con el fin de simplificar, el analizador (AT201) se simula con un retardo de primer orden:

$$\frac{d}{dt} b_y = \frac{1}{\tau_{AT}} \left[\frac{y_{k,1} - y_0}{y_{\text{máx}} - y_0} \right] \tag{9-36}$$

donde:

- b_y es la señal normalizada que sale del analizador
- $y_{k,1}$ es la fracción molar del componente clave en el vapor que sale de la bandeja superior
- y_O es el límite inferior del rango a que se calibra el analizador (fracción molar)
- $y_{\text{máx}}$ es el límite superior del rango a que se calibra el analizador
- τ_{AT} es la constante de tiempo del retardo de primer orden, s

Se notará que, conforme la fracción molar varía de y_O a $y_{\text{máx}}$, la señal b_y del analizador varía de cero a la unidad.

El controlador analizador (ARC201) se modela como un controlador PID (proporcional-integracional-derivativo) (ver ejemplo 9-4):

$$D^{\text{fijo}} = f_{AC}\ (b_y,\ y_{k,1}^{\text{fijo}},\ K_{AC},\ \tau_{IAC}, \tau_{DAC}) \tag{9-37}$$

donde:

- D^{fijo} es la salida del controlador y el punto de control del controlador del caudal del producto destilado (FRC201A), kgmol/s
- $y_{k,1}^{\text{fijo}}$ es el punto de control del controlador analizador (ARC201).
- K_{AC} es la ganancia del controlador analizador.
- τ_{IAC} es el tiempo de integración del analizador controlador, s
- τ_{DAC} es el tiempo de derivación del controlador analizador, s

Finalmente, se puede suponer que el controlador de flujo es lo suficientemente rápido como para mantener el destilado igual al punto de control en todo momento:

$$D = D^{\text{fijo}} \tag{9-38}$$

Sin embargo, se deben fijar límites al destilado para asegurar que siempre seapositivo y menor al caudal máximo que puede controlar el controlador de flujo:

$$0 \leq D \leq D_{\text{máx}} \tag{9-39}$$

donde:

$D_{máx}$ es el caudal máximo de destilado que se puede medir con el transmisor de flujo (FT201A), kgmol/s

Con esto se completa el modelo de la columna. Para hacer el modelo se dividió la columna en *NT* volúmenes de control, uno por cada bandeja; para el rehervidor y su cámara de vapor, el condensador y su tambor acumulador se utilizaron volúmenes adicionales. Las diversas ecuaciones diferenciales y algebraicas que se escribieron, incluidas las de física básica y principios de química, son necesarias para calcular las variables del proceso: razones de flujo, composiciones y temperaturas.

Condiciones iniciales

Para simular la columna se necesitan las condiciones iniciales de todas las ***variables de estado***. Las variables de estado son aquellas que aparecen en las derivadas de las ecuaciones diferenciales; el nombre se origina en el hecho de que con estas variables se define un estado único del modelo en cualquier instante. Puesto que todas las ecuaciones diferenciales son de primer orden, únicamente se requiere una condición inicial por ecuación diferencial. Las variables de estado del modelo son las siguientes:

Los moles de líquido en cada bandeja:	M_j,	$j = 1, 2, \ldots, NT$
en el fondo de la columna:	M_B	
en el tambor del acumulador:	M_D	
Fracciones molares de líquido por bandeja:	$x_{i,j}$,	$i = 1, 2, \ldots, N-1$ $j = 1, 2, \ldots, NT$
en el fondo de la columna:	$x_{i,B}$,	$i = 1, 2, \ldots, N-1$
en el tambor del acumulador:	$x_{i,D}$,	$i = 1, 2, \ldots, N-1$
Entalpia molar del líquido en cada bandeja:	H_j,	$j = 1, 2, \ldots, NT$
en el fondo de la columna:	h_B	
y en el tambor del acumulador:	h_D	
Temperatura en la cámara de vapor:	T_S	
y en el condensador:	T_C	
Salida del transmisor analizador (AT201):	b_y	
Salidas de los controladores de composición	VP_S y D^{fijo}	

Las condiciones iniciales de estas variables se determinan por el tipo de corrida que se trate de simular: el comportamiento más común que se analiza en los estudios de con-

trol de sistemas continuos es el de la respuesta del sistema a los cambios en las variables de entrada (por ejemplo, perturbaciones y puntos de control), a partir de ciertas condiciones de diseño de estado estacionario. Para este tipo de comportamiento, con los valores iniciales de las variables de estado se deben satisfacer las ecuaciones del modelo en estado estacionario, es decir, todos los términos derivativos se fijan en cero. Para un modelo tan complejo como el que se acaba de presentar, se necesita un programa de computadora para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales y calcular los valores iniciales de estado estacionario de las variables de estado, debido a que, cuando los términos derivativos se fijan en cero, las ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas; en los programas comunes para resolver sistemas de ecuaciones no lineales se incluyen los métodos de Newton-Raphson[(1)] y cuasi Newton[(2)].

Otro tipo de corrida de simulación es el de puesta en operación de la columna. En este caso se puede suponer que las condiciones iniciales son aquellas en que las bandejas, el fondo de la columna y el acumulador están llenos de líquido con la composición y la entalpia de alimentación. Para la retención en la bandeja se suponen razones iniciales de flujo de líquido iguales a cero, es decir, retención mínima. Se puede suponer que la temperatura a lo largo de la columna, rehervidor y condensador es la de alimentación, y que la presión es igual a la presión de punto de burbujeo de la alimentación a esa temperatura; se pueden suponer muchas variaciones de tales condiciones. La mayor dificultad al simular la puesta en operación estriba en decidir e implementar la secuencia en que las diferentes entradas de la columna se llevan a sus valores de diseño; esto puede consumir tiempo si la simulación no se hace de un modo interactivo; es decir, con interacción completa entre el trabajo del ingeniero y la solución de las ecuaciones obtenida mediante la computadora.

Variables de entrada

Las variables de entrada para el modelo son las siguientes:

Razón de flujo de alimentación: F,
fracción molar: z_i, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$,
y entalpia: h_F
Razón de flujo del vapor: F_S
presión de suministro: P_{SS}
y entalpia: H_{SS}
Temperatura del aire para enfriar el condensador: T_A
Puntos de control del controlador de composición: $x_{k,B}^{\text{fija}}$ y $y_{k,1}^{\text{fija}}$

En la corrida de simulación de perturbación se cambia el valor de diseño de cada una de estas variables, generalmente con una función rampa, y se analiza el tiempo de respuesta de la salida y de las variables internas. En algunas corridas se puede cambiar el valor de más de una variable a la vez. En la simulación de la puesta en operación, las variables se llevan a su valor de diseño en una secuencia que se diseña con ayuda de la simulación tendiente a lograr un tiempo de puesta en operación mínimo, consumo de energía mínimo o pérdida mínima de producto fuera de especificación.

Resumen

En esta sección se desarrolló el modelo matemático de una columna de destilación de múltiples componentes. Entre las características del modelo se incluye la presión variable de la columna, un modelo hidráulico simple de la bandeja y modelos dinámicos simples del rehervidor y el condensador. En el desarrollo paso a paso del modelo se aprecia la utilización de los balances de material y energía, el equilibrio de fase, los modelos hidráulicos, las relaciones termodinámicas y los modelos del sistema de control para llegar al modelo completo de la columna.

9-3. MODELO DINÁMICO DE UN HORNO

En el ejemplo procedente se dividió la columna de destilación en un cierto número de volúmenes de control, y se supuso que los compuestos, temperaturas y otras variables son uniformes a lo largo de cada volumen de control; esto significa que las propiedades están "concentradas" en cada volumen de control. En este ejemplo se estudiará el modelo de un horno donde las propiedades se distribuyen y el sistema no se puede dividir de manera conveniente en volúmenes de control con propiedades uniformes, y, por tanto, el presente es un ejemplo de un modelo de parámetro distribuido.

El sistema que se va a modelar es un horno, el cual se muestra en la figura 9-5, que se utiliza para calentar un gas en proceso mediante la combustión en el fogón externo al tubo. Se supondrá que la temperatura en el fogón es uniforme, pero que la temperatura del gas en el tubo y las paredes del mismo son funciones de la posición que se mide como la distancia Z desde la entrada al tubo. La temperatura de salida del proceso se controla mediante un controlador por retroalimentación **(TRC42),** con el cual se manipula el flujo de combustible a los quemadores, F_H. Las perturbaciones posibles son el flujo, F, y la temperatura de entrada del fluido que se procesa, T_O, así como el contenido calorífico del combustible, H_F.

Puesto que en el tubo la temperatura del gas varía continuamente con la distancia Z, la cual se mide desde la entrada al tubo, se debe seleccionar como volumen de control una sección de tubo lo suficientemente corta ΔZ, de manera que las propiedades se puedan suponer constantes dentro de sus límites, tal volumen de control se muestra en la figura 9-6. En los balances de masa de este volumen de control se aprecia que el flujo del fluido que se procesa, F, es constante, de acuerdo con la posición, si se desprecia la acumulación de masa en el volumen de control; esto se puede hacer con toda seguridad, ya que el interés principal consiste en hacer el modelo de los efectos de transferencia de calor. También se debe despreciar la conducción de calor a lo largo de las paredes del tubo, en la dirección del flujo. Bajo estas restricciones, en el volumen de control de la figura 9-6 el balance de energía del gas se expresa mediante

$$\frac{\pi D_i^2}{4} \rho \Delta Z \, C_v \frac{dT}{dt} = F \, C_p \, T|_Z - F \, C_p \, T|_{Z+\Delta Z} + h_i \, \pi D_i \Delta Z \, (T_W - T) \qquad (9\text{-}40)$$

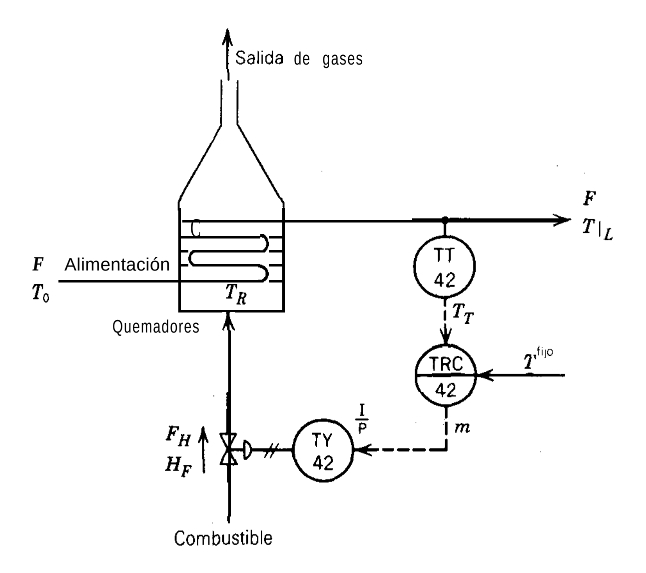


Figura 9-5. Horno para calentar un líquido en proceso.

donde:

T es la temperatura del fluido que se procesa, K
T_W es la temperatura de la pared del tubo, K
F es el flujo del fluido que se procesa, kgmól/s
D_i es el diámetro interno del tubo, m
h_i es el coeficiente de transferencia de calor de la capa interna, J/s-m^2-K
ρ es la densidad molar del fluido y se supone constante, kgmol/m^3

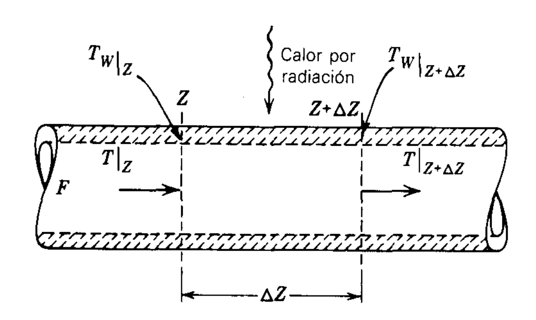


Figura 9-6. Sección de un tubo de horno.

C_v es la capacidad calorífica molar del fluido a volumen constante; se supone constante, J/kgmol-K

C_p es la capacidad calorífica molar del fluido a presión constante; se supone constante, J/kgmol-K

AZ es la longitud del volumen de control, m

En la ecuación (9-40) se debe diferenciar el término de la temperatura que entra al volumen de control, $T|_Z$, del de la temperatura que sale del volumen de control, $T|_{Z+\Delta Z}$, en los términos de entalpia, debido a que se toma la diferencia entre estos dos términos; sin embargo, esta diferenciación no se necesita para los términos de las razones de acumulación y transferencia de calor, pues se supone que el elemento es lo suficientemente pequeño como para representar la temperatura del mismo mediante un valor promedio con bastante aproximación; lo mismo se aplica para la temperatura de la pared, T_W. La capacidad calorífica a presión constante, C_p, se utiliza en los términos de entalpia del flujo, debido a que en ellos se incluye el trabajo del flujo; en cambio, la capacidad calorífica a volumen constante, C_v, se utiliza en el término de acumulación, porque no hay trabajo del flujo que se asocie con aquél. Por razones de simplificación, se supone que las propiedades físicas son constantes, pero también se puede suponer que son funciones de la temperatura y evaluarlas mediante T.

Con la ecuación (9-40) se representa el balance de energía en un volumen de control de longitud AZ, que se ubica a cualquier distancia de la entrada del tubo. Ésta se puede reducir a un balance de energía en cualquier punto del tubo, si se divide entre el volumen del volumen de control y se toman límites cuando AZ $\rightarrow$ 0. A continuación se puede hacer lo siguiente:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{4}{\pi D_i^2} FC,, \frac{T|_Z - T|_{Z+\Delta Z}}{AZ} + \frac{4h_i}{D_i} (T_W - T) \qquad (9\text{-}41)$$

donde la derivada en tiempo se cambia por una parcial, ya que se toma en un punto fijo del tubo y la temperatura es función tanto de la posición como del tiempo. Si se toman límites para la ecuación (9-41) cuando AZ $\rightarrow$ 0, se obtiene:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{4}{\pi D_i^2} FC, \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{4h_i}{D} (T_W - T) \qquad (9\text{-}42)$$

en esta ecuación se substituyó la identidad:

$$\frac{\partial T}{\partial Z} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{T|_{Z+\Delta Z} - T|_Z}{AZ} \qquad (9\text{-}43)$$

La (9-42) es una ecuación diferencial parcial con que se representa el balance de energía por unidad de volumen en cualquier punto del tubo y en cualquier instante. Puesto

que se trata de una sola ecuación con dos variables, T y T_W, se necesita otra ecuación, la cual se debe obtener a partir del balance de energía de la pared metálica del tubo en el volumen de control de la figura 9-6. Si se desprecia la conducción de calor a lo largo del tubo, se obtiene

$$\rho_M \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)\,\Delta Z\, C_M \frac{dT_W}{dt} = \epsilon\sigma\, \pi D_0 \Delta Z\,(T_R^4 - T_W^4) - h_i\, \pi D_i\, \Delta Z(T_W - T) \qquad (9\text{-}44)$$

donde:

ρ_M es la densidad del metal del tubo; se supone constante, kg/m^3
C_M es el calor específico del metal; se supone constante, J/kg-K
D_o es el diámetro externo del tubo, m
T_R es la temperatura que radia del fogón; se supone uniforme, K
ϵ es la emisividad de la superficie del tubo; se supone constante
σ es la constante de Stefan-Boltzman, J/s-m^2-K^4

Al modelar la transferencia de calor mediante radiación en la ecuación (9-44), se supuso que el área del fogón es mucho mayor que la del tubo, y que en el fogón se abarca completamente al tubo. Para convertir la ecuación (9-44) en una ecuación diferencial parcial que se pueda aplicar a un punto del tubo, todo lo que se necesita es dividirla entre el volumen del elemento:

$$\rho_M C_M \frac{\partial T_W}{\partial t} = \frac{4\epsilon\sigma D_o}{D_o^2 - D_i^2}(T_R^4 - T_W^4) - \frac{4h_i D_i}{D_o^2 - D_i^2}(T_W - T) \qquad (9\text{-}45)$$

Para obtener la ecuación (9-45) se introdujo una nueva variable, T_R, para la cual se puede obtener una ecuación a partir del balance de energía en el fogón:

$$M_B C_B \frac{dT_R}{dt} = F_H H_F \eta_F - \int_0^L \epsilon\sigma\, \pi D_o (T_R^4 - T_W^4)\, dZ \qquad (9\text{-}46)$$

donde:

M_B es la masa efectiva del fogón, kg
C_B es el calor específico del fogón; se supone constante, J/kg-K
F_H es la razón de flujo del combustible, kg/s
H_F es el valor calorífico del combustible, J/kg
η_F es la eficiencia del horno; se supone constante
L es la longitud constante del tubo del horno, m

Se notara que en la ecuación (9-46) se requirió integrar la razón de transferencia de calor a las paredes del tubo, sobre la longitud del tubo. Con la eficiencia del horno, η_F, se toman en cuenta las pérdidas de calor a través de las paredes del tubo y de los gases de

escape: con esta simplificación se evita el desarrollo de un modelo más detallado del fogón.

La razón del combustible, F_H, se calcula a partir de un modelo del sistema de control de temperatura, de la siguiente manera:

Válvula de control; se desprecia el retardo del actuador

$$F_H = C_{VH} f_V(m) \sqrt{\Delta P} \tag{9-47}$$

Controlador de temperatura (TRC42), como en el ejemplo 9-4

$$m = F_{TC} (T^{fijo}, T_T, K_c, \tau_I, \tau_D) \tag{9-48}$$

Transmisor de temperatura (TT42); se supone un retardo de primer orden

$$\frac{dT_T}{dt} = \frac{1}{\tau_T} (T|_L - T_T) \tag{9-49}$$

donde:

C_{VH} es el factor de capacidad de la válvula, kg/s-Pa$^{1/2}$
$f_V(m)$ es la función característica de la válvula
ΔP es la caída de presión a través de la válvula, Pa
T^{fijo} es el punto de control de la temperatura, K
T_T es la señal del transmisor, K
K_c es la ganancia proporcional
τ_I es el tiempo de integración, s
τ_D es el tiempo de derivación, s
τ_T es la constante de tiempo del sensor, s

Con esto se completa el desarrollo del modelo del horno, el cual consta de dos ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones (9-42) y (9-45), una ecuación íntegro-diferencial, ecuación (9-46), y el modelo del circuito de control de temperatura, ecuaciones (9-47) a (9-49). En función de las condiciones inicial y límite se necesita:

$T_0(t)$ temperatura de entrada como función del tiempo
$T(0,Z)$ perfil de la temperatura inicial en el horno
$T_W(0,Z)$ perfil de la temperatura inicial de la pared del tubo
$T_R(0)$ temperatura inicial del fogón
$T_T(0)$ señal inicial del transmisor

Las variables de entrada al modelo son, además de $T_0(t)$:

$F(t)$ flujo del fluido que se procesa

$H_F(t)$ contenido calorífico del combustible
$T^{\text{fijo}}(t)$ punto de control del controlador de temperatura

Ahora se estudiarán los métodos para resolver las ecuaciones del modelo, debido a que se trata de ecuaciones diferenciales parciales.

9-4. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

A pesar de que existen paquetes de programas con los que se pueden manejar las ecuaciones diferenciales parciales directamente (ver sección 9-6), una manera común de trabajar con ellas es discretizar las variables de posición, de manera que cada ecuación diferencial parcial se convierte en varias ecuaciones diferenciales ordinarias. La ventaja de este procedimiento es que da por resultado un modelo que se puede resolver con programas estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias. El procedimiento se demostrará mediante la discretización de las ecuaciones del modelo del horno.

El primer paso consiste en dividir la longitud del tubo, L, en N incrementos de longitud AZ, donde:

$$\Delta Z = \frac{L}{N} \tag{9-50}$$

Para simplificar esta presentación, se supondrá que los incrementos son de longitud uniforme, aunque no es forzoso que lo sean.

En la figura 9-7 aparece una sección del tubo en la que se muestran dos incrementos; en este modelo del horno la única derivada respecto a Z que se debe discretizar aparece en la ecuación (9-42). Se tienen tres opciones para hacer la aproximación de la diferencia finita de la derivada en el punto j:

Diferencia hacia adelante $$\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_j = \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta Z} \tag{9-51}$$

Diferencia hacia atrás $$\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_j = \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta Z} \tag{9-52}$$

Diferencia central $$\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_j = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta Z} \tag{9-53}$$

De éstas, la diferencia central es la más exacta en términos de error de truncamiento de la expansión de la serie de Taylor de la función T(Z), por lo tanto, primero se probará ésta y se substituirá en la ecuación (9-42):

$$\rho C_v \frac{dT_j}{dt} = \frac{4}{\pi D_i^2} F C_p \left(\frac{T_{j-1} - T_{j+1}}{2\Delta Z}\right) + \frac{4h_i}{D_i}(T_{Wj} - T_j) \tag{9-54}$$

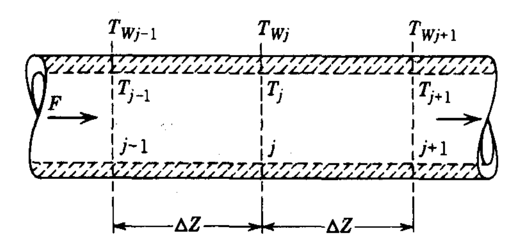


Figura 9-7. Discretización de un tubo en secciones de longitud AZ,

donde:

T_j es la temperatura del fluido en la interfaz entre el incremento j y el $(j + 1)$, K.

En la ecuación *(9-54)* se tiene una dificultad básica con su capacidad para modelar el fenómeno físico de la transferencia dé calor en el horno. Para comprender esta dificultad se debe tener en cuenta que, *con* el primer término del lado derecho de la ecuación (9-54), se representa la transferencia de calor por convección dentro del incremento de tubo del horno; sin embargo, en el horno real la propagación de la variación de temperatura por convección puede ocurrir únicamente de izquierda a derecha, es decir, en la dirección del flujo. Éste no es el caso en la ecuación (9-54), ya que la temperatura hacia adelante T_{j+1} tiene un efecto sobre la temperatura anterior (upstream) T_j a través del término de convección. Es fácil demostrar que la aproximación de diferencia hacia adelante, ecuación (9-51), también da por resultado un modelo irreal, con lo cual sólo queda la aproximación de diferencia hacia atrás como la única con que se obtiene un modelo físicamente correcto. De substituir la ecuación (9-52) en la (9-42), se obtiene:

$$\rho C_v \frac{dT_j}{dt} = \frac{4}{\pi D_i^2 \Delta Z} F C_p (T_{j-1} - T_j) + \frac{4h_i}{D_i}(T_{Wj} - T_j) \tag{9-55}$$

La ecuación (9-55) no sólo es una representación más correcta de la propagación de las variaciones de temperatura por convección, sino que también es más estable numéricamente, debido a que el término de convección se suma a la autorregulación de temperatura en el término de transferencia de calor; en otras palabras, con un incremento de T_j se provoca un decremento en la tasa de cambio, dT_j/dt, el cual es mayor cuando se calcula con la ecuación (9-55) que cuando se'calcula con la ecuación (9-54). Al comparar la ecuación (9-55) con la (9-41), se puede observar que la primera se obtiene directamente al realizar el balance de energfa en el incremento j de la longitud del tubo, si se supone que la temperatura es uniforme a lo largo del incremento.

La discretización del modelo del horno se completa al escribir las ecuaciones (9-45) y (9-46) de la manera siguiente:

$$\rho_M C_M \frac{dT_{Wj}}{dt} = \frac{4\epsilon\sigma D_o}{D_o^2 - D_i^2}(T_R^4 - T_{Wj}^4) - \frac{4h_i D_i}{D_o^2 - D_i^2}(T_{Wj} - T_j) \tag{9-56}$$

$$M_B C_B \frac{dT_R}{dt} = F_H H_F \eta_F - \sum_{j=1}^{N} \epsilon \sigma \pi D_o \Delta Z \ (T_R^4 - T_{Wj}^4) \qquad (9\text{-}57)$$

donde T_{Wj} es la temperatura de la pared del tubo en la interfaz entre el incremento j y el $(j + 1)$. En la ecuación (9-57), la suma de los términos de radiación de calor se aproxima a la integral de la ecuación (9-46).

Si se considera la transferencia de calor mediante la conducción a lo largo del tubo, se obtienen términos con segundas derivadas parciales respecto a Z en las ecuaciones (942) y (9-45); en este caso, la aproximación de diferencia central es físicamente correcta para estas derivadas, ya que las variaciones de temperatura se propagan en ambas direcciones mediante los términos de conducción.

En resumen, un modelo de parámetro distribuido se puede convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante la discretización adecuada de las derivadas espaciales. Cada una de las ecuaciones diferenciales parciales originales se convierte mediante este procedimiento en varias ecuaciones diferenciales ordinarias, en las cuales la única variable independiente es el tiempo.

9-5. SIMULACIÓN POR COMPUTADORA DE LOS MODELOS DE PROCESOS DINÁMICOS

Una vez que se obtienen las ecuaciones del modelo, el siguiente paso en la simulación de un sistema físico es la solución de las ecuaciones. Cuando se utiliza una computadora digital para resolver las ecuaciones, se pueden aplicar tres métodos generales para programar las ecuaciones del modelo:

1. Se utiliza algún método simple de integración numérica para resolver las ecuaciones.
2. se utiliza un paquete de subrutinas de propósito general para resolver ecuaciones diferenciales.
3. Se utiliza un lenguaje de simulación para simular sistemas continuos.

Con el fin de proporcionar al estudiante una herramienta para resolver modelos simples sin necesidad de aprender un nuevo paquete o lenguaje de programación, aquí se presenta el primero de los métodos mencionados. Los otros dos métodos son recomendables para la solución de modelos más complejos por parte de estudiantes de cursos avanzados y de profesionales activos en la industria. La utilización de computadoras analógicas para simular procesos no se aborda, ya que para un tratamiento adecuado se requiere mas espacio del que se le puede dedicar en este libro, sin embargo, se recomienda a los instructores utilizar simulaciones analógicas preprogramadas en las demostraciones de clase y tareas.

Como se vio en las secciones precedentes, el modelo dinámico de proceso, aun aquel de los sistemas distribuidos, se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y ecuaciones algebraicas auxiliares. En general, las ecuaciones diferenciales se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1,\ x_2,\ .\ .\ x_n,\ t) \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \qquad (9\text{-}58)$$

donde:

x_i son las variables de estado del modelo, por ejemplo, temperaturas, composiciones
f_i son las funciones derivadas que resultan de la solución de las ecuaciones del modelo por medio de derivadas.
n es la cantidad de ecuaciones diferenciales

En todos los métodos generales para resolver modelos dinámicos, se supone que las ecuaciones del modelo son de la forma de la ecuación (9-58). Para resolver estas ecuaciones se deben conocer los valores iniciales de todas las variables de estado, es decir, $x_i(t_0)$, donde t_0 es el tiempo inicial; a pesar de que no se indica explícitamente en la ecuación (9-58), también se necesitan las entradas o *funciones de forzamiento* que provocan cambios en las variables del modelo. Cuando las funciones derivadas, f_i, son muy complejas, frecuentemente es conveniente expresarlas como varias ecuaciones algebraicas más simples, en cuyo caso se genera una variable auxiliar por cada ecuación.

Ejemplo: Simulación de un tanque de reacción con agitación continua

Para reafirmar los conceptos, se estudiará el modelo relativamente simple de un tanque de reacción con agitación continua (TRAC). En la. figura 9-8 se presenta un croquis del reactor con casquillo. Si se supone que el reactor y el casquillo están combinados perfectamente, que los volúmenes y las propiedades físicas son constantes y que las pérdidas de calor se desprecian, las ecuaciones del modelo son:

Balance de masa del reactivo A

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V}(C_{Ai} - C_A) - kC_A^2 \qquad (9\text{-}59)$$

Balance de energía en el contenido del reactor

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V}(T_i - T)\ \frac{\Delta H_R}{\rho C_p}kC_A^2\ \frac{UA}{V\rho C_p}(T - T_C) \qquad (9\text{-}60)$$

Balance de energía en el casquillo

$$\frac{dT_C}{dt} = \frac{UA}{V_C \rho_C C_{pC}}(T - T_C) - \frac{F_C}{V_C}(T_C - T_{Ci}) \qquad (9\text{-}61)$$

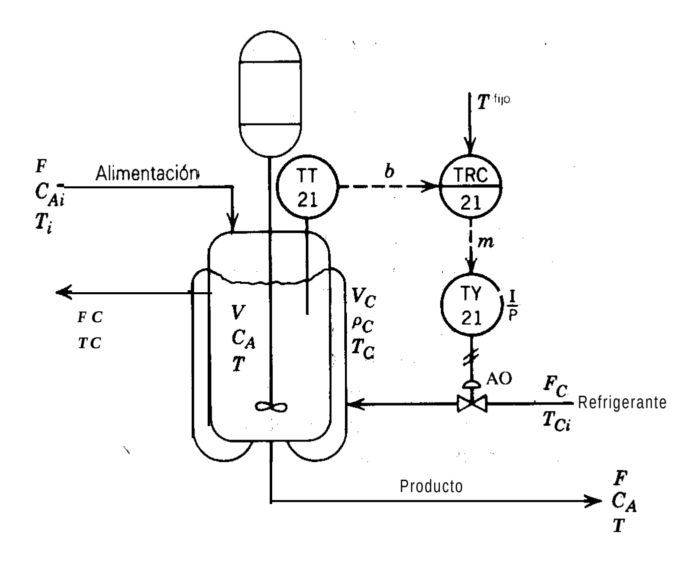


Figura 9-8. Esquema de un tanque de reacción con agitación continua.

Coeficiente de razón de reacción

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{R(T + 273.16)}} \tag{9-62}$$

Retardo en el sensor de temperatura (TT21)

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{\tau_T}\left(\frac{T - T_M}{\Delta T_T} - b\right) \tag{9-63}$$

Controlador proporcional-integral con retroalimentación (TRC21)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\tau_I}(m - y) \tag{9-64}$$

$$m = y + K_c\left(\frac{T^{set} - T_M}{\Delta T_T} - b\right) \tag{9-65}$$

Límites de la señal de salida del controlador

$$0 \leq m \leq 1 \tag{9-66}$$

Válvula de control de porcentaje igual (aire para cerrar)

$$F_C = F_{C\text{máx}}\alpha^{-m} \tag{9-67}$$

donde:

C_A es la concentración de reactivo en el reactor, kgmol/m^3
C_{Ai} es la concentración del reactivo en la alimentación, kgmol/m^3
T es la temperatura en el reactor, C
T_i es la temperatura de alimentación, C
T_C es la temperatura del casquillo, C
T_{Ci} temperatura de entrada del enfriador, C
b es la señal del transmisor en una escala de 0 a 1
F es la razón de alimentación, m^3/s
V es el volumen del reactor, m^3
k es el coeficiente de razón de reacción, m^3/kgmol-s
ΔH_R es el calor de la reacción; se supone constante, J/kgmol
ρ es la densidad del contenido del reactor, kgmol/m^3
C_p es la capacidad calorífica de los reactivos, J/kgmol-C
U es el coeficiente de transferencia total de calor, J/s-m^2-C
A es el área de transferencia de calor, m^2
V_C es el volumen del casquillo, m^3
ρ_C es la densidad del enfriador, kg/m^3
c_{pC} es el calor específico del enfriador, J/kg-C
ΔT_T es el rango calibrado del transmisor, C
F_C es la razón de flujo del enfriador, m^3/s
T_M es el límite inferior del rango del transmisor, C
τ_T es la constante de tiempo del sensor de temperatura, s
τ_I es el tiempo de integración del controlador, s
Y es la variable de retroalimentación de reajuste del controlador
m es la señal de salida del controlador en una escala de 0 a 1
K_c es la ganancia del controlador; sin dimensiones
$F_{C\text{máx}}$ es el flujo máximo a través de la válvula de control, m^3/s
α es el parámetro de ajuste en rango de la válvula
k_0 es el parámetro de frecuencia de Arrhenius, m^3/s-kgmol
E es la energía de activación de la reacción, J/kgmol
R es la constante de la ley de los gases ideales, 8314.39 J/kgmol-K

En este modelo del reactor y de su controlador de temperatura, las variables de estado son C_A, T, T_C, b e y; las variables auxiliares r_A m y F_C se pueden calcular junto con las funciones de derivación, a partir de los valores de las variables de estado en cualquier punto del tiempo. Las variables de entrada al modelo son F, C_{Ai}, T_i, T_{Ci} y T^{fijo}. Un punto que vale la pena hacer notar es que, para el **análisis** del comportamiento del controlador, algunas de las variables auxiliares son más importantes que algunas de las variables de

estado; por ejemplo, la salida del controlador, m, o razón de enfriador, F_C, son de mayor interés que la temperatura del casquillo, T_C, y la variable de reatroalimentación de reajuste, y.

El modelo del controlador proporcional-integral (PI) es la implementación "retroalimentación de reajuste" de la acción de integración; para un estudio más detallado se debe consultar la sección 6.5 y el ejemplo 9-4. La señal b del transmisor y la señal m de salida del controlador son normalizadas, es decir, se expresan como fracciones de rango, lo cual hace que el modelo sea valido para instrumentación electrónica, digital y neumática. Se notará que en la ecuación (9-65) se debe normalizar el punto de control del controlador mediante la misma fórmula que se utilizó para normalizar la temperatura en la ecuación del transmisor, ecuación (9-63).

Para hacer la simulación del reactor se deben determinar los parámetros del modelo y las condiciones iniciales. En la práctica, los parámetros del modelo se obtienen a partir de las especificaciones del equipo y de los diagramas de tubería e instrumentación. A continuación se trabaja con los siguientes parámetros del reactor:,

$V = 7.08$ m^3
$\rho = 19.2$ kgmol/m^3
$C_p = 1.815 \times 10^5$ J/kgmol-C
$A = 5.40$ m^2
$\rho_C = 1000$ kg/m^3
$k_0 = 0.0744$ m^3/s-kgmol
$\tau_T = 20$ s
$\alpha = 50$

$\Delta H_R = -9.86 \times 10'$ J/kgmol
$V = 3550$ J/s-m^2-C
$V_C = 1.82$ m^3
$c_{pC} = 4184$ J/kg-C
$E = 1.182 \times 10'$ J/kgmol
$F_{Cmáx} = 0.020$ m^3/s
$T_M = 80$C
$\Delta T_T = 20$C

Si el propósito de la simulación es ajustar el controlador a las condiciones de operación de diseño, las condiciones iniciales se toman en el punto de operación de diseño. Un requisito importante es que ***con las condiciones iniciales se deben satisfacer las ecuaciones del modelo en estado estacionario***; esto es, todas las derivadas que se calculan con base en las ecuaciones del modelo deben ser exactamente cero en los valores iniciales de las variables de estado. Puesto que se tiene una ecuación de modelo para cada variable de estado y auxiliar, el número de especificaciones de diseño no debe exceder el de variables de entrada. En este ejemplo, las variables de entrada y las condiciones de diseño son las siguientes:

$F = 7.5 \times 10^{-3}$ m^3/s
$C_{Ai} = 2.88$ kgmol/m^3
$T_{Ci} = 27.0$C

$T^{\text{fijo}} = 88.0$C
$T_i = 66.0$C

Ahora se pueden utilizar las ecuaciones del modelo para calcular los demás valores iniciales y variables auxiliares. El orden de los cálculos es el que se muestra en el cuadro de la página siguiente.

Se observará que la única forma de satisfacer las ecuaciones (9-63), (9-64) y (9-65) en estado estacionario es que la temperatura del reactor se mantenga en el punto de control, debido a que el controlador tiene acción de integración.

De la ecuación número	Cálculos
(9-65)	$b = \dfrac{T^{fijo} - T_M}{\Delta T_T} = 0.40$
(9-63)	$T = b\Delta T_T + T_M = 88.0C$
(9-62)	$k = 1.451 \times 10^{-3}$ m^3/kg mol-s
(9-59)	$C_A = 1.133$ kgmol/m^3
(9-60)	$T_C = 50.5C$
(9-61)	$F_C = 7.392 \times 10^{-3}$ m^3/s
(9-67)	m = 0.2544 (sin dimensiones)
(9-64)	y = 0.2544 (sin dimensiones)

Una vez que se tienen las ecuaciones del modelo, el valor de los parámetros y las condiciones iniciales, se pueden programar las ecuaciones en la computadora.

Integración numérica mediante el método de Euler

El método numérico más simple para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es el método de Euler, el cual consiste en suponer que las funciones derivadas son constantes a lo largo de todo el *intervalo de integración* At. El planteamiento de un programa para resolver el sistema de ecuaciones de la forma de la ecuación (9-58) mediante el método de Euler es el siguiente:

1. Inicialización: se hace $t = t_0$ y $x_i = x_i(t_0)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$
2. Con las ecuaciones del modelo se calculan todas las funciones derivadas, f_i:

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n \tag{9-68}$$

3. Los valores de las variables de estado se calculan después de un incremento de tiempo At (fórmula de Euler). Para $i = 1, 2, \ldots, n$ se calcula:

$$x_i\big|_{t+\Delta t} = x_i\big|_t + f_i \Delta t \tag{9-69}$$

$$\text{Let } t = t + \text{At} \tag{9-70}$$

4. Si t es menor que $t_{máx}$, se repite a partir del paso 2; de otro modo, se termina la corrida.

Una característica esencial de este programa es que todas las funciones derivadas se calculan en el paso 2, antes de incrementar cualquiera de las variables de estado en el paso 3, con lo cual se garantiza que todas las funciones derivadas corresponden al estado del sistema en el tiempo t, como debe ser.

Antes de correr el programa que se planteó arriba, se debe elegir un tiempo inicial t_0, un tiempo final $t_{máx}$ y un intervalo de integración At. También se debe decidir con qué frecuencia se imprimirán las variables que son de interés en la simulación.

Duración de las corridas de simulación

La duración en "tiempo de problemas" de cada corrida de simulación es $t_{máx} - t_0$; las unidades de esta cantidad las determinan las unidades de la razón y las constantes de tiempo de las ecuaciones del modelo; por ejemplo, en las ecuaciones del modelo del reactor todas las razones son por segundo y todas las constantes de tiempo están dadas en segundos, por lo tanto, las unidades de tiempo son segundos.

En la mayoría de las simulaciones el tiempo inicial t_0 se puede fijar a cero, con excepción de los casos muy raros donde los parámetros del modelo son funciones del tiempo; por ejemplo, a causa de viciamiento de las superficies de transferencia de calor y otras circunstancias parecidas.

Una vez que se fija el valor de t_0, la duración de cada corrida de simulación se determina con $t_{máx}$; dicha duración debe ser lo suficientemente larga como para que se complete la respuesta del sistema, pero no tanto como para que la respuesta se comprima en una fracción muy pequeña de la duración total de la corrida. Por tanto, el valor correcto de $t_{máx}$ depende de, la velocidad de respuesta del proceso que se simula; para procesos rápidos se necesita que $t_{máx}$ sea de unos cuantos segundos; en cambio, para procesos lentos puede ser del orden de horas. En la figura 9-9 se muestran los tiempos de respuesta para corridas muy largas (comprimido), muy cortas (incompleto) y el apropiado.

¿Con qué se determina la velocidad de respuesta del proceso? Estrictamente hablando, con el eigenvalor dominante, es decir, el recíproco de la constante de tiempo más larga del proceso, se controla el tiempo que se requiere para completar la respuesta. Desafortunadamente, el eigenvalor es difícil de determinar en modelos de procesos complejos no lineales como los que se desarrollaron anteriormente en este capítulo. Por otro lado, algunas veces es posible estimar la constante de tiempo más larga, ya sea con base en la familiaridad con procesos similares o en la intuición ingenieril; por ejemplo, para el reactor que se considera aquí, la constante de tiempo más larga es probablemente del orden de magnitud del tiempo de residencia del reactor, V/F, o alrededor de 1000 segundos. Una vez que se tiene la estimulación de la constante más larga, la duración de la corrida se puede fijar en aproximadamente cinco veces la constante de tiempo. Esta regla práctica se basa en el hecho de que, en un proceso de primer orden, la respuesta se completa en cinco constantes de tiempo; en procesos de orden superior se puede esperar que se tome más tiempo, y para los de circuito cerrado, un tiempo más corto. En muchos casos no se dispone de un método conveniente para estimar la duración de la corrida, la cual se debe elegir mediante ensayo y error; al seleccionar $t_{máx}$, se debe recordar que:

> Sin importar el método utilizado para estimar la duración de las corridas de simulación, ésta se debe ajustar siempre con base en la observación de las respuestas que se obtienen en las primeras corridas.

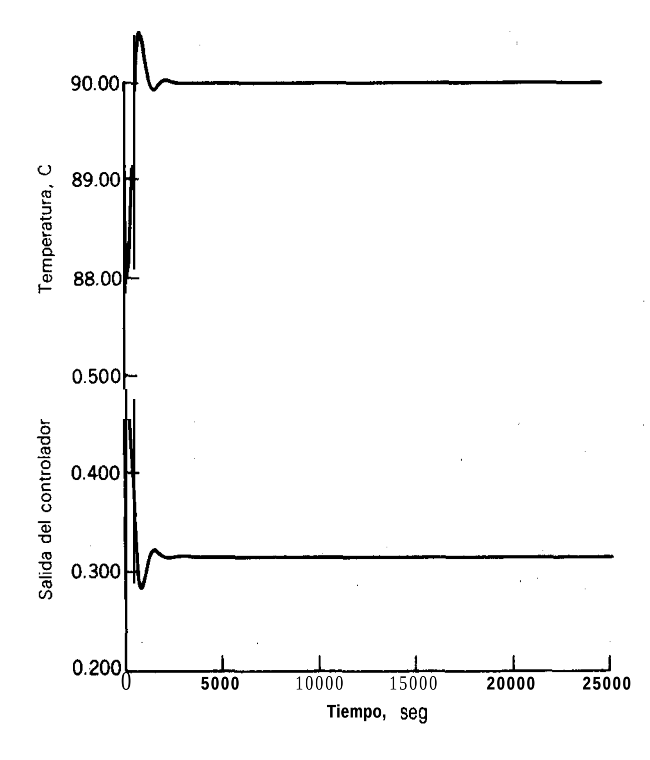


Figura **9-9*a***. Respuesta del reactor a una elevación de 2C en el punto de control. Ejemplo de una corrida demasiado larga.

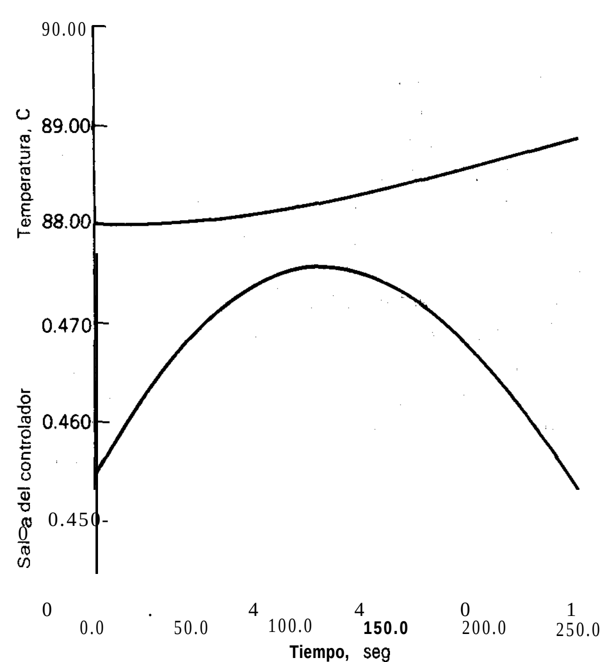


Figura **9-9*b***. Respuesta del reactor a una elevación de 2C en el punto de control. Ejemplo de una corrida demasiado corta.

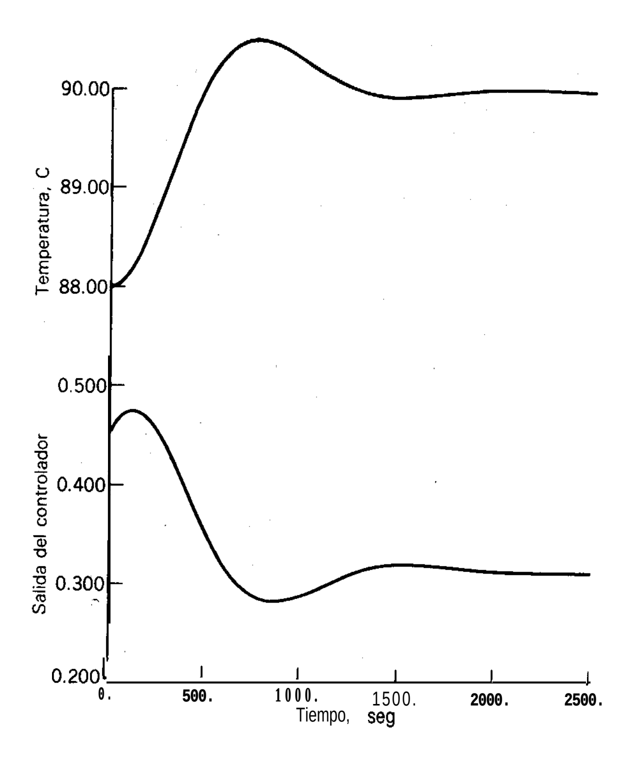


Figura 9-9c. Respuesta del reactor a una elevación de 2C en el punto de control. Ejemplo de una corrida con la duración correcta.

Rara vez es una buena idea hacer la duración de la corrida mucho más larga de lo que se necesita, ya que de esto resulta un desperdicio de tiempo de computadora.

Elección del intervalo de integración

Con el intervalo de integración, At, se afecta la precisión de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales y el tiempo de máquina que se requiere para realizar los cálculos. El efecto sobre el tiempo de máquina es simplemente que la cantidad de cálculos es inversamente proporcional al intervalo de integración; esto es, proporcional al número de "pasos" de integración, N:

$$N = \frac{t_{máx} - t_0}{\Delta t} \qquad (9\text{-}71)$$

Respecto a la precisión de la integración numérica, un concepto erróneo es que, mientras más corto es el intervalo de integración At, más precisa es la solución; aunque, como se verá a continuación, teóricamente *es* verdad que el *error por truncamiento* es mayor para un intervalo de integración mayor, en la práctica, debido a la precisión limitada de

los cálculos en la computadora, existe un límite respecto a lo pequeño que puede ser el intervalo de integración; abajo de este límite, conforme decrece el intervalo de integración, aumenta el ***error de redondeo.*** El error de redondeo es aquel en el cual se incurre en los cálculos por computadora, debido a que se acarrea un número finito de dígitos significativos. A pesar de que el tamaño mínimo del intervalo de integración se puede reducir mediante la especificación de que los cálculos se realicen con "doble precisión", es decir, de que se duplique la cantidad de dígitos significativos que acarrea la computadora, pocas veces vale la pena desperdiciar el tiempo de máquina para hacer corridas con un intervalo de integración mucho más pequeño de lo que se requiere para el error por truncamiento. En otras palabras, se debe seleccionar un intervalo de integración cercano al máximo permitido por la precisión que se requiera en los cálculos de la integración numérica.

En un procedimiento de integración numérica, el error por truncamiento es aquel en que se incurre cuando las derivadas continuas se aproximan a valores discretos de la variable independiente. Por ejemplo, en el método de Euler se supone que los valores de las derivadas en el tiempo t son una buena aproximación de las derivadas continuas desde t hasta (t + At), de donde resulta la ecuación (9-69), de la cual se puede pensar que es una expansión por series de Taylor de la función $x_i(t)$ "truncada" después del primer término de derivación. Puesto que la fórmula de Euler es más simple, de ella resulta un error por truncamiento más grande para un cierto intervalo de integración At. Como se mencionó anteriormente, el error por truncamiento se incrementa con el intervalo de integración At; si el intervalo de integración es suficientemente grande, la solución numérica se puede volver inestable, es decir, se producirá una respuesta inestable, aun para un proceso estable. Un riesgo que se relaciona con esto es que, al calcular una respuesta para un proceso inestable, el efecto acumulativo del error por truncamiento puede hacer que los resultados sean inútiles después de unos cuantos pasos de integración.

Cuando se elige la duración de las corridas de simulación, el intervalo de integración se debe ajustar con base en la precisión que se observa en las primeras corridas. Un procedimiento simple es correr el mismo caso con diferentes intervalos de integración y revisar que los resultados estén dentro de un error tolerable, es decir, con una cantidad aceptable de dígitos significativos, por ejemplo, cuatro o cinco. El intervalo más largo con el cual se obtengan resultados aceptables es el que se debe elegir.

Para el método de Euler y un modelo de proceso con buen comportamiento, una estimación de intervalo de integración correcta es aquella donde se requieren de 1000 a 5000 pasos para completar una corrida de simulación. Un modelo con buen comportamiento es aquel donde todos los eigenvalores (constantes de tiempo) tienen casi el mismo orden de magnitud; en cambio, un ***modelo rígido*** es aquel donde la razón del eigenvalor mayor al menor (o constantes de tiempo) es grande. La rigidez se tratará en una sección al final del capítulo.

Despliegue de los resultados de la simulación

Los resultados de una simulación dinámica ***son generalmente*** las respuestas en tiempo de las variables del modelo. En una solución numérica, estas respuestas se calculan como

los valores de las variables de estado y auxiliares de cada paso del procedimiento de integración numérica; dichos resultados se pueden desplegar en forma tabular o gráfica. La forma gráfica es más informativa para el estudio de la respuesta de los sistemas de control; se puede tener la presentación de gráficas de baja, media o alta resolución. Para las gráficas de baja resolución se requiere únicamente una impresora regular de caracteres con resolución de 6 a 10 puntos por pulgada; en las gráficas de resolución media se requiere una impresora de matriz de puntos o pantalla, con una resolución de casi 80 puntos por pulgada; para las gráficas de alta resolución se requiere un graficador digital especial o una terminal gráfica, con lo cual se obtiene una calidad comparable a la de los dibujos de ingeniería. Para la generación de gráficas por computadora, generalmente se requiere un paquete de subprogramas de trazado. En la figura 9-9 se presentan ejemplos de gráficas de alta resolución, mientras que en la figura 9-10 se muestra un ejemplo de una gráfica de baja resolución.

Cuando los resultados de la simulación se imprimen en forma tabular, no tiene sentido imprimir las variables a cada paso de integración, ya que así no sólo se desperdicia papel y los árboles que se utilizan para producirlo, sino que también se dificulta la lectura e interpretación de los resultados. La solución que se recomienda es imprimir las varia-

SIMULACIÓN DE UN TANQUE! DE REACCIÓN CON AGITACIÓN CONTINUA

PARÁMETROS DEL CONTROLADOR, KC = 2.00 TAUI = 600. S

CAMBIOS EN LA ENTRADA, TASA DE ALIMENTACIÓN = .0 M3/S PUNTO DE CONTROL 2.00 C

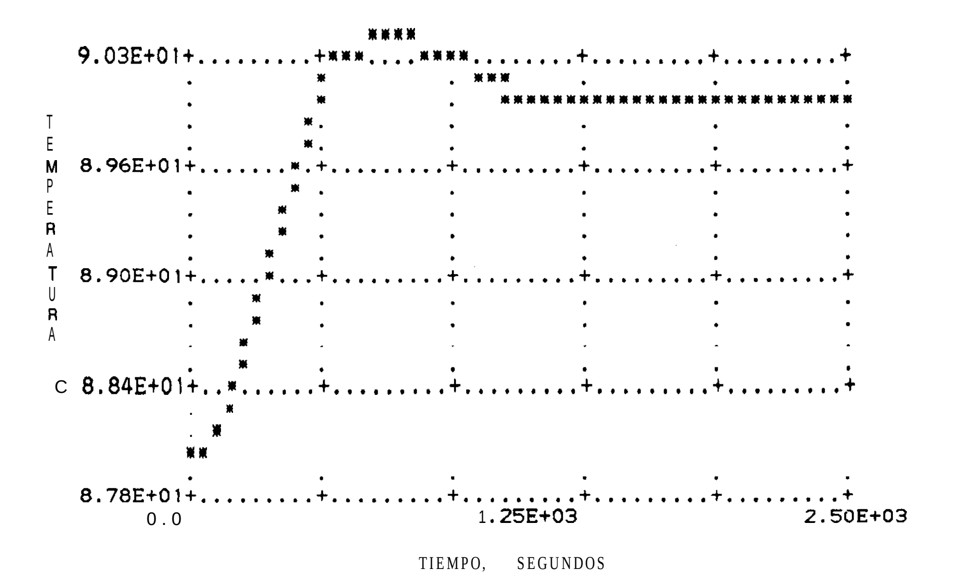


Figura **9-10.** Respuesta del reactor a una elevación de 2C en el punto de control. Ejemplo de una gráfica con baja resolución cuando se utiliza una impresora.

bles del modelo con intervalos de tiempo Δt_p, intervalo de impresión; este intervalo debe ser un múltiplo del intervalo de integración At. El intervalo de impresión se debe elegir de tal manera que se imprima un total de casi 50 entradas para una corrida de simulación completa; en otras palabras

$$\Delta t_p \approx \frac{t_{máx} - t_0}{50} \tag{9-72}$$

Se elige el numero 50 porque una hoja típica de computadora contiene aproximadamente **50** líneas; esta selección es arbitraria y se puede cambiar a 25 6 100, según sea el grado de resolución que se requiera para la respuesta en tiempo.

Cuando se buscan errores en el programa de la computadora, generalmente se hace necesario imprimir las variables en cada paso de integración; en este caso, Δt_p se debe hacer temporalmente igual a *At,* el intervalo de integración; se puede economizar papel si se hace $t_{máx}$ igual a 50 At para las corridas de detección de error.

Muestra de resultados para el método de Euler

En la figura 9-11 se presenta el listado para el programa en **FORTRAN** con que se simula el tanque de reacción con agitación continua mediante el método de Euler. El intervalo

```
C
C      PROGRAM FOR SIMULATION OF CONTINUOUS STIRRED TANK REACTOR
C
C      METHOD:  EULER INTEGRATION
C
C      VARIABLES IN INPUT DATA
C
C      FIRST LINE
C
C         TO     INITIAL TIME OF THE RUN,S
C         TMAX   FINAL TIME OF THE RUN,S
C         DTIME  INTEGRATION INTERVAL.S
C         DPRNT  PRINTING INTERVAL, S
C
C      SECOND LINE
C
C         KC     CONTROLLER PROPORTIONAL GAIN,DIMENSIONLESS
C         TAUI   CONTROLLER INTEGRAL TIME.S
C         DF     CHANGE IN FEEDRATE,M3/S
C         DTSET  CHANGE IN SET POINT,C
C
C      NOTE' A ZERO OR NEGATIVE VALUE OF TMAX STOPS EXECUTION.
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL.8 M,K,KO,KC
C
C      DATA STATEMENTS FOR PARAMETER VALUES
C
      DATA V, U, A / 7.08, 3550., 5.40 /
      DATA KO, E, DHR, RHO / 0.0744, 1.182D7, -9.86D7, 19.2/
      DATA CP, VC, RHOC, CPC / 1.815D5, 1.82, 1000., 4184. /
      DATA R / 8314.39 /
      DATA TA-T. ALPHA, FCMAX,TM. DTT/20.,50.,0.020,80.,20./
      DATA TO. TMAX,DTIME,DPRNT/0.,2500.,0.5.50./
C
C      DATA STATEMENTS FOR DESIGN CONDITIONS
C
      DATA FO. CA,, Ti. TCI,TSETO/7.55D-3,2.88, 66.,27.,88./
```

Figura 9-11. Listado de un programa en FORTRAN para simular un tanque de reacción con agitación continua. Método de integración de Euler.

```
C
C        READ  AND  PRINT  INPUT  DATA
C
      WRITE(6,200)
 200  FORMAT(' ENTER  TO.  TMAX,  DTIME,  DPRNT')
      READ ( 5, * ) TO, TMAX,  DTIME.  DPRNT
      IF ( T"AX  .LT. 0. ) STOP
C
      WRITE ( 4, 300 ) TO. TMAX, DTIME
 300  FORMAT(/10X,'RUN PARAMETERS. TO=',1PG10.3,5X,'TMAX=',G10.3,5X
     F              'DTIME=',G10.3)
C
      WRITE(6,210)
 210  FORMAT(' ENTER KC.  TAUI, DF.  DTSET')
      READ  (  5, * ) KC. TAUI, DF. DTSET
C
      WRITE  ( 6,  100  ) KC.  TAUI, DF.  DTSET
      WRITE  ( 4,  100  ,  KC,  TAUI, DF,  DTSET
 100  FORMAT(//10X,'CONTINUOUS STIRRED  TANK  REACTOR  SIMULATION'/
     1      / 10X,'CONTROLLER PARAMETERS. KC=',G10.3,
     2         5X,'TAUI=',G10.3,' S'/
     3      / 10X,'INPUT CHANGES, FEED RATE=',G10.3,' M3/S',
     4         5X,'SET POINT=',G10.3,' C')
C
C        CALCULATE  STEADY-STATE  INITIAL  CONDITIQNS  AND  CONSTANTS
C
      TIME = TO
      B = ( TSETO - TM  ) / DTT
      T = TSETO
      K = KO * DEXP (   E / ( R * (T+273.16) ) )
      CA = ( -FO+ DSQRT: FO..2 + 4.. K * V . FO * CAI ) ) / ( 2.*K*V
      TC = T    ( FO * RHO * CP * (TI - T) - V * DHR * K . CA".2 ) ,
              ( U * A )
      FC = U * A * ( T - TC ) / ( RHOC * CPC * ( TC - TCI ) )
      M = - DLOG ( FC / FCMAX ) / DLOG ( ALPHA )
      Y  = M
C
      EOR = E / R
      DHRC = DHR / ( RHO - CP )
      "AIC = U . A / ( V . RHO * CP )
      UAOC = U . A / ( "C * RHOC * CPC )
C
C        PRINT  HEADER  FOR  OUTPUT  TABLE  AND  INITIAL  CONDITIONS
C
      WRITE ( 6. 110 )
      WRITE ( 4. 110 )
 110  FORMAT(//10X,'TIME, S',8X,'T, C',11X,'M',9X,'FC, M3/S',
     1            2X,'CA, KMOL/M3'/)
      URITE ( 6. 120 ) TIME, T. M, FC, CA
      WRITE ( 4, 120 ) TIME, T. M, FC, CA
 120  FORMAT(10X,5G12.4)
C
C        INITIALIZATION  FOR  EULER  INTECRATION
C
      F = FO + DF
      TSET = TSETO  + DTSET
      NSTEPS = ( TMAX - TO ) / DTIME + 0.99
      NPSTPS = DPRNT  / DTIME + 0.5
      KP     = NPSTPS
C
      DO 90 I=1,NSTEPS
C
C           CALCULATE   AUXILIARY   VARIABLES
C
         K = KO * DEXP( - EOR / ( T + 273.16 ) )
         M =  DMAX1( 0.DO, DMIN1( 1.DO,
     F                             Y + KC  * ( ( TSET-TM )/DTT - B ) ) )
         FC = FCMAX . ALPHA . . (   M )
C
C           EVALUATE  DERIVATIVE  FUNCTIONS
C
         DCA = F * ( CA1 - CA ) / V - K . CA..2
         DT = F * ( TI   - T ) / V - DHRC * K * CA**2 - UAIC . (T-TC)
         DTC = UAOC * ( T - TC ) - FC . ( TC - TCI ) , VC
         DB = ( (T-TM)/DTT - B ) / TAUT
         DY = ( M    Y ) / TA"1
C
C           INCREMENT STATE VARIABLES  BY  EULER  INTEGRAIIION
C
         CA = CA  + DCA  * DTIME
         T  =T   +DT   *  DTIME
         TC = TC + DTC * DTIME
         B  =B  + DB  *  DTIME
         Y  = Y  + DY  *  DTIME
         TIME = TO + I . DTIME
```

Figura 9-11. *(Continuación)*

```
C
C         PRINT INTERMEDIATE RESULTS
C
        KP = KP - 1
        IF ( KP .GT. 0 ) GOTO 90
           KP = NPSTPS
           WRITE ( 6, 120 ) TIME, T, M, FC, CA
           WRITE ( 4, 120 ) TIME, T, M, FC, CA
 90   CONTINUE
      GOTO 1
      END
```

Figura 9-11. *(Continuación)*

de integración es de 0.25 segundos, la duración de la corrida de 2500 segundos y el intervalo de impresión de 50 segundos. En la figura 9-12 se presenta una tabla con los resultados de la respuesta del reactor a una subida de 2 C en el punto de control. Las gráficas de la figura 9-9 son para la misma corrida. Una ventaja obvia de la tabla sobre las gráficas es que se pueden desplegar más variables. Como se aprecia en la figura 9-9, cuando se analiza el desempeño del sistema de control, las variables importantes para la graficación son la controlada y la manipulada.

El diseño del programa que se lista en la figura 9-11 es para utilizarlo a través de una terminal de tiempo compartido; a esto se debe que se impriman mensajes en la terminal (unidad 6) para alertar al usuario. Los datos se introducen a través de la terminal (unidad 5) y los resultados se despliegan en la terminal y se imprimen en la impresora (unidad 4). El diseño de los demás programas que se listan en este capítulo es similar.

Método de Euler modificado

El método más simple para programar en una computadora es el de Euler, pero también es el menos eficiente. Con el método de Euler modificado, el cual se basa en la regla trapezoidal de la integración numérica, se tiene una representación más precisa de las derivadas, es decir, un error por truncamiento menor para un cierto intervalo de integración. El planteamiento para el método de Euler modificado es el siguiente:

1. Inicialización: se hace $t = t_0$ y $x_i = x_i(t_0)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Evaluación de las funciones derivadas:

   a) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$f_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \tag{9-73}$$

   b) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$f_i^{(2)} = f_i(x_1 + f_1^{(1)}\Delta t, \ldots, x_n + f_n^{(1)}\Delta t, t + \Delta t) \tag{9-74}$$

3. Se calculan las variables de estado en t + Pt:
   Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$x_i\big|_{t+\Delta t} = x_i\big|_t + \frac{1}{2}(f_i^{(1)} + f_i^{(2)})\Delta t \tag{9-75}$$

RUN PARAMETERS. TO= . O TMAX= 2.50D+03 DTIME= .250

CONTINUOUS STIRRED TANK REACTOR SIMULATION

CONTROLLER PARAMETERS, KC= 2.00 TAUI= 600. S

INPUT CHANCES. FEED RATE= .0 M3/S SET POINT= 2.00 C

TIME, S	T, C	M	FC, M3/S	CA, KMOL/M3
.0	88.00	.2544	.7392D-02	1.133
50.00	88.05	.4687	.3197D-02	1.133
100.0	88.17	.4753	.3116D-02	1.133
150.0	88.36	.4741	.3131D-02	1.132
200.0	88.59	.4662	.3228D-02	1.132
250.0	88.85	.4531	.3398D-02	1.131
300.0	89.12	.4359	.3634D-02	1.131
350.0	89.38	.4161	.3928D-02	1.130
400.0	89.64	.3948	.4269D-02	1.129
450.0	89.88	.3733	.4643D-02	1.128
500.0	90.08	.3527	.5033D-02	1.127
550.0	90.24	.3339	.5417D-02	1.126
600.0	90.37	.3177	.5771D-02	1.126
650.0	90.45	.3045	.6076D-02	1.125
700.0	90.50	.2946	.6317D-02	1.124
750.0	90.51	.2879	.6485D-02	1.123
800.0	90.49	.2841	.6581D-02	1.123
850.0	90.46	.2830	.6611D-02	1.123
900.0	90.40	.2839	.6587D-02	1.122
950.0	90.34	.2864	.6522D-02	1.122
1000.	90.28	.2901	.6430D-02	1.122
1050.	90.21	.2944	.6322D-02	1.122
1100.	90.15	.2990	.6210D-02	1.122
1150.	90.10	.3035	.6101D-02	1.122
1200.	90.05	.3077	.6001D-02	1.123
1250.	90.01	.3115	.5912D-02	1.123
1300.	89.98	.3147	.5839D-02	1.123
1350.	89.96	.3173	.5780D-02	1.123
1400.	89.95	.3192	.5737D-02	1.123
1450.	89.94	.3205	.5707D-02	1.123
1500.	89.94	.3213	.5691D-02	1.123
1550.	89.95	.3216	.5685D-02	1.123
1600.	89.95	.3214	.5688D-02	1.123
1650.	89.96	.3209	.5698D-02	1.123
1700.	89.97	.3203	.5714D-02	1.124
1750.	89.98	.3194	.5733D-02	1.124
1800.	89.99	.3185	.5753D-02	1.124
1850.	90.00	.3176	.5773D-02	1.124
1900.	90.01	.3167	.5793D-02	1.123
1950.	90.02	.3160	.5811D-02	1.123
2000.	90.02	.3153	.5826D-02	1.123
2050.	90.02	.3147	.5838D-02	1.123
2100.	90.03	.3143	.5848D-02	1.123
2150.	90.03	.3140	.5854D-02	1.123
2200.	90.02	.3139	.5858D-02	1.123
2250.	90.02	.3138	.5859D-02	1.123
2300.	90.02	.3138	.5859D-02	1.123
2350.	90.02	.3139	.5857D-02	1.123
2400.	90.01	.3141	.5854D-02	1.123
2450.	90.01	.3142	.5850D-02	1.123
2500.	90.01	.3144	.5845D-02	1.123

Figura 9-12. Respuesta del reactor a una elevación de 2C en el punto de control. Tabla de resultados impresos.

```
      SUBROUTINE INT( TO. X, TF. DT, DPRNT, N, XT, RK. F )
C
C        PURPOSE - TO INTEGRATE A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C
C        METHOD     MODIFIED EULER (TRAPEZOIDAL RULE, OR RUNGE-KUTTA
C                   ORDER 2)
C
C        VARIABLES IN ARCUMENT LIST
C
C        VARIABLE TYPE I/O DIMENSION  DESCRIPTION
C
C           TO      R*8    I/O           INDEPENDENT VARIABLE
C                                         INPUT - INITIAL VALUE
C                                         OUTPUT - FINAL VALUE
C           X       R*8  I/O       N     VECTOR OF STATE VARIABLES
C                                         INPUT    INITIAL VALUES
C                                         OUTPUT - FINAL VALUES
C           TF      R*8   1              FINAL VALUE OF INDT. VARIABLE
C           DT      R*8   1              INTEGRATION INTERVAL
C           DPRNT   R*8   1              PRINTING INTERVAL
C           N        I    I              NUMBER OF DIFFTL. EQUATIONS
C           XT      R*8   W        N     WORKING STATE VECTOR
C           RK      R*8   W        N     WORKING STEP VECTOR
C           F       R*8   W        N     WORKINC DERIVATIVE VECTOR
C
C        SUBROUTINES CALLED - DERIV - TO CALCULATE DERIVATIVE FUNCTIONS
C                             OUTPUT- TO PRINT INTERMEDIATE RESULTS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(1), XT(1), RK(1), F(1)
C
C        INITIALIZATION FOR STEP INTEGRATION
C
      NSTEPS = ( TF - TO ) / DT + 0.99
      NPSTPS = DPRNT / DT + 0.5
      KP     =0
C
      DO 90 I=l.NSTEPS
C
C           FIRST DERIVATIVE EVALUATION
C
         CALL DERIV( N, TO, X, F. 1 )
C
C           PRINT INTERMEDIATE RESULTS EVERY NPSTPS
C
         KP = KP - 1
         IF ( KP .GT. 0 ) COTO 10
            KP = NPSTPS
            CALL OUTPUT
 10      CONTINUE
C
C           SECOND DERIVATIVE EVALUATION
C
         T = TO + DT
         DO 20 J=1,N
            RK(J) = F(J) * DT
            XT(J) = X(J) + RK(J)
 20      CONTINUE
         CALL DERIV( N, T, XT, F, 2 )
C
C           MODIFIED EULER STEP ON STATE VARIABLES
C
         TO = TO + DT
         DO 30 J=1,N
            X(J) = X(J) + 0.5 * ( RK(J) + F(J) * DT )
 30      CONTINUE
 90   CONTINUE
C
C        PRINT FINAL VALUES
C
      CALL DERIV( N, TO, X, F. 0 )
      CALL OUTPUT
      RETURN
      END
```

Figura 9-13. Listado de una subrutina FORTRAN para el método de integración de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2).

Sea $t = t + \Delta t$ (9-76)

4. Si t es menor o igual que $t_{máx}$, se repite desde el paso 2; de otro modo, se termina la corrida.

En este procedimiento las funciones derivadas se deben evaluar dos veces para cada paso de integración: una en el tiempo t y otra en el tiempo $(t + \Delta t)$. En la segunda evaluación las variables de estado se incrementan con los valores de las funciones derivadas de la primera evaluación. Finalmente, el incremento en la variable de estado se calcula a partir del promedio aritmético de las dos evaluaciones de las funciones derivadas. Puesto que la evaluación de las funciones derivadas es el paso de los cálculos que consume tiempo, con el metodo de Euler modificado se tienen dos veces más cálculos por paso de integración que con el método de Euler; la ventaja es que se reduce el error por truncamiento, lo cual permite incrementar el intervalo de integración a más de dos veces el valor que se requiere con el método de Euler y mantener la misma precisión. De aquí resultan menos evaluaciones totales de las funciones derivadas, ya que el número de pasos que resulta es menor de la mitad de los que se requieren con el método de Euler.

Ya que las mismas funciones derivadas se deben evaluar dos veces, es conveniente ubicar los cálculos de las funciones derivadas en una subrutina, la cual es invocada por el método de integración. Una vez que se hace esto, las ecuaciones del modelo se separan de la rutina de evaluación numérica, de manera que esta última se pueda cambiar sin afectar al subprograma que contiene las ecuaciones del modelo; de manera similar, los mismos subprogramas de integración numérica se pueden utilizar con diferentes subprogramas de ecuaciones de algún modelo.

La subrutina para la integración de Euler modificada se muestra en la figura 9-13, con ella se llama a la subrutina DERIV dos veces por paso de integración, una vez por cada evaluación de las funciones derivadas. En la figura 9-14 se lista el programa principal, y la subrutina MODEL se lista en la figura 9-15. La subrutina MODEL consta de tres secciones diferentes, cada una con su propio punto de entrada y retorno; la primera sección se invoca desde el programa principal con el nombre de "MODEL"; en esta sección se leen los parámetros del modelo y se calculan y fijan las condiciones iniciales y el número de ecuaciones diferenciales que se integraran, asimismo se calculan los términos constantes de las ecuaciones del modelo. Las condiciones iniciales se pasan al programa principal como argumentos. En el programa principal se fija el resto de los parámetros de la corrida y se llama a la subrutina INT para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales.

Desde la subrutina INT se llama a la segunda sección de la subrutina MODEL, bajo el nombre de "DERIV"; el propósito de ésta es evaluar las funciones derivadas a partir de las ecuaciones del modelo cada vez que se le llama desde la subrutina de integración con un nuevo grupo de valores de variable de estado. Éste es el planteamiento para el segundo paso del procedimiento de Euler modificado. Se observara que, a pesar de que únicamente se llama a la subrutina MODEL una vez por corrida en el primer punto de entrada, a DERIV se le llama dos veces por paso de integración durante la corrida; en otras palabras, cuando se llama a DERIV, la ejecución comienza en el enunciado "ENTRY DERIV. . .," y no al principio de la subrutina MODEL.

```
C
C        PROGRAM FOR GENERAL PURPOSE SIMULATION OF DYNAMIC SYSTEMS
C
C        BY ARMANDO B. CORRIPIO              ON MAY ll, 1983
C
C        VARIABLES IN INPUT DATA
C
C        VARIABLE TYPE DESCRIPTION
C
C          TO       R*8   INITIAL TIME OF THE RUN
C          TMAX     R*8   FINAL TIME OF THE RUN'
C          DTIME    R*8   INTEGRATION  INTERVAL
C          DPRNT    R*8   PRINTING INTERVAL FOR INTERMEDIATE RESULTS
C
C        TO STOP, ENTER A ZERO OR NECATIVE VALUE FOR TMAX
C
C        SUBROUTINES CALLED
C
C           MODEL  - TO ACCEPT INPUT DATA AND SET UP INITIAL CONDITIONS
C           INT    - FOR NUMERICAL INTECRATION OF THE DIFFERNTIAL EQNS.
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(100), XT(100), RK(100), F(100)
C
      DATA TO, TMAX, DTIME. DPRNT / 0., 10., 7.8125E-3, .25 /
C
C        READ AND PRINT RUN PARAMETERS
C
 1    WRITE(6,200)
 200  FORMAT(' ENTER TO, TMAX, DTIME, DPRNT. (TMAX = 0 TO STOP).' )
      READ ( 5, * ) TO, TMAX, DTIME, DPRNT
      IF( TMAX .LE. ODO ) STOP
C
      WRITE ( 6, 300 ) TO, TMAX. DTIME
      WRITE ( 4, 300 ) TO, TMAX. DTIME
 300  FORMAT(/7X,'RUN PARAMETERS, TO=',1PG10.3,2X,'TMAX=',G10.3,2X,
     F              'DTIME=',G11.5)
C
C        ACCEPT MODEL INPUT DATA AND INITIALIZE
C
      TIME = TO
      CALL MODEL( N, TIME, X, F, DTIME )
C
C        CALL INTEGRATION SUBROUTINE
C
      CALL INT( TIME, X, TMAX, DTIME, DPRNT, N, XT, RK, F )
C
      COTO 1
      END
```

Figura 9-14. Listado del programa FORTRAN que se utiliza con una rutina de integración de propósito general (INT) para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

A la tercera sección de la subrutina MODEL se le llama desde la subrutina INT con el nombre de "OUTPUT"; el objetivo de esta sección es imprimir las entradas en la tabla de tiempo de respuesta. Desde la subrutina de integración INT se llama a OUTPUT con intervalos de tiempo Δt_p (DPRNT), **después** de que se llama por primera vez a **DERIV** durante el paso de integración apropiado, porque únicamente en este punto de cada paso

```
      SUBROUTINE MODEL( NODE, TIME, XS, DXS, DTIME )
C
C        CONTINUOUS STIRRED TANK REACTOR SIMULATION
C
C        THIS SUBROUTINE HAS THREE ENTRY POINTS. THE PURPOSE OF EACH IS
C
C           MODEL - TO ACCEPT INPUT DATA AND COMPUTE CONSTANT COEFFNTS.
C                   AND INITIAL CONDITIONS.
C           DERIV - TO COMPUTE THE DERIVATIVE FUNCTIONS FROM THE STATE
C                   VARIABLES.
C           OUTPUT - TO PRINT INTERMEDIATE VALUES OF SELECTED VARIABLES.
C
C        VARIABLES IN ARGUMENT LIST
C
C        VARIABLE  TYPE  I/O  DIMENSION  DESCRIPTION
C
C          NODE     1     0              NUMBER OF DIFFRNTL. EQUATIONS
C          TIME     R*8   1              INDEPENDENT VARIABLE
C          XS       R*8   O/I   NODE     STATE VARIABLE VECTOR
C          DXS      R*8   0     NODE     VECTOR OF DERIVATIVE FUNCTIONS
C          DTIME    R*8   I              INTEGRATION INTERVAL
C
C        VARIABLES IN INPUT DATA
C
C           KC    CONTROLLER PROPORTIONAL GAIN, DIMENSIONLESS
C           TAUI  CONTROLLER INTEGRAL TIME, S
C           DF    CHANCE IN FEED RATE, M3/S
C           DTSET CHANCE IN SET POINT, C
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL-8 M, K, KO, KC
      DIMENSION XS(1), DXS(1)
C
C        DATA STATEMENTS FOR PARAMETER VALUES
C
      DATA V, U, A / 7.08. 3550.. 5.40 /
      DATA KO, E, DHR. RHO / 0.0744. 1.182D7, -9.86D7, 19.2,
      DATA CF. VC, RHOC, CPC / 1.815D5, 1.82. 1000.. 4184. /
      DATA R / 8314.39 /
      DATA TAUT, ALPHA, FCMAX. TM, DTT / 20.. 50., 0.020, 80., 20. /
C
C        DATA STATEMENTS FOR DESIGN CONDITIONS
C
      DATA FO, CAI, TI. TCI, TSETO / 7.55D-3, 2.88, 66.. 27.. 88. /
C
C        READ IN CONTROLLER PARAMETERS AND INPUT CHANCES
C
      WRITE(6.210)
 210  FORMAT(' ENTER KC, TAUI, DF, DTSET')
      READ ( 5, * ) KC, TAUI, DF. DTSET
      WRITE ( 6, 100 ) KC. TAUI, DF. DTSET
      WRITE ( 4. 100 ) KC, TAUI, DF, DTSET
 100  FORMAT(//10X,'CONTINUOUS STIRRED TANK REACTOR SIMULATION'/
     1      / 10X,'CONTROLLER PARAMETERS, KC=',G10.3,
     2         5X,'TAUI=',G10.3,' S'/
     3      / 10X,'INPUT CHANCES, FEED RATE=',G10.3,' M3/S',
     4         5X,'SET POINT=',G10.3,' C')
C
C        CALCULATE STEADY-STATE INITIAL CONDITIONS AND CONSTANTS
C
      B = ( TSETO   TM ) / DTT
      T = TSETO
      K = KO * DEXP (  E / ( R * (T+273.16) ) )
      CA = ( -FO+ DSQRT( FO**2 + 4.* K * V * FO * CA1 ) ) / (2.*K*V )
      TC = T   ( FO * RHO . CP * (TI - T) - V * DHR * K * CA**2 ) /
     &        ( U * A )
      FC = U * A * ( T - TC ) / ( RHOC . CPC * ( TC - TCI ) )
      M  = - DLOG ( FC / FCMAX ) / DLOC ( ALPHA )
      Y  = M
C
      XS(1) = CA
      XS(2) = T
      XS(3) = TC
      XS(4) = B
      XS(5) = Y
      NODE = 5
C
```

Figura 9-15. Listado de una subrutina en FORTRAN para la simulación dinámica de un tanque de reacción con agitación continua. La rutina es independiente del método de integración **numérica.**

```
      EOR  =  E  ,  R
      DHRC  =  DHR  / ( RHO * CP )
      UAIC  =  U ●  ✌📭☎✝ * RHO . CP )
      UAOC  = U * A / ( VC * RHOC * CPC )
C
C        PRINT HEADER FOR OUTPUT TABLE AND INITIAL CONDITIONS
C
      WRITE ( 6. 110 )
      WRITE ( 4. 110 )
  110 FORMAT(//10X,'TIME, S',8X,'T, C',11X,'M',9X,'FC, M3/S',
     1         2X,'CA, KMOL/M3'/)
      WRITE ( 6. 120 ) TIME, T, M, FC. CA
      WRITE ( 4. 120 ) TIME, T, M, FC, CA
  120 FORMAT(10X,5G12.4)
C
C        INITIALIZATION OF INPUT VARIABLES
C
      F = FO + DF
      TSET = TSETO + DTSET
C
      RETURN
C
C           ENTRY TO CALCULATE DERIVATIVE FUNCTIONS
C
         ENTRY DERIV( NODE, TIME, XS. DXS. NEVAL )
C
C           STORE STATE VARIABLE INTO LOCAL VARIABLES
C
         CA = XS(1)
         T  = XS(2)
         TC = XS(3)
         B  = XS(4)
         Y  = XS(5)
C
C           CALCULATE AUXILIARY VARIABLES
C
         K = KO * DEXP( - EOR , ( T + 273.16 ) )
         M = DMAX1( O.DO, DMIN1( 1.DO,
     F                               Y + KC . ( (TSET-TM)/DTT - B ) ) )
         FC = FCMAX . ALPHA . . ( - M ,
C
C           EVALUATE DERIVATIVE FUNCTIONS
C
         DXS(1) = F * ( CAI - CA ) / V - K * CA**2
         DXS(2) =  F*( TI - T ) / V - DHRC . K . CA**2 - UAIC*(T-TC)
         DXS(3) = UAOC . ( T - TC ) - FC . ( TC - TCI ) / VC
         DXS(4) = ( (T-TM)/DTT - B ) / TAUT
         DXS(5) = ( M - Y ) / TAUI
C
         RETURN
C
C              ENTRY TO OUTPUT SELECTED VARIABLES
C
            ENTRY OUTPUT
C
            WRITE ( 6, 120 ) TIME. T, M. FC, CA
            WRITE ( 4. 120 ) TIME, T, M, FC, CA
C
            RETURN
      END
```

Figura 9-15. (Continuación)

de integración es donde las variables de estado y las auxiliares tienen los valores que corresponden al estado real del sistema, ya que a las variables de estado se les asignan valores aproximados para la segunda evaluación; ésta es también la razón por la cual se debe llamar a DERIV antes que a OUTPUT al completar la corrida (en la subrutina INT) para imprimir las condiciones finales.

En esta estructura de programa es de notar que el programa principal y las subrutinas de integración se pueden utilizar con cualquier subrutina de modelo. Todos los enunciados que se especifican para el modelo están aislados en la subrutina MODEL. Al utilizar puntos de entrada múltiples en la subrutina, se pueden transferir los valores de los

parámetros y las variables de una sección de la subrutina a otra sin necesidad de utilizar enunciados COMMON o argumentos adicionales.

Para el ejemplo del tanque de reacción con agitación continua se requiere un intervalo de integración de 2.5 segundos para cubrir la precisión de cuatro dígitos significativos en los resultados del método de Euler. Este valor, comparado con los 0.25 segundos que se requieren para el método de Euler, significa que el número total de evaluaciones de la función que se requiere para el método de Euler modificado es la quinta parte del que se requiere para el método de Euler simple.

Método Runge-Kutta-Simpson

Para la Runge-Kutta de cuarto orden se requieren cuatro evaluaciones de las funciones derivadas por paso de integración. El planteamiento de un programa donde se utiliza el método Runge-Kutta-Simpson es el siguiente:

1. **Inicialización:** se fija $t = t_0$ y $x_i = x_i(t_0)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Se evalúan las funciones derivadas:

   a) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$k_{1,i} = \Delta t\, f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{9-77}$$

   b) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$k_{2,i} = \Delta t\, f_i(x_1 + \tfrac{1}{2}k_{1,1}, \ldots, x_n + \tfrac{1}{2}k_{1,n}, t + \tfrac{1}{2}\Delta t) \tag{9-78}$$

   c) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$k_{3,i} = \Delta t\, f_i(x_1 + \tfrac{1}{2}k_{2,1}, \ldots, x_n + \tfrac{1}{2}k_{2,n}, t + \tfrac{1}{2}\Delta t) \tag{9-79}$$

   d) Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$k_{4,i} = \Delta t\, f_i(x_1 + k_{3,1}, \ldots, x_n + k_{3,n}, t + \Delta t) \tag{9-80}$$

3. Se incrementan las variables de estado:
   Para $i = 1, 2, \ldots, n$, sea

$$x_i\big|_{t+\Delta t} = x_i\big|_t + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \tag{9-81}$$

$$\text{sea } t = t + \text{At} \tag{9-82}$$

4. Si t es menor 0 igual a $t_{máx}$, se repite a partir del paso 2; de otra manera, se finaliza la corrida

Se notará que el incremento final de las variables de estado. es un promedio de las cuatro evaluaciones de las funciones derivadas, una en t, dos en $(t + 1/2$ At) y una en $(t$ + At). En la figura 9-16 se lista una subrutina para el método Runge-Kutta-Simpson, la cual se puede substituir por la subrutina para Euler modificada de la figura 9-13 sin afectar el programa principal o la subrutina MODEL de las figuras 9-14 y 9-15. Esta modalidad es bastante útil, ya que se ahorra considerable tiempo de reprogramación y el esfuerzo asociado para encontrar y corregir errores de programación.

En el Runge- Kutta de cuarto orden se requiere el doble de evaluaciones de derivadas por paso de integración, en comparación con el de Euler modificado, y, en consecuencia, para economizar tiempo de máquina debe ser posible hacer el intervalo de integración Az algo más del doble del que se necesita para el Euler modificado, a fin de lograr la misma precisión en los resultados. En el caso del tanque de reacción con agitación continua, para el método de Runge-Kutta-Simpson se requiere un intervalo de integración de 25 segundos del cual resulta un ahorro de 80% en el total de evaluaciones de derivadas respecto a la solución mediante Euler modificado.

Resumen

Los estudiantes pueden utilizar los métodos numéricos que se presentaron en esta sección para estudiar los sistemas de control de procesos sencillos. Cuando se simulan procesos más complejos probablemente es conveniente utilizar subrutinas más elaboradas, de las cuales se dispone generalmente en la biblioteca de software de la mayoría de las instalaciones de cómputo grandes; en la siguiente sección se describen algunas de éstas.

9-6. LENGUAJES Y SUBRUTINAS ESPECIALES PARA SIMULACIÓN

Se dispone de varios lenguajes de simulación y subrutinas de integración numérica de propósito general, los cuales se pueden utilizar para simular el comportamiento dinámico de los sistemas de control de proceso. Con estas subrutinas se substituyen las de Euler modificado y Runge-Kutta-Simpson que se presentaron en la sección precedente. Las principales ventajas que se tienen con éstas son las siguientes:

1. Ajuste automático del intervalo de integración para cumplir con una tolerancia específica del error por truncamiento.
2. Métodos numéricos más eficientes que el Runge-Kutta-Simpson de cuarto orden que se presentó en la sección precedente.
3. En algunos casos se dispone de métodos para manejar eficientemente sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales (ver la sección 9-8 para una exposición acerca de la rigidez).

El diseño de estas subrutinas de propósito general es similar al de las subritinas para Euler modificado y Runge-Kutta-Simpson que se presentaron en la sección anterior; en un programa principal se fijan los parámetros de la corrida y las condiciones iniciales y se llama

```
      SUBROUTINE INT( TO, X, TF, DT, DPRNT, N, XT, RK, F )
C
C        PURPOSE - TO INTEGRATE A SET OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
C
C        METHOD  - RUNCE-KUTTA ORDER 4, SIMPSON'S RULE
C
C        VARIABLES IN ARGUMENT LIST
C
C        VARIABLE  TYPE  I/O DIMENSION  DESCRIPTION
C
C           TO      R*8   I/O    -      INDEPENDENT  VARIABLE
C                                        INPUT  - INITIAL VALUE
C                                        OUTPUT - FINAL VALUE
C           X       R*8   I/O    N      VECTOR OF STATE VARIABLES
C                                        INPUT  - INITIAL VALUES
C                                        OUTPUT - FINAL VALUES
C           TF      R*8   1             FINAL VALUE OF INDT. VARIABLE
C           DT      R*8   1             INTECRATION  INTERVAL
C           DPRNT   R*8   1             PRINTING  INTERVAL
C           N        1    1             NUMBER OF DIFFTL. EQUATIONS
C           XT      R*8   W      N      WORKING STATE VECTOR
C           RK      R*8   W      N      WORKING STEP VECTOR
C           F       R*8   W      N      WORKING DERIVATIVE VECTOR
C
C        SUBROUTINES CALLED - DERIV - TO CALCULATE DERIVATIVE FUNCTIONS
C                             OUTPUT- TO PRINT INTERMEDIATE RESULTS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(1), XT(1), RK(1), F(1)
C
C        INITIALIZATION FOR STEP INTECRATION
C
      NSTEPS = ( TF - TO ) / DT + 0.99
      NPSTPS = DPRNT / DT + 0.5
      KP     =0
C
      DO 90 I=1,NSTEPS
C
C           FIRST DERIVATIVE EVALUATION
C
         CALL DERIV( N, TO, X, F, 1 )
C
C           PRINT INTERMEDIATE RESULTS EVERY NPSTPS
C
         KP = KP - 1
         IF ( KP .GT. 0 ) GOTO 10
            KP = NPSTPS
            CALL OUTPUT
 10      CONTINUE
C
C           SECOND DERIVATIVE EVALUATION
C
         T  = TO + 0.5 * DT
         DO 20 J = l.N
            RK(J) = F(J) * DT
            XT(J) = X(J) + 0.5 * F(J) * DT
 20      CONTINUE
         CALL DERIV( N, T, XT, F, 2 )
```

Figura 9-16. Listado de una subrutina en FORTRAN para la integración Runge-Kutta-Simpson de ecuaciones diferenciales ordinarias.

```
C
C          THIRD  DERIVATIVE  EVALUATION
C
        DO 30 J = I,N
           RK(J) = RK(J) + 2. * F(J) * DT
           XT(J) = X(J) + 0.5 * F(J) * DT
 30     CONTINUE
        CALL  DERIV( N, T,  XT,  F, 3 )
C
C          FOURTH  DERIVATIVE  EVALUATION
C
        T = TO + DT
        DO 40 J = 1,N
           RK(J) = RK(J) + 2. * F(J) * DT
           XT(J) = X(J) + F(J) * DT
 40     CONTINUE
        CALL DERIV( N. T. XT, F, 4 )
C
C          HUNCE-KUTTA-SIMPSON  INTEGRATION  STEP
C
        TO = TO + DT
        DO 50 J = 1,N
           RK(J) = RK(J) + F(J) * DT
           X(J)  = X(J) + ( RK(J) / 6. )
 50     CONTINUE
 90   CONTINUE
C
C       PRINT  FINAL  VALUES
C
      CALL DERIV( N. TO, X, F, 0 )
      CALL  OUTPUT
      RETURN
      END
```

Figura 9-16. (*Continuación*)

a la subrutina de integración, la cual a su vez llama a una subrutina de modelo para evaluar las funciones derivadas. Generalmente, el usuario debe ordenar una impresión intermedia de los resultados desde el programa principal -mediante retornos iterativos desde la rutina de integración- o desde la subrutina de modelo.

En la tabla 9-1 se presenta una lista de las subrutinas de integración numérica de las que se dispone comúnmente; para utilizarlos se debe consultar el manual de usuario de cada paquete particular del que forman parte.

También se desarrollaron varios lenguajes de simulación de propósito general para sistemas cuyos modelos se expresan con ecuaciones diferenciales. Algunos de estos programas se diseñaron para simular la respuesta dinámica de procesos químicos y sus sistemas de control. Además de las ventajas que se enlistaron para las subrutinas de integración, con los lenguajes de simulación se tienen las siguientes:

1. Un conjunto de subprogramas modulares para hacer el modelo de instrumentos especificos y elementos de respuesta dinámica; por ejemplo, interruptores, selectores, tiempo muerto y retardos de primer orden.

Tabla 9-1. Subrutinas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias

Nombre	*Características*
DVERK[a]	Ajuste automático del intervalo de integración método Runge Kutta-Verner
LSODE[b]	Ajuste automático del intervalo de integración, Algoritmo implícito para sistemas rígidos, Se utiliza el método de Gear
LSODI[b]	Similar al LSODE, con capacidad adicional para manejar ecuaciones algebraicas implícitas y, a la vez, las ecuaciones diferenciales.
PDECOL[b]	Igual al LSODE, pero para ecuaciones diferenciales parciales con dos variables independientes.

[a] IMSL, Inc., Edificio de la NBC 6°- piso, 7500 Bellair Boulevard, Houston, Tex.
[b] Hindmarsh, Alan C., Mathematics and Statistics Section, L-300 Lawrence Livermore Laboratories, Livermore, Calif.

2. Subprogramas para resolver de manera iterativa las ecuaciones algebraicas del modelo.
3. Características para facilitar el control de la corrida y para la impresión y graficación de los resultados de la simulación.

En la tabla 9-2 aparece una lista de los lenguajes de simulación de que se dispone comúnmente. Como se puede apreciar en las características, el DSS/2 se diseñó para manejar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales; varios programas se orientan a procesos. En los manuales de estos programas aparecen las instrucciones específicas para su utilización. ,

9-7. EJEMPLOS DE SIMULACIÓN DE CONTROL

Normalmente, al simular sistemas de control de proceso se encuentran varios elementos dinámicos o módulos que son comunes a muchos sistemas; ejemplos de estos módulos son los retardos de primer y segundo orden, el tiempo muerto, los controladores proporcional-integralderivativo, compensadores dinámicos de adelanto/retardo, entre otros. En esta sección se presentarán varios ejemplos de tales modelos y después se conjuntarán para simular un circuito de control por retroalimentación.

Ejemplo 9-1(a). Simulación de los retardos de primer y segundo orden.
Retardo de primer orden:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Tabla 9-2. Lenguajes de simulación

Lenguaje	Características
CSMP[a]	Precompilador FORTRAN Módulos para bloques dinámicos y lógicos Capacidad interconstruida para graficación
ACSL[b]	Mismas que el CSMP
DSS/2[c]	Se pueden resolver ecuaciones diferenciales parciales y ordinarios
DYNSYL[d]	Orientado al proceso con módulos de control y proceso Operación interactiva en tiempo real Salida gráfica Algoritmo de integración implícito para sistemas rígidos
DYFLO2[e]	Orientado al proceso con módulos de proceso y control
EPRI-MMS'	Orientado al proceso con módulos de planta de fuerza y control.

[a] "Continuous System Modeling Program," IBM Corporation, ll 33 Westchester Avenue, White Plains, N.Y.
[b] "Advanced Continuous Simulation Language," Mitchell and Gauthier, Associates, 1337 Old Marlboro Road, Concord, Mass.
[c] "Distributed System Simulator-Version 2," W.E. Schiesser, Lehigh University, Bethlehem, Pa.
[d] "DYNSYL: A General Purpose Dynamic Simulator for Chemical Processes," Chemical Engineering Division, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, Calif.
[e] "DYFLO2," R.G.E. Franks, E. I. duPont de Nemours and Company, Wilmington, Del.
[f] "EPRI-Modular Modeling System," Electric Power Research Institute, P.O. Box. 10412, Palo Alto, Calif.

donde:

$Y(s)$ es la salida
$X(s)$ es la entrada
K es la ganancia
τ es la constante de tiempo

Solución. Para simular la función de transferencia, primero se despejan las fracciones:

$$\tau s\, Y(s) + Y(s) = KX(s)$$

Se supone que las condiciones iniciales son cero y se utiliza el teorema de la diferenciación real de la transformada de Laplace, ecuación (2-3), para escribir las ecuaciones en ttrminos de las variables de tiempo:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(r) = K\, x(t)$$

Finalmente, se resuelve para la derivada más alta:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}[K\,x(t) - y(t)]$$

La forma en que queda la ecuación es la apropiada para incorporarla a un programa de simulación. La variable x(t) es la entrada al retardo de primer orden.

Ejemplo 9-1(b). Retardo de segundo orden.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

donde:

τ es la constante de tiempo característica
ξ es la razón de amortiguamiento

Solución. Se despejan las fracciones:

$$\tau^2 s^2 Y(s) + 2\xi\tau s Y(s) + Y(s) = KX(s)$$

Se suponen condiciones iniciales cero y se invierte al dominio del tiempo:

$$\tau^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

Se resuelve para la,derivada más alta:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2}\left[Kx(t) - 2\xi\tau\frac{dy(t)}{dt} - y(t)\right]$$

Ahora se debe transformar esta ecuación en dos ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante el siguiente procedimiento:

Sea

$$y_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Entonces

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

De la combinación de estas tres últimas ecuaciones resultan las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales ya se pueden introducir a un programa de simulación:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y_2(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau^2}[Kx(t) - 2\xi\tau y_2(t) - y(t)]$$

La variable x(t) es la variable de entrada, $y_2(t)$ es una variable intermedia, y $y(t)$ es la salida del retardo de segundo orden.

Ejemplo 9-1(c). Dos retardos de segundo orden en serie.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

donde τ_1 y τ_2 son las constantes de tiempo.

Esta función de transferencia es equivalente a la de la parte (b), cuando la razón de amortiguamiento ξ es igual o mayor a uno. Las relaciones entre estos dos grupos de parámetros son

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\xi - \sqrt{\xi k^2 - 1}} \qquad \tau_2 = \frac{\tau}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Solución. Una forma conveniente para simular esta función de transferencia es dividir el diagrama de bloques en dos bloques en serie, como se muestra en la figura 9-17. Cada uno de los dos bloques es ahora un retardo de primer orden que se puede simular como en la parte (a) del ejemplo 9-1(a).

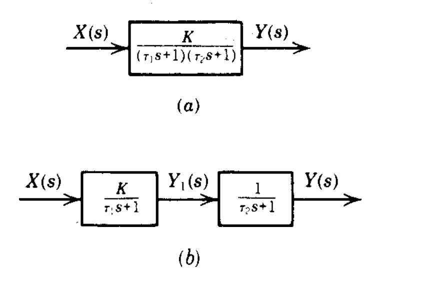


Figura 9-17. Separación de un retardo de segundo orden en dos retardos de primer orden en serie. (*a*) Diagrama de bloques de la función de transferencia original. (*b*) Diagrama de bloques equivalente.

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1}[Kx(t) - y_1(t)]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2}[y_1(t) - y(t)]$$

En este sistema $x(t)$ es la variable de entrada, $y_1(t)$ es una variable intermedia, y y(t) es la variable de salida. La ganancia K se puede asignar a cualquiera de los dos bloques sin afectar la respuesta de la variable de salida y(t).

La programación de las ecuaciones en el dominio del tiempo para los retardos de primer orden se ilustra en el ejemplo 9-5.

Ejemplo 9-2. Simulación del tiempo muerto, retardo de transportación o tiempo de retardo.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-t_0 s}$$

o, en el dominio del tiempo

$$y(t) = x(t - t_0)$$

donde t_0 es el tiempo muerto.

Solución. Una manera de simular el tiempo muerto es almacenar la respuesta de entrada x(t) y reproducirla t_0 unidades de tiempo más tarde para generar la salida $y(t)$. Puesto que la respuesta almacenada no se necesita después de que se reproduce, sólo se necesita almacenar los valores de la respuesta durante t_0 unidades de tiempo; las localidades de almacenamiento se deben refrescar constantemente con valores de entrada. La forma en que funciona el programa para simular el tiempo muerto es la siguente.

Se supone que el valor de la entrada se debe almacenar en cada intervalo de integración **At** y, por lo tanto, el número de valores que se deben almacenar es

$$k = \frac{t_0}{\text{At}}$$

Para almacenar los valores se utiliza un arreglo dimensional Z con dimensión k o mayor; los pasos del programa son los siguientes:

Paso 1. Se inicializan todas las k localidades de Z con el valor inicial de x, x_0 (generalmente cero) :

Para $i = 1, 2, \ldots, k$, sea $Z_i = x_0$

Paso 2. Se inicializa el índice i de la tabla de valores:

Sea $i = 1$

Paso 3. En cada paso de integración

a) De la tabla se toma el valor Z_i como la salida, y se almacena el valor de la entrada en esa localidad

$$\text{Sea} \quad y = Z_i$$
$$Z_i = x$$

b) Se incrementa el índice:

$$\text{Sea } i = i + 1$$

c) Cuando el índice excede a k, se regresa a uno para volver a utilizar las mismas localidades de almacenamiento:

$$\text{Si } i \text{ es mayor que } k, \text{ sea } i = 1$$

Se observará que la segunda vez, y las posteriores, que el programa pasa por las localidades de almacenamiento, se toma el valor que se almacenó ahí k pasos antes; puesto que cada paso representa **At** unidades de tiempo, el valor que se utiliza como salida es el de entrada $k\Delta t$ o t_0 unidades de tiempo antes. El proceso de almacenamiento y extracción se ilustra gráficamente en la figura 9-18.

La lógica del programa de simulación de tiempo muerto se complica algo cuando se utiliza con una subrutina de integración numérica para Euler modificado o Runge-Kutta, debido a que los enunciados de simulación de tiempo muerto se deben ejecutar junto con

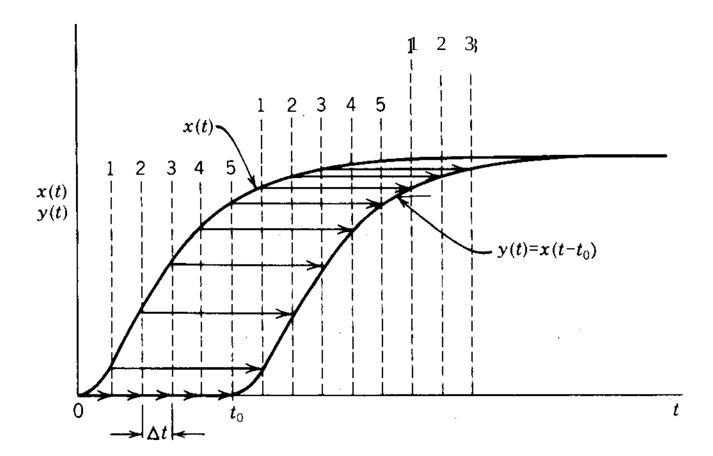


Figura 9-18. Simulación del tiempo muerto mediante el almacenamiento de valores muestra de la función y la aplicacion de los mismos t_0 unidades de tiempo después. En este caso se utilizan cinco localidades de almacenamiento ($k = 5$).

la evaluación de las funciones derivadas; esta ejecución se realiza dos o cuatro veces por paso de integración; en cambio, la *operación de almacenamiento* del programa de tiempo muerto se debe efectuar únicamente una vez por paso de integración. Para eliminar esta dificultad es necesario que en la subrutina de integración se ponga una bandera para indicar al programa de tiempo muerto que se debe almacenar el valor de entrada; la bandera de almacenamiento se debe poner únicamente para la evaluación de la primera derivada, ya que en ese momento las variables de estado tienen el valor más exacto después del paso de integración precedente.

El procedimiento de simulación de tiempo muerto que se describió en el ejemplo precedente se utiliza en el ejemplo 9-5 en la simulación por computador de un circuito de control por retroalimentación.

Ejemplo 9-3. Simulación de una unidad de compensación dinámica de adelanto/retardo.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}$$

donde τ_1 y τ_2 son las constantes de tiempo del adelanto y del retardo, respectivamente.

Solución. Se despejan las fracciones:

$$\tau_2 s\ Y(s) + Y(s) = \tau_1 s\ X(s) + X(s)$$

Se invierte la transformada de **Laplace** y se suponen condiciones iniciales cero:

$$\tau_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \tau_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Como es evidente, en esta ecuación se requiere la derivada de la variable de entrada *x(t)* y, debido a que la diferenciación numérica generalmente es una operación muy imprecisa, se debe evitar siempre que sea posible.

Ahora se regresa a la ecuación en el dominio de **Laplace** y se agrupan los **términos** en s después de dividir entre τ_2:

$$s\left[Y(s) - \frac{\tau_1}{\tau_2}X(s)\right] = \frac{1}{\tau_2}[X(s) - Y(s)]$$

Se define

$$Y_1(s) = Y(s) - \frac{\tau_1}{\tau_2}X(s)$$

y se substituye:

$$s\,Y_1(s) = \frac{1}{\tau_2}[X(s) - Y(s)]$$

Se suponen condiciones iniciales cero y se invierte:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2}[x(t) - y(t)]$$

Y, a partir de la definición de $Y_1(s)$, la variable de salida se expresa mediante

$$y(t) = y_1(t) + \frac{\tau_1}{\tau_2}x(t)$$

En el ejemplo 9-5, esta ecuación de una unidad de adelanto retardo se programa en la simulación de un controlador PID.

Ejemplo 9-4. Simulación de un controlador industrial proporcional-integral-derivativo (PID) .

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)\left(\frac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1}\right)$$

donde:

K_c es la ganancia del controlador
τ_I es el tiempo de integración
τ_D es el tiempo de derivación
$E(s)$ es la señal de error
$R(s)$ es la señal del punto de control
α es el parámetro del filtro para ruido (generalmente 0.05 a 0.10)
$M(s)$ es la salida del controlador
$C(s)$ es la variable controlada

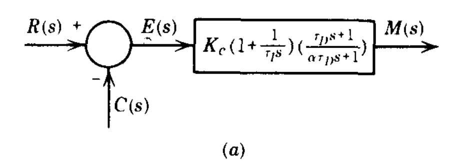
Esta función de transferencia se ajusta a la mayoría de los controladores analógicos "fuera de repisa" (off-the-shelf) que se utilizan en la industria.

Solución. En la figura 9-19*a* se muestra un diagrama de bloques del controlador. Como en el caso de los retardos de primer orden en serie [ejemplo 9-l(c)], es conveniente separar las funciones de transferencia en dos bloques, como se ilustra en la figura 9-19*b*; en la figura es evidente que la sección de derivación es una unidad de adelanto/retardo donde la constante de tiempo de adelanto es el tiempo de derivación, y el retardo es una fracción fija, α, del adelanto.

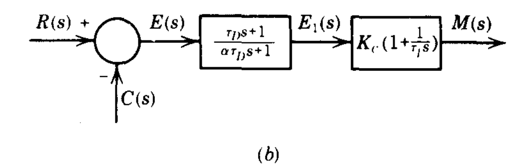
Generalmente se considera indeseable que existan dos acciones de derivación sobre la señal del punto de control, porque ocasionan grandes golpes *(kicks)* derivativos sobre los cambios que hace el operador en el punto de control. Para evitar estos golpes se instala la unidad de derivación sobre la variable que se mide, antes de que se calcule el error, como se muestra en la figura 9-19c. En este diagrama de bloques también se ilustra la utilización del esquema de ***retroalimentación de reajuste*** para realizar la acción de integración. Como se expuso en la sección 6-5, cuando se utiliza la retroalimentación de reajuste es más fácil imponer límites sobre la salida del controlador. Las ecuaciones con que se representa el diagrama de bloques de la figura 9-19c son

Unidad derivativa (adelanto/retardo)

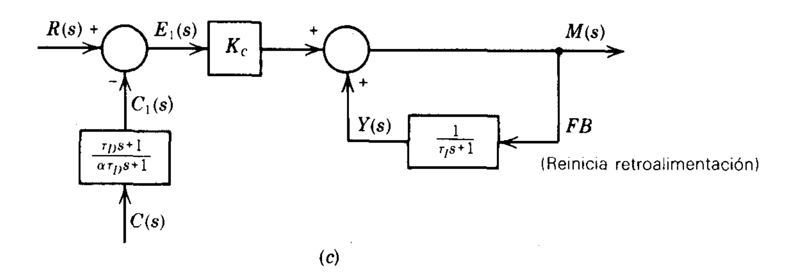
$$\frac{C_1(s)}{C(s)} = \frac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1} \tag{A}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 9-19. Diagrama de bloques de un controlador proporcional-integracional-derivativo (PID). (a) Diagrama de bloques del controlador (PID) industrial. (b) Diagrama de bloques después de separar el bloque derivativo y el bloque proporcional más integral. (c) Diagrama de bloques en el cual el bloque derivativo está sobre la variable de proceso y la acción integracional se realiza a través de la retroalimentación de reajuste.

Cálculo de error

$$E_1(s) = R(s) - C_1(s) \tag{B}$$

Acción proporcional

$$M(s) = K_c E_1(s) + Y(s) \tag{C}$$

Retroalimentación de reajuste

$$Y(s) = \frac{1}{\tau_I s + 1} M(s) \tag{D}$$

La ecuación (A) es para una unidad de **adelanto/retardo** y se puede simular como se **explicó** en el ejemplo 9-3:

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \frac{1}{\alpha\tau_D}[c(t) - c_1(t)]$$

$$c_1(t) = c_2(t) + \frac{1}{\alpha}c(t)$$

Las ecuaciones (B) y (C) se pueden invertir de una manera directa:

$$e_1(t) = r(t) - c_1(t)$$

$$m(t) = K_c e_1(t) + y(t)$$

La ecuación (D) es un retardo de primer orden con ganancia unitaria y se puede simular de la forma que se expuso en el ejemplo 9-l(a):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_I}[m(t) - y(t)]$$

En este modelo del controlador, r(t) es la señal del punto de control (entrada), c(t) es la señal de la variable controlada (entrada), m(r) es la variable manipulada (salida), $e_1(t)$ es el error y $c_1(r)$, $c_2(t)$ y y(t) son variables intermedias. Se notará que $c_2(t)$ y y(t) son las dos variables de estado del modelo.

La programación de las ecuaciones para el controlador PID se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9-5. Simulación del circuito de control por retroalimentación de la figura 9-20*a* con las siguientes funciones de transferencia.

Proceso

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0 s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Controlador PID

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)\left(\frac{\tau_D s + 1}{\alpha\tau_D s + 1}\right)$$

donde los símbolos tienen el mismo significado que en los ejemplos 9-l(c), 9-2 y 9-4, $L(s)$ es una entrada de perturbación.

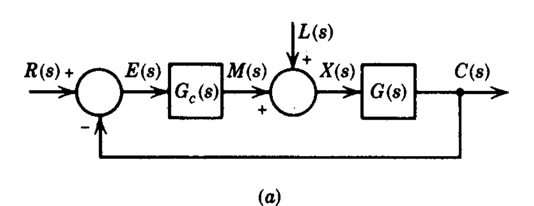
Solución. En la figura 9-20 se separan en componentes de primer orden los bloques del circuito de control por retroalimentación; también se movió el elemento derivativo del controlador, de manera que no actúe sobre la señal del punto de control, y se utiliza la retroalimentación de reajuste para la acción integracional (ver ejemplo 9-4).

El controlador PID se puede simular como en el ejemplo 9-4; debido a que los nombres de las variables son los mismos que en el ejemplo, no se necesita repetir aquí las ecuaciones en el dominio del tiempo. Las ecuaciones para el resto del circuito son las siguientes:

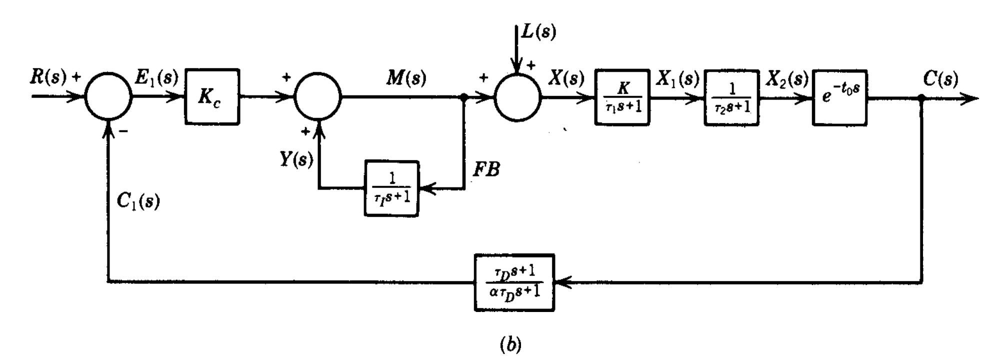
$$x(t) = L(t) + m(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1}[K\,x(t) - x_1(t)]$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2}[x_1(t) - x_2(t)]$$



(*a*)



(*b*)

Figura 9-20. Diagrama de bloques de un circuito de control por retroalimentación. (*a*) Diagrama de bloques del circuito de control por retroalimentación. (*b*) Diagrama de bloques modificado para procesos proporcional-integral-derivativo (PID) y de segundo orden.

El tiempo muerto se simula mediante el almacenamiento de los valores de $x_2(t)$ y su reproducción t_0 unidades de tiempo más tarde, como se explicó en el ejemplo 9-2, ya que

$$c(r) = x_2(t - ro)$$

Estas ecuaciones, junto con las del controlador que se dan en el ejemplo 9-4, constituyen el modelo de circuito de control por retroalimentación. En la figura 9-21 se lista una subrutina FORTRAN para hacer el modelo del circuito; esta subrutina se denomina MODEL y se utiliza con el programa principal de la figura 9-14 y las subrutinas de integración numérica de las figuras 9-13 6 9-16. Se observará que se utiliza el argumento IEVAL en la simulación del tiempo muerto; dicho argumento se fija en la subrutina de integración con el número de secuencia de cada evaluación de derivada, durante cada paso de inte-

```
      SUBROUTINE MODEL( NODE, TIME. XS, DX, DTIME )
C
C        PURPOSE - TO ACCEPT INPUT DATA, CALCULATE THE DERIVATIVES
C                  (ENTRY DERIV), AND PRINT THE RESULTS (ENTRY OUTPUT)
C                  FOR A PID FEEDBACK LOOP WITH A SECOND-ORDER PLUS
C                  DEAD TIME PLANT.
C
C        NOTES :  1. SECOND TIME CONSTANT CAN BE SET TO ZERO.
C
C                 2. DERIVATIVE TIME CAN BE SET TO ZERO.
C
C                 3. IF INTEGRAL TIME IS SET TO ZERO, A PURE INTECRAL
C                    CONTROLLER WITH GAIN KC RESULTS.
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8   M, K, KC, L
      DIMENSION XS(1), DX(1), Z(104)
C
      DATA IDIST /'D' /
C
C          ACCEPT PROCESS PARAMETERS
C
      WRITE( 6 , 200 )
 200  FORMAT(' ENTER K, TAU1, TAU2, AND TO. TAU1 DEFAULTS TO 1.0')
      READ( 5. * )  K, TAU1, TAU2, T O
         IF ( TAU1 .LE. 0. ) TAU, = 1.
      WRITE( 6, 210 ) K, TAU,, TAU2, TO
      WRITE( 4. 210 ) K. TAU,. TAU2, TO
 210  FORMAT(/10X,'PROCESS GAIN =',1PG9.1,5X,'TIME CONSTANTS',2G12.5/
     F        /38X,'DEAD TIME',5X,G12.5 )
C
c         ACCEPT CONTROLLER PARAMETERS
c
      WRITE( 6 . 220 )
 220  FORMAT(' ENTER KC. TAUI, AND TAUD.  INTEGRAL CONTR. IF TAUI=0')
      READ( 5 . *) KC, TAUI, TAUD
      ALPHA = .n .1n
      WRITE( 6, 230) KC. TAUI, TAUD. ALPHA
      WRITE( 4. 230 ) KC, TAUI, TAUD. ALPHA
 230  FORMAT(/10X,'CONTROLLER GAIN =',1PG12.5/
     F        /10X,'INTEGRAL TIME    =',G12.5/
     0        /10X,'DERIVATIVE TIME =',G12.5,2X,'(ALPHA =',G12.5,')')
C
C         ACCEPT TYPE OF INPUT. SET POINT OR DISTURBANCE
C
      WRITE( 6. 240 )
 240  FORMAT(' SET POINT (SP) OR DISTURBANCE (D) CHANCE?' )
      READ ( 5. 250 ) INP
 250  FORMAT(A1)
      IF ( INP .NE. IDIST ) GOTO 10
         R = 0.
         L = 1.
         WRITE( 6 . 260 )
         WRITE( 4 . 260 )
```

Figura 9-21. Listado de la subrutina FORTRAN para simular dinámicamente el circuito de control por retroalimentación de la figura 9-20*b*.

```
 260     FORMAT(/12X,'RESPONSE TO DISTURBANCE STEP')
         COTO 20
  10     L = 0.
         R = 1.
         WRITE( 6. 270 )
 270  FORMAT(/12X,'RESPONSE TO SET POINT STEP' )
  20     CONTINUE
C
C        INITIALIZE DEAD-TIME VECTOR Z AND INDEX ITO.
C
         KTO = TO / DTIME + 0.5
         IF ( KTO .GT. 0 , KTO = KTO / ( (KTO + 99) / 100 )
         DO 30 I=1,KTO
  30        Z(I) = 0.
         ITO = 1
C
C        SET INITIAL CONDITIONS TO ZERO (DEVIATION VARIABLES).
C
         NODE = 8
         DO 40 I=1,NODE
  40        XS(I) = 0.
C
         DX2 = 0.
         DC2 = 0.
C
C        PRINT "EADER FOR RESPONSE TABLE.
C
         WRITE( 6. 280 )
         WRITE( 4. 280 )
 280     FORMAT(/10X,4X,'TIME',11X,'C',11X,'M',7X,'INPUT',10X,'X2',
        F         7X,'DERIV'/)
         RETURN
C
C           EVALUATION OF DERIVATIVE FUNCTIONS.
C
         ENTRY DERIV( NODE, TIME, XS, DX, IEVAL )
C
         XI    = XS(1)
         X2    = XS(2)
         C2    = XS(3)
         Y     = XS(4)
         IF ( TAU2 .LE. 0. ) X2 = XI
C
C           DEAD TIME SIMULATION. STORE ONLY ON FIRST EVALUATION.
C
         C   = X2
         IF ( TO .LE. 0. ) COTO 50
            C   = Z(ITO)
            IF ( IEVAL .NE.  ) GOTO 50
               Z(ITO) = X2
               ITO    = ITO + 1
               IF ( ITO .GT. KTO ) ITO = 1
  50     CONTINUE
C
C           DERIVATIVE ACTION ON MEASUREMENT ONLY.
C
         Cl  = C
         IF ( TAUD .LE. 0. ) COTO 60
            Cl  =  C2 + C / ALPHA
            DC2 = ( C - Cl ) / ( ALPHA * TAVD )
  60     CONTINUE
C
C           PROPORTIONAL-INTEGRAL BY RESET FEEDBACK OR PURE INTEGRAL.
C
         E  = R - C
         El = R - Cl
         IF ( TAUI . LE. 0. ) GOTO 70
            M   = KC * El + Y
            DY  = ( M - Y ) / TAU1
            COTO 80
  70     M  = Y
         DY = KC * E
  80     CONTINUE
C
C           FIRST-ORDER LAGS.
C
         X   = M + L
         DX1 = ( K . X - X1 ) / TAU,
         IF ( TAU2 .GT. 0. ) DX2 = ( X, - X2 ) / TAU.2
```

Figura 9-21. *(Continuación)*

```
C
C         SET VECTOR OF DERIVATIVES. INCLUDING IAE. ISE, ITAE 8 ITSE.
C
      DX(1) = DX1
      DX(2) = DX2
      DX(3) = DC2
      DX(4) = DY
C
      DX(5) = DABS( E )
      DX(6) = E**2
      DX(7) = TIME * DABS( E )
      DX(8) = TIME * E**2
C
      RETURN
C
C            PRINT ENTRIES ON RESPONE TABLE.
C
         ENTRY OUTPUT
         WRITE( 6. 350 ) TIME.  C, M, X. X2, C1
         WRITE( 4, 350 ) TIME, C, M, X. X2, C1
 350     FORMAT(10X,1P6G12.4)
C
C            PRINT ERROR INTEGRALS. IAE. ISE, ITAE AND ITSE.
C
         IF ( IEVAL .NE. 0 ) GOTO 99
            WRITE( 6. 120 ) ( XS(I),I=5,8 )
            WRITE( 4. 120 ) ( XS(I),I=5,8 )
 120  FORMAT(/10X,'ERROR INTEGRALS - IAE =',1PG12.5,4X,'ISE =',G12.5/
     F          28X,'ITAE =',G12.5,4X,'ITSE =',G12.5)
C
 99      RETURN
      END
```

Figura 9-21. (*Continuación*)

gración. En los enunciados de simulación del tiempo muerto, el valor de IEVAL se utiliza de manera que los valores se almacenen únicamente durante la primera evaluación de la derivada (IEVAL = 1) de cada paso de integración. Para que el modelo del tiempo muerto funcione de forma apropiada, el intervalo de integración, DTIME (At), debe ser un submúltiplo entero del tiempo muerto, *TO*(t_0); además, en la subrutina (como la que se lista en la figura 9-2 1) el tiempo muerto se limita a un máximo de 100 veces el intervalo de integración.

Con la subrutina de la figura 9-21 se puede lograr que la segunda constante de tiempo, TAU2 (τ_2), y el tiempo de derivación, TD (τ_D), se hagan iguales a cero. El parámetro de derivación del filtro de ruido, ALPHA (α), se hace igual a 0.10; el retardo de la unidad derivativa, $\alpha\tau_D$, generalmente es la constante de tiempo más pequeña del modelo; a causa de esto es importante que el intervalo de integración, DTIME (At), sea menor que $\alpha\tau_\Delta$, ya que de otra manera la integración numérica sería inestable.

La subrutina de la figura 9-21 es muy útil para verificar los resultados de lugar de raíz y el análisis de respuesta en frecuencia (capítulo 7), y para probar la respuesta del circuito a varias combinaciones de parámetros de circuito y fórmulas de ajuste (capítulo 6). Se pueden simular las respuestas a entradas del punto de control y de perturbaciones; en esta subrutina particular sólo se consideran cambios de escalón unitario.

La respuesta a la entrada de una perturbación se muestra en la figura 9-22; el ajuste es para una perturbación IAE mínima (tabla 6-3).

Para facilitar el ajuste del controlador, con la subrutina de la figura 9-21 se calculan e imprimen los cuatro errores de integración que se definieron en el capítulo 6: IAE, ICE,

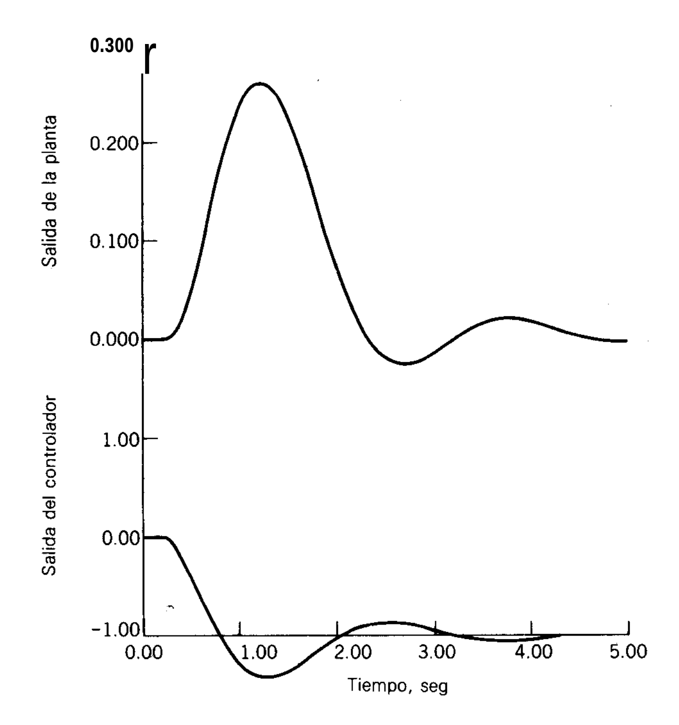


Figura 9-22. Respuesta del circuito de control Por retroalimentación de la figura 9-20*b* a un cambio escalón unitario en la perturbación. Proceso: $K = 1$, $\tau_1 = 1$ seg, $\tau_2 = 0.50$ seg, $t_0 = 0.25$ seg. Controlador: $K_c = 2.82$, $\tau_I = 0.822$ seg, $\tau_D = 0.261$ seg.

IAET e ICET. Para esta estructura se requiere la adición de cuatro variables de estado -una por cada error de integración- a las cuatro variables de estado con que se simula el circuito.

En este ejemplo se ilustró la simulación de los modelos dinámicos que se describieron en los ejemplos precedentes; dichos modelos son útiles en la simulación de sensores, controladores y válvulas de control que se asocian generalmente con el modelo dinámico del propio proceso.

9-8. RIGIDEZ

Como se vio en la sección 9-5, se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es rígido si la razón de su eigenvalor mayor respecto al menor es grande. En el capítulo 2, los eigenvalores de un sistema dinámico se definen como las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia del sistema. Mientras más grande es la rigidez de un modelo, mayor es la cantidad de pasos de integración y, en consecuencia, el tiempo de computadora que se requiere para simular el sistema en una computadora digital. En esta sección se estudiaran las fuentes de rigidez que se pueden eliminar cuando se hace el mo-

delo de un sistema. También se abordaran brevemente algunos de los métodos de integración numérica que se han diseñado para manejar eficientemente los sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales.

Fuentes de rigidez en un modelo

De un modelo que consta de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se dice que es de orden *n*, debido a que, en ausencia de los elementos de tiempo muerto, las *ecuaciones linealizadas* se pueden reducir a una sola función de transferencia total, cuyo denominador es un polinomio de grado *n* en la variable *s* de la transformada de Laplace. De aquí se tiene que la ecuación característica de tal sistema tiene *n* raíces, las cuales son los *n* eigenvalores del sistema y, por lo tanto, por cada ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se escribe para el modelo del sistema, se añade un eigenvalor a la respuesta del modelo.

Debido a la interacción entre las ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo de un sistema, en principio la respuesta de cada variable de estado se puede afectar con cada eigenvalor de las ecuaciones del modelo. La respuesta del sistema linealizado se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$x_i(t) = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + . + b_n e^{r_n t} + \text{(términos de entrada)} \qquad (9\text{-}83)$$

donde:

$x_i(t)$ es la respuesta de la variable de estado *i*
$b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los coeficientes que dependen del sistema y de su función de forzamiento de entrada
$r_1, r_2, \ldots, r_n$ son los eigenvalores del sistema, 1/tiempo

y los "términos de entrada" dependen de la función de forzamiento de entrada específica que se aplica al sistema.

Nota: La ecuación (9-83) se puede obtener mediante la transformación de Laplace de las ecuaciones linealizadas del sistema, la eliminación algebraica de todas las variables de estado, excepto $X_i(s)$, y la inversión mediante expansión de fracciones parciales, como se estudió en el capítulo 2.

Si el sistema es estable, las partes reales de todos los eigenvalores son negativas (ver sección 6-2), lo cual significa que, con el tiempo, cada término de la ecuación (9-83) tiende exponencialmente a cero. Cuando más grande es la magnitud de la parte real negativa del eigenvalor, tanto más rápido decae a cero el término correspondiente de la ecuación (9-83); en cambio, el término con el eigenvalor cuya parte real es la más pequeña (en magnitud) es el que tiene el tiempo más largo para tender a cero y, en consecuencia, éste es el eigenvalor "dominante" con el que se controla el tiempo al cual el modelo alcanza el estado estacionario. Como se verá en breve, en las fórmulas de integración explícitas,

con el eigenvalor más grande se impone un límite de estabilidad superior para el intervalo de integración; de aquí que el número de pasos de integración (cálculos) necesarios para resolver las ecuaciones diferenciales se incremente con la razón del eigenvalor mayor al menor.

En un sistema rígido de ecuaciones diferenciales, la magnitud de algunos de los eigenvalores es mucho mayor que la del dominante; sin embargo, se observa que los términos de la ecuación (9-83) correspondientes a esos eigenvalores grandes deben tender necesariamente a cero mucho más rápidamente que el eigenvalor dominante y, por lo tanto, su efecto dinámico sobre la respuesta total es de corta duración; de hecho, su duración es una fracción muy pequeña de la duración de la respuesta, y generalmente se puede despreciar. Con esto se sugiere que la rigidez de un modelo se reduce si se eliminan de las ecuaciones del modelo los eigenvalores que en magnitud son mucho mayores que el eigenvalor dominante.

Una suposición mediante la cual se pueden eliminar los eigenvalores del sistema de ecuaciones de un modelo es la ***suposición de estado cuasi-estacionario,*** la cual consiste en despreciar el término de acumulación de una ecuación de balance, de manera que ésta se convierta en una ecuación algebraica del modelo, en lugar de una de las ecuaciones diferenciales de primer orden, con lo cual se reduce el orden del sistema en uno; por lo tanto, se elimina uno de los eigenvalores. Sea x_j la variable de estado que se asocia con la ecuación diferencial que se elimina, entonces la suposición de estado cuasiestacionario consiste en la siguiente aproximación de la ecuación del modelo.

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \approx 0 \qquad (9\text{-}84)$$

donde:

f_j es la función derivada
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de estado

Se notará que la aproximación que se indica en la ecuación (9-84) no afecta a la solución de estado estacionario de las ecuaciones del modelo, sino que únicamente se desprecia el efecto transitorio. También se observa que la variable x_j deja de ser una variable de estado y se convierte en una variable auxiliar del modelo. La situación ideal es aquella donde la variable x_j se puede calcular explícitamente a partir de la ecuación (9-84); sin embargo, aun cuando la ecuación (9-84) se deba resolver iterativamente para x_j, se obtiene una ventaja computacional si con la reducción en la rigidez del sistema se logra un incremento significativo en el intervalo de integración. La razón de lo anterior es que, a pesar de que en el método de solución iterativa se requieren unas cuantas evaluaciones de la ecuación (9-84) en cada paso de integración, en el sistema rígido se requiere la evaluación de ***todas las ecuaciones del modelo,*** tantas veces como pasos se requieren en el modelo rígido.

Ahora que se sabe que es posible reducir la rigidez mediante la aplicación de la suposición de estado cuasiestacionario a algunas de las ecuaciones diferenciales del modelo, se tiene el problema de reconocer las ecuaciones con que se introducen los eigenvalores grandes

que ocasionan la rigidez. La solución de este problema es parte del arte de la simulación; pero antes de proceder a la explicación se debe enfatizar el hecho de que no siempre es posible aislar las ecuaciones con que se produce la rigidez.

En la práctica se encuentra que muchas de las ecuaciones diferenciales de primer orden que constituyen el modelo actúan como retardos de primer orden; es decir, la variable de estado que aparece en el término derivativo retarda a las demás variables del modelo. Si éste es el caso, existirá un eigenvalor que se asocia con la ecuación diferencial bajo consideración, cuya magnitud es del orden del recíproco de la constante de tiempo del retardo; una manera sencilla para estimar tal eigenvalor es derivar parcialmente la función derivada respecto de la variable de estado en el término derivativo. Respecto a la ecuación (9-84), el eigenvalor se estima mediante

$$r_j \approx \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \tag{9-85}$$

donde r_j es el eigenvalor que se asocia con la ecuación en cuestión. El problema de esta estimación es que puede ser lejana cuando el acoplamiento entre las ecuaciones del modelo es alto, como en el caso de las ecuaciones de balance de un equipo de flujo a contracorriente, por ejemplo, las columnas de destilación (ver sección 9-2).

Los siguientes son algunos ejemplos de ecuaciones con las que se pueden introducir eigenvalores grandes en la solución de las ecuaciones del modelo; se observa que en cada caso se sospecha que el efecto dinámico considerado es mucho más rápido que los eigenvalores dominantes del sistema.

1. El retardo de válvula o de transmisor cuya constante de tiempo es de unos cuantos segundos cuando las otras constantes de tiempo son del orden de minutos u horas.
2. La acumulación en la fase de vapor cuando la acumulación en la fase líquida también se considera. La masa de la fase de vapor generalmente es mucho mas pequeña que la masa en la fase líquida.
3. La aceleración de un fluido en un conducto corto, en relación con la acumulación de fluido en los tanques. Esto es análogo al efecto de la aceleración sobre un auto subcompacto cuando choca contra un camión de 18 ruedas completamente cargado: se puede suponer que el subcompacto alcanza instantáneamente la velocidad del camión en el momento del impacto.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el efecto de la suposición de estado cuasiestacionario sobre la respuesta dinámica de un sistema.

Ejemplo 9-6. Simulación del drenado de un tanque mediante gravedad, a través de un tubo de descarga vertical.

Se tiene un tanque cilíndrico (ver figura 9-23) de diámetro D_t y altura H, el cual inicialmente esta lleno de agua y se descarga a través de un tubo vertical de longitud L y diámetro D_p. Tanto el tanque como el tubo de descarga están abiertos a la atmósfera

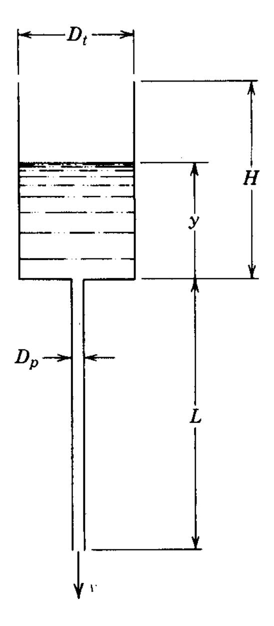


Figura 9-23. Esquema de un tanque con drenaje por gravedad.

y la fricción de la caída en el tubo, incluyendo pérdidas por contracción y expansión, se expresa mediante

$$\Delta p_f = k_f \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{(A)}$$

donde:

k_f es un coeficiente de fricción $= \dfrac{4fL}{D_p} + k_c + k_e$

Δp_f es la caída de presión por fricción, N/m^2
ρ es la densidad del agua, kg/m^3
v es la velocidad promedio en el tubo, m/s
f es el factor de fricción de Fanning y se supone constante
k_c es el coeficiente de pérdida por contracción
k_e es el coeficiente de pérdida por expansión (= 1.0)

Se debe determinar el tiempo que toma vaciar el tanque.

Solución. Del balance de masa alrededor del tanque resulta la siguiente ecuación:

$$0 - \rho \frac{\pi D_p^2}{4} v = \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\pi D_t^2}{4} y\right) \quad \text{1 ecuación, 2 incógnitas } (v, y) \quad \text{(B)}$$

donde:

D_p es el diámetro del tubo, m
D_t es el diámetro del tanque, m
y es el nivel en el tanque, m

Puesto que la densidad es constante, la ecuación (B) se simplifica a

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{D_p}{D_t}\right)^2 v \qquad \text{(C)}$$

La siguiente ecuación se obtiene del balance de fuerzas en el tubo:

$$\text{suma de fuerzas} = \frac{d}{dt}\ \text{(momento)}$$

$$\frac{\pi D_p^2}{4}(p - p_a) + \rho g \frac{\pi D_p^2}{4} L \quad \frac{\pi D_p^2}{4} \Delta p_f = \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\pi D_p^2}{4} L\, v\right) \qquad \text{(D)}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas (p)

donde:

p es la presión en el fondo del tanque, N/m^2
p_a es la presión atmosférica, N/m^2
g es la aceleración de la gravedad, 9.8 m/s^2
L es la longitud del tubo, m

La presión en el fondo del tanque se relaciona con el nivel del tanque en cualquier instante, mediante la fórmula

$$P = Pa + \rho g y$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas (E)

Ahora se substituyen las ecuaciones (A) y (E) en (D), para obtener

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L}\left(y + L - \frac{k_f}{2g} v^2\right) \qquad \text{(F)}$$

Las ecuaciones (C) y (F) son suficientes para determinar la respuesta dinámica del nivel del agua en el tanque y la velocidad en el tubo. Las condiciones iniciales son tanque lleno y velocidad cero en el tubo:

$$y(0) = y_0 = H$$
$$v(0) = 0$$

Se resuelven las ecuaciones (C) y (F) para determinar el tiempo t_f que se requiere para vaciar el tanque:

$$y(t_f) = 0$$

Un posible problema es que el sistema de ecuaciones (C) y (F) sea rígido, lo cual ocurriría si el tiempo requerido para que el líquido en el tubo se acelere hasta un valor de equilibrio, a un cierto nivel en el tanque fuera significativamente menor que el tiempo necesario para vaciar desde ese nivel.

Si el término de aceleración en el miembro derecho de la ecuación (D) es despreciable, entonces

$$y + L - \frac{k_f}{2g}v^2 = \frac{L}{g}\frac{dv}{dt} \approx 0 \tag{G}$$

$$v \doteq \sqrt{2g(y + L)/k_f} \tag{H}$$

Por tanto, si el sistema de ecuaciones (C) y (F) resulta ser severamente rígido, la ecuación (F) se puede substituir por su aproximación, ecuación (H). Físicamente, esto equivale a despreciar la aceleración del fluido en el tubo en la ecuación de balance de fuerzas, ecuación (D); esto es la suposición de estado cuasiestacionario.

Los parámetros son los siguientes:

Altura del tanque:	H = 0.762 m (30 pulg)
Diámetro del tanque:	D_t = 0.1397 m (5.5 pulg)
Diámetro del tubo:	D_p = 6.83 x 10^{-3} m(0.269 pulg)
Longitud del tubo:	L = 0.4572 m (18 pulg)
Aceleración de la gravedad:	g = 9.8 m/s^2 (32.2 pies/s^2)
Coeficiente de fricción:	k_f = 4.2 (sin dimensiones)
Densidad del agua:	ρ = 1000 kg/m^3 (62.3 lb/pies^3)

En la figura 9-24 se muestra un listado de la subrutina MODEL en FORTRAN para resolver este problema. Con esta subrutina se simulan los dos modelos del tanque simultáneamente, con la finalidad de comparar las respuestas dinámicas. Las primeras dos variables de estado corresponden a y y v de las ecuaciones (C) y (F); mientras que la tercera corresponde al nivel y (*YP*) de la ecuación (C) cuando se utiliza la ecuación (H) para calcular la velocidad v (VI').

La subrutina de la figura 9-24 se combina con la subrutina Runge-Kutta-Simpson de la figura 9-16 y el programa principal de la figura 9-24 para producir las respuestas que se tabulan en la figura 9-25. Se tabulan los resultados de dos corridas; en la primera se presenta en detalle la respuesta durante los primeros 0.5 segundos de operación y se observa cómo la velocidad v que se calcula mediante el modelo exacto se inicia en cero, se acelera hasta la velocidad de estado cuasiestacionaria *VP* y entonces la retarda; en esto estriba la diferencia entre los dos modelos. En la segunda corrida se observa cómo, a la larga, de los dos modelos se obtienen esencialmente los mismos tiempos de vaciado

```
      SUBROUTINE MODEL( NODE, TIME, XS, DXS, DTIME )
C
C        CRAVITY DRAINAGE TANK SIMULATION
C
C        THIS SUBROUTINE SIMULATES AN EXACT MODEL THAT INCLUDES THE
C           INERTIA OF THE LIQUID IN THE DISCHARGE PIPE. AND A
C           QUASI-STEADY-STATE MODEL THAT NEGLECTS THE INERTIA.
C
C        VARIABLES IN INPUT DATA
C
C           DP      DIAMETER OF PIPE, M
C           DT      DIAMETER OF TANK, M
C           L       LENGTH OF PIPE, M
C           KF      DISCHARGE FRICTION COEFFICIENT IN VELOCITY HEADS
C           Y0      INITIAL HEIGHT OF LIQUID IN TANK, M
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 L. KF
      REAL*4 XY
      COMMON/ PLOTD / MP, XY(205,3)
      DIMENSION XS(1), DXS(1)
C
      DATA G / 9.8 /, VO / 0. /
C
C        ACCEPT INPUT DATA
C
      MP = 0
      WRITE(6,210)
  210 FORMAT(' ENTER DP, DT, L, KF, YO')
      READ ( 5, * ) DP. DT, L, KF. YO
      WRITE ( 6, 100 ) DP, DT, L, KF
      WRITE ( 4, 100 ) DP, DT, L, KF
  100 FORMAT(//10X,'GRAVITY DRAINAGE TANK SIMULATION'/
     1       / 10X,'PIPE DIAMETER =',1PG12.5,' M',
     2          5X,'TANK DIAMETER =',G12.5,' M'/
     3       / 10X,'PIPE LENCTH =',G12.5,' M',
     4          5X,'PIPE FRICTION =',G12.5 )
C
C        CALCULATE CONSTANTS AND SET INITIAL CONDITIONS
C
      Cl = ( DP / DT ) ** 2
      C2 = KF / ( 2. * G )
C
      XS(1) = YO
      XS(2) = VO
      XS(3) = YO
      NODE = 3
C
C        PRINT HEADER FOR OUTPUT TABLE
C
      WRITE ( 6, 110 )
      WRITE ( 4. 110 )
  110 FORMAT(//10X,'TIME, S',8X,'Y, M',7X,'V, M/S',7X,'YP, M',
     1          6X,'VP, M/S'/)
  120 FORMAT(10X,5G12.5)
C
      RETURN
C
C           ENTRY TO CALCULATE DERIVATIVE FUNCTIONS
C
         ENTRY DERIV( NODE, TIME, XS, DXS, NEVAL )
C
C           STORE STATE VARIABLE INTO LOCAL VARIABLES
C
```

Figura 9-24. Listado de la subrutina en FORTRAN con la que se simula el tanque con drenaje por gravedad.

```
      Y  = XS(1)
      V  = XS(2)
      YP = XS(3)
C
C        CALCULATE DERIVATIVES FOR EXACT (STIFF) MODEL
C
      DXS(1) = -C1 * V
      DXS(2) = ( G / L ) * ( Y + L - C2 * V ** 2 )
C
C        CALCULATE DERIVATIVE FOR QUASI-STEADY-STATE MODEL
C
      VP = DSQRT( ( YP + L ) / C2 )
      DXS(3) = -C1 * VP
C
      RETURN
C
C           ENTRY TO OUTPUT SELECTED VARIABLES
C
        ENTRY OUTPUT
C
        WRITE ( 6, 120 ) TIME, Y, V, YP, VP
        WRITE ( 4, 120 ) TIME, Y, V, YP, VP
C
        MP = MP + 1
        XY(MP,1) = TIME
        XY(MP,2) = Y
        XY(MP,3) = V
C
        RETURN
    END
```

Figura 9-24. (*Continuación*)

y niveles; aquí la diferencia consiste en que con el modelo exacto, que es algo rígido, se requiere un intervalo de integración (DTIME) mucho más pequeño que con el modelo de estado cuasiestacionario. En las condiciones iniciales, los eigenvalores para el modelo exacto se calculan mediante la linealización de las ecuaciones (C) y (F); éstos son, respectivamente, -0.0023 y -21.9 seg^{-1}, y representan un grado de rigidez cercano a 10,000.

En el ejemplo precedente se ilustra que mediante la suposición de estado cuasiestacionario se obtienen esencialmente los mismos resultados dinámicos que con el modelo original; la ventaja de este hecho es que, tanto mayor es el grado de rigidez del sistema, cuanto menor es el error que ocasiona la suposición de estado cuasiestacionario.

Integración numérica de los sistemas rígidos

Se dice que los tres métodos de integración numérica que se consideraron en la sección 9-5, Euler, Euler modificado y Runge-Kutta-Simpson, son métodos explícitos; esto se debe a que las variables de estado se calculan de manera explícita en cada paso de integración, con base en los valores que resultan en el paso precedente. En esa misma- sección se mencionó que, para un paso de integración bastante grande, la solución numérica se puede hacer inestable aun cuando la respuesta de las ecuaciones del modelo es dinámica-

RUN PARAMETERS. TO= .O TMAX= .500 DTIME= 1.5625D-02

GRAVITY DRAINAGE TANK SIMULATION

PIPE DIAMETER = 6.8300D-03 M TANK DIAMETER = .13790 M

PIPE LENGTH = .45720 M PIPE FRICTION = 4.2000

TIME, S	Y, M	V, M/S	YP, M	VP. M/S
.O	.76200	.0	.76200	2.3853
.62500D-01	.76188	1.4182	.76163	2.3849
.12500	.76126	2.0954	.76127	2.3846
			.76090	2.3842
: 25000 18750	.7609 1	2.3076 2.3646	.76054	2.3839
.31250	.76054	2.3790	.76017	2.3835
.37500	76018	2.3825	.75981	2.3831
			75944	2.3828
: 43750 50000	.75945	2.3831 2.3830	: 75908	2.3824

RUN PARAMETERS, TO= .O TMAX= 165. DTIME= 1.56250-02

GRAVITY DRAINAGE TANK SIMULATION

PIPE DIAMETER = 6.8300D-03 M TANK DIAMETER = .13790 M

PIPE LENCTH = .45720 M PIPE FRICTION = 4.2000

TIME, S	Y, M	V , M/S	YP. M	QP, M/S
.0	.76200	.O	.76200	2.3853
5.0000	.73328	2.3573	.73292	2.3567
10.000	.70451	2.3287	.70419	2.3280
15.000	.67616	2.3001	.67581	2.2994
20.000	64812	2.2714	.64778	2.2708
25.000	: 62044	2.2428	.62010	2.2422
30.000	.59210	2.2142	.59278	2.2136
35.000	.56612	2.1856	.56580	2.1850
40.000	.53949	2.1570	.53918	2.1563
45.000	.51321	2. 1283	.51291	2.1277
50.000	.48728	2.0997	.48699	2.0991
55.000	.46170	2.071 1	.46141	2.0705
60.000	.43647	2.0425	.43619	2.0419
65.000	.41160	2.0139	.41133	2.0132
70.000	38707	1.9852	.38681	1.9846
75.000	: 36290	1.9566	36264	1.9560
80.000	.33907	1.9280	: 33883	.9274
85.000	.31560	1.8994	.31536	1.8988
90.000	.29248	1.8708	.29225	1.8701
95.000	.2697 1	1.8421	.26949	1.8415
100.00	.24729	1.8135	.24707	1.8129
105.00	.2 2 5 2 2	1.7849	.22501	1.7843
110.00	. 20351	1.7563	.20330	1.7557
115.00	.18214.	1.7277	18195	1.7270
120.00	.16112	1.6990	: 16094	1.6984
125.00	. 14046	1.6704	.14028	1.6698
130.00	12015	1.6418	11998	1.6412
135.00	: 10019	1.6132	: 10002	1.6126
140.00	.80575D-01	1.5846	.80419D-01	1.5839
145.00	.61315D-01	1.5560	.61166D-01	1.5553
150.00	.42406D-01	1.5273	.42265D-01	1.5267
155.00	.23848D-01	1.4987	.23715D-01	1.4981
160.00	.56413D-02	1.4701	.55157D-02	1.4695
165.00	-.12214D-01	1.4415	-.12332D-01	1.4408

Figura 9-25. Resultados de dos corridas del programa con que se simula el tanque con drenaje por gravedad.

mente estable. En esta sección se presentará brevemente un tipo de métodos implícitos de integración numérica en los que no hay limitaciones de estabilidad.

Para afirmar las ideas acerca de la estabilidad numérica, a continuación se considera la siguiente ecuación diferencia! lineal de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = rx \tag{9-86}$$

donde:

x es la variable de estado
r es el eigenvalor, 1/tiempo

La solución analítica de esta ecuación, que esta sujeta a alguna condición inicial x_0, es

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{9-87}$$

Evidentemente, esta respuesta es estable si la parte real de r es negativa, o es un número negativo. Ahora se considera la solución numérica de la ecuación (9-86) mediante el **método** de Euler; de la ecuación (9-69) se obtiene

$$x|_{t+\Delta t} = x|_t + r\, x|_t\, \mathrm{At} = (1 + r\Delta t)x|_t \tag{9-88}$$

donde At es el intervalo de integración, siempre real y positivo. En la ecuación (9-88) es evidente que, si la magnitud de cada valor de x debe ser menor que el precedente, se debe cumplir la siguiente condición:

$$|1 + r\Delta t| < 1 \qquad \text{(9-89 j}$$

0 si r es un número real

$$-2 < r\Delta t < 0 \tag{9-90}$$

La ecuación (9-89) es la condición de estabilidad numérica para el método de Euler, y la ecuación (9-90) representa los límites de estabilidad de $r\Delta t$ cuando éste es un número real. Para el caso en que r es un número real negativo, los valores de At para los cuales la solución numérica de Euler es estable son:

$$\Delta t < \frac{2}{|r|} \tag{9-91}$$

Se debe notar que el valor máximo de At es inversamente proporcional a la magnitud del eigenvalor r; sin embargo, se debe tener en cuenta que el valor de At para el cual la solución numérica es ***precisa, es*** decir, coincide con la solución real, ecuación **(9-87),**

con una cierta tolerancia, es generalmente mucho más pequeño que el límite de estabilidad que se obtiene con la ecuación (9-91).

En la sección 9-5 se vio cómo con las fórmulas de Euler modificada y Runge-Kutta-Simpson se obtiene la misma exactitud que con el método de Euler, pero con intervalos de integración cuyo orden de magnitud es mayor. Sin embargo, en términos de los límites de estabilidad de At, los de los métodos explícitos Euler y Runge-Kutta son casi los mismos que los del método de Euler y se expresan con la ecuación (9-91). Esto es significativo porque, para un sistema de ecuaciones diferenciales rígido, el límite de estabilidad del intervalo de integración es menor que el limite total de exactitud, debido a que, como se vio anteriormente, los eigenvalores grandes, los cuales hacen que la solución se vuelva inestable, tienen poco efecto sobre la exactitud total de la respuesta que se calcula. En otras palabras, en términos de los eigenvalores grandes que ocasionan la rigidez, únicamente se necesita que haya estabilidad, no precisión.

Los métodos implícitos de integración numérica se desarrollaron para sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales; una propiedad de estos métodos es que no existe limitación de estabilidad en el tamaño del intervalo de integración, lo cual significa que la única consideración para elegir el intervalo de integración es la exactitud de la respuesta total. Para ilustrar uno de los métodos más simples, a continuación se considera la solución numérica de la ecuación (9-86) mediante el método de Euler modificado implícito; la fórmula de la integración numérica es

$$x|_{t+\Delta t} = x|_t + \tfrac{1}{2}[rx|_t\, \Delta t + rx|_{t+\Delta t}\, \Delta t] \tag{9-92}$$

La diferencia entre esta fórmula y la explícita, ecuación (9-75), consiste en que ésta se encuentra implícita en la variable de estado $x|_{t+\Delta t}$; es decir,' la aproximación al término $x|_{t+\Delta t}$ en el miembro derecho no se hace con una fórmula diferente. En este caso simple de una sola ecuación lineal de primer grado, la solución implícita es directa. Al resolver la ecuación (9-92) para $x|_{t+\Delta t}$, se obtiene

$$x|_{t+\Delta t} = \left[\frac{1 + \frac{1}{2}r\Delta t}{1 - \frac{1}{2}r\Delta t}\right] x|_t \tag{9-93}$$

La condición de estabilidad para esta fórmula es

$$\left|\frac{1 + \frac{1}{2}r\Delta t}{1 - \frac{1}{2}r\Delta t}\right| < 1 \tag{9-94}$$

Se puede demostrar fácilmente que con todos los valores positivos de At se satisface esta condición, siempre y cuando. la parte real del eigenvalor, r, sea negativa; en otras palabras, la solución numérica es estable en tanto que el sistema original es estable.

La forma general de la ecuación de Euler modificada implícita, contraparte real de la ecuación (9-75), es la siguiente:

Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula

$$x_i|_{t+\Delta t} = x_i|_t + \tfrac{1}{2}[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)|_t + f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)|_{t+\Delta t}] \tag{9-95}$$

donde f_i son las funciones derivadas. Es de notar que, para resolver de manera implícita este sistema de n ecuaciones algebraicas no lineales correspondientes a los valores de las variables de estado, $x_i|_{t+\Delta t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se requiere una solución reiterativa, es decir, la evaluación repetida de todas las ecuaciones del modeio en cada paso de integración. La ventaja de este método estriba en la reducción de la cantidad total de pasos de integración en un factor mayor que el numero de evaluaciones de la función por paso; obviamente esta ventaja es mayor conforme más rígido es el sistema, y nula cuando el sistema no es rígido. En la subrutina LSODE, una de la tabla 9-1, se utiliza el método implícito de Gear[3] para sistemas rígidos; éste es un método de orden y tamaño de pasos variables.

9-9. RESUMEN

En este capítulo se presentó el desarrollo de los modelos dinámicos de los sistemas de control de proceso y los métodos para simular dichos sistemas en computadoras digitales. También se presentaron los modelos de una columna de destilación de componentes múltiples, de un horno de proceso, de un tanque de reacción química con agitación continua y varios elementos dinámicos que se encuentran comúnmente en los sistemas de control de proceso. En el capitulo se incluye el estudio de la rigidez, su fuente y los métodos para manejarla cuando se resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales.

BIBLIOGRAFÍA

1. Conte, S. D. y C. deBoor, *Elementary Numerical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, Nueva York., 1980, capítulos 5 y 8.
2. Broyden, C. G., "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations," *Math. of Comps.*, Vol. 19, No. 92, Oct. 1965, pp. 577-593.
3. Gear, C. W., *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
4. Luyben, W. L., *Process Modeling, Simulation, and Control in Chemical Engineering,* McGraw-Hill, Nueva York, 1973, capítulos 3 y 5.

PROBLEMAS

9-1. Se debe verificar si el circuito de control de concentración del problema 6-24 se puede poner en marcha en automático; esto se puede hacer mediante la programa-

ción de las ecuaciones no lineales del modelo en una computadora y la simulación del procedimiento de arranque. Se supone que inicialmente ambos reactores están llenos de la solución de alimentación, a una concentración de 0.80 lbmol/gal, y que la reacción empieza tan pronto como la solución alcanza la temperatura de operación. También se debe ajustar el controlador de concentración; primero se debe simular la operación de los reactores con sus condiciones de diseño. Con esto se tiene la oportunidad de ajustar el controlador y verificar si la simulación cumple con las condiciones de operación de estado estacionario.

a) Se deben escribir las ecuaciones del modelo y programarlas para su resolución en una computadora. Es necesario fijar las condiciones iniciales a las condiciones de operación de diseño, y verificar que con ellas se logre un estado estacionario .
b) El controlador de composición se debe ajustar para IAE mfnimo con un cambio escalón del 10% en el flujo de los reactivos.
c) Ahora, con las condiciones de arranque como iniciales, se debe simular puesta en marcha.

Nota: Para evitar el reajuste excesivo y limitar la salida del controlador a un rango entre 0 y 100%, es necesario utilizar la retroalimentación de reajuste en el controlador por retroalimentación (ver ejemplo 9-4).

d) Se debe observar el efecto del reajuste excesivo cuando la salida del controlador se limita a -25 y 125%.

Precaución. Los límites de la válvula de control se deben fijar de manera que el flujo varíe de cero al máximo, es decir, no debe haber flujo negativo. Los límites del controlador corresponden a 0 y 24 mA, respectivamente, en el rango de 4 a 20 mA.
Los resultados se deben comentar brevemente.

9-2. Se necesita que el calentador de aceite del problema 6-26 funcione a la mitad de la razón de producción de diseño, y se debe verificar si es necesario o no reajustar los parámetros de ajuste de los controladores de nivel y temperatura. Se decide hacer esto mediante la simulación de las ecuaciones no lineales del modelo en computadora y el ajuste de los controladores tanto del flujo de diseño como a la mitad del flujo de diseño. Los controladores se ajustaran para IAE mfnimo cuando entran perturbaciones.

a) Se deben escribir y programar las ecuaciones del modelo para resolverlas en una computadora, así como verificar que con las condiciones de diseño se logre un estado estacionario.
b) Los controladores se deben ajustar para cambios escalón de 5% en la posición de la válvula de salida con flujo de diseño completo.

c) Se debe reducir el flujo a la mitad, mediante el cierre de la **válvula** de salida, y observar la respuesta.

d) Ahora se fijarán las condiciones iniciales a las condiciones finales de estado estacionario de la parte (c), o sea, a las condiciones de medio flujo, y se ajustarán los controladores a estas condiciones, **¿existe** alguna diferencia? Los resultados se comentarán brevemente.

9-3. Un tanque que contiene 20,000 litros de solución se utiliza para neutralizar una corriente de ácido clorhídrico **(HCl)** con un reactivo, que consiste en una solución de 0.1 N de hidróxido de sodio. El flujo y la concentración de diseño del **HCl** son 500 litros/min y 0.01 **N.**

En la figura 9-26 se presenta un esquema del tanque con el controlador de pH. La señal del transmisor de pH es lineal respecto al pH de la solución en el tanque, el cual se define mediante

$$pH = -\log_{10} [H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, **gmol/litro.** El electrodo pH se puede simular mediante un retardo lineal de primer orden de 15 seg; el controlador es proporcional-integral (PI) y el punto de control de diseño del pH es 7. El transmisor se calibra para un rango de pH de 1 a 13. En la **válvula** de control se tiene una caída constante de presión de 10 psi y un dimensionamiento para una sobrecapacidad del 100% ; se tienen **características** de porcentaje igual con un parámetro de ajuste en rango de 50. Para simular el actuador de la **válvula** se puede utilizar un retardo de primer orden con una constante de tiempo de 5 seg.

Se puede suponer que la reacción de neutralización alcanza el equilibrio inmediatamente y, por tanto, las concentraciones de iones de hidrógeno e hidróxido se relacionan mediante la constante de disociación del agua:

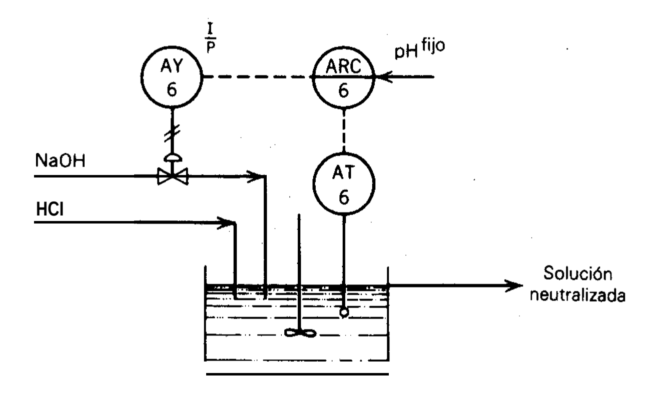


Figura 9-26. Esquema para el neutralizador de agua de desecho del problema 9-3.

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \text{ (gmol/litro)}^2$$

El tanque se encuentra inicialmente en las condiciones de diseño de estado estacionario .

a) Se deben escribir las ecuaciones necesarias para expresar el modelo del tanque si se supone que en él la mezcla de la solución es perfecta y el volumen constante. También se deben calcular las condiciones iniciales.

b) Se deben programar las ecuaciones para resolverlas en una computadora y ajustar el controlador a IAE mínimo (integral del valor absoluto del error) para un cambio escalón en la concentración de HCl de 0.005 gmol/litro.

c) Se deben obtener las respuestas cuando el controlador se ajusta para cambios en el punto de control de ± 0.5 unidades de pH y de 10% en el flujo de la solución de HCl.

9-4. El evaporador que se ilustra en la figura 9-27 se utiliza para concentrar una solución de azúcar desde una fracción de masa de alimentación X_F hasta una fracción de masa de producto X_p. Como medio de calefacción se dispone de vapor saturado a 20 psia; el agua de enfriamiento entra al condensador barométrico con una temperatura T_W. Se puede suponer que la presión en el evaporador es la presión de vapor del agua a la temperatura de salida del condensador, T_C, que la mezcla del contenido del evaporador es perfecta y que la temperatura de los tubos de calandria es igual a la del vapor,que se condensa, T_S. Las pérdidas de calor se pueden despreciar.

El área de transferencia del evaporador es de 309.5 pies^2, y su capacidad es de 4.2 pies^3 de solución por pie de nivel. La capacidad calórica de los tubos de

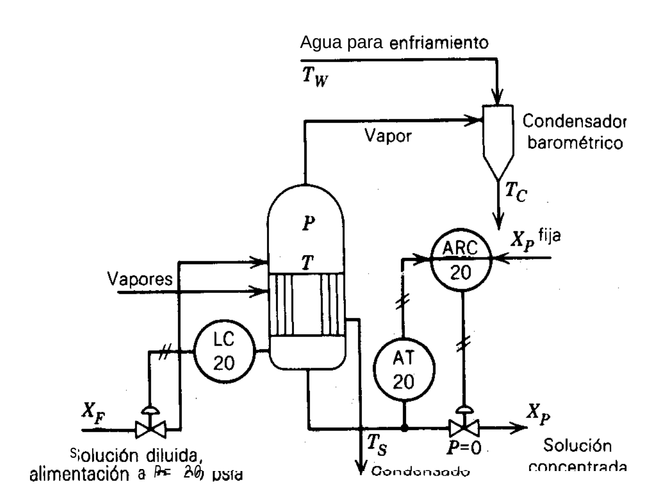


Figura 9-27. Evaporador de efecto único para el problema 9-4.

calandria es 154 Btu/°F, el coeficiente de transferencia de calor es 150 Btu/h-pie^2—°F. El volumen de la solución abajo de los tubos de transferencia de calor es de 4.68 pies^3.

Las válvulas de control tienen características lineales, constantes de tiempo de 5 seg y se dimensionan para una sobrecapacidad del 100%. La caída de presión a través de la válvula de control de alimentación es constante a 16 psi, y a través de la válvula de producto es igual a la presión en el evaporador, debido a que con un soporte barométrico se hace que la presión, en el lado "corriente abajo" ue la válvula de producto, sea cero absoluto. El sensor de nivel es un flotador con rango de 0 a 2 pies por arriba del fondo de los tubos. El rango del transmisor de concentración (AT20) es de 0.3 a 0.8 unidades de fracción de masa, y la constante de tiempo, de 25 seg. El controlador de nivel (LC20) es proporcional, con un punto de control de 25% del rango, y se ajusta para un control estricto de nivel (banda proporcional entre 1 y 10%). El controlador de concentración (ARC20) es proporcional-integra (PI).

Las condiciones de diseño son:

Fracción de masa de alimentación: 0.10
Temperatura de alimentación: 90°F
Fracción de masa del producto (punto de control): 0.70
Temperatura de salida del condensador: 105°F
Temperatura de entrada del agua de enfriamiento: 90°F

Las siguientes correlaciones se pueden utilizar para calcular las propiedades físicas de la solución y del vapor:

Entalpia de la solución: $H = (1 - 0.7x)(T - T_R)$ Btu/lb
Densidad de la solución: $\rho = 62.384 + 23.14x + 11.27x^2$ lb/pies^3
Elevación del punto de ebullición: $BPR = 1.13 - 6.59x + 26.9x^2$ °F

donde: x es la fracción de masa de azúcar
T es la temperatura, °F
T_R es la temperatura de referencia, °F

La capacidad calórica del agua líquida es 1.0 Btu/lb-°F, y la del vapor de agua es 0.46 Btu-lb-°F; estas capacidades se pueden suponer constantes y se utilizan para corregir el calor de vaporización latente del agua por cambios en la temperatura.

La ecuación de Antoine se puede utilizar para calcular la presión de vapor del agua en función de la temperatura, y viceversa:

$$\text{para agua: } \ln P^o = 18.3036 - \frac{3816.44}{T + 227}$$

donde P^o esta en mm de mercurio y T en C.

El evaporador se encuentra inicialmente a las condiciones de diseño de estado estacionario. Las posibles perturbaciones son la razón del vapor, la fracción de masa de alimentación, la razón de agua para enfriamiento que entra al condensador, la temperatura del agua para enfriamiento y el punto de control de la composición del producto.

a) Se deben escribir las ecuaciones del modelo y calcular las condiciones de diseño de estado estacionario. Se deben programar las ecuaciones para resolverlas en una computadora y verificar que las condiciones iniciales constituyen un estado estacionario.

b) El controlador de nivel se debe ajustar para una respuesta de razón de asentamiento de un cuarto mediante ensayo y error. El controlador de composición se debe ajustar con el método de ganancia **última** de Ziegler-Nichols.

c) Se deben obtener las respuestas a entradas escalón' en el punto de control de la composición y en cada una de las perturbaciones que se listan en el enunciado del problema. Los resultados se deben comentar brevemente.

9-5. En la figura 9-28 se muestra el diagrama de un evaporador de efecto triple con alimentación hacia adelante. Las condiciones de entrada y salida y cada uno de los efectos son iguales a los del problema 9-4; los coeficientes de transferencia de calor para cada uno de los efectos son 400, 300 y 130 **Btu/h-pie²-°F**, respectivamente. En las condiciones de diseño, existe una caída de presión de 1 psi en las líneas de vapor entre los efectos 1 y 2 y entre los efectos 2 y 3. Se puede suponer que esta caída de presión varia proporcionalmente respecto al cuadrado del flujo de vapor en la línea.

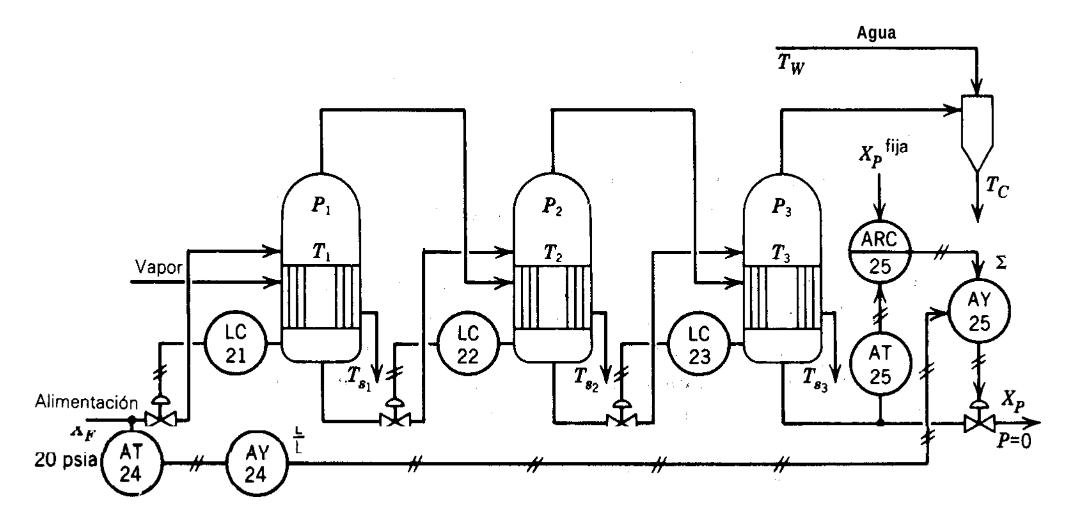


Figura 9-28. Evaporador de triple efecto para el problema 9-5.

Además de los tres controladores de nivel y el controlador de la fracción de masa de producto, se instala un controlador con acción precalculada, con un compensador dinámico de **adelanto/retardo** para compensar los cambios en la composición de entrada.

a) Se deben escribir las ecuaciones del modelo y programarlas para su resolución en una computadora digital.

b) Se debe simular el arranque suponiendo que las concentraciones y temperaturas iniciales en los efectos son las de la alimentación, para ello se utilizarán los mismos parámetros de ajuste del controlador que se determinaron en el problema 9-4.

Nota: Para evitar el reajuste excesivo se necesita utilizar el reajuste por retroalimentación en el controlador PI (ver ejemplo 9-4) y limitar la salida del controlador a un rango entre 0 y 100%.

c) Se debe realizar la parte (c) del problema 9-4 para el evaporador de efecto múltiple, con las condiciones finales de estado estacionario de la parte (b) como condiciones iniciales; también se debe ajustar el controlador con acción precalculada. Los resultados se deben comentar brevemente.

9-6. Se debe vaporizar parcialmente una mezcla de benceno y tolueno mediante un tambor de evaporación calentado por vapor, como el que se ilustra en la figura 9-29.

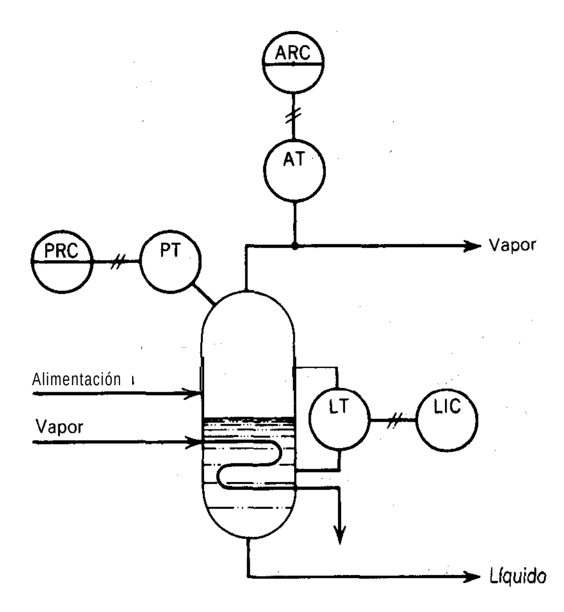


Figura 9-29. Tambor de vaporización parcial calentado por vapor para el problema 9-6.

En el tambor se deben procesar **20,000 lb/h** de líquido saturado que contiene 40 mol% de benceno. El diámetro del tambor es de 5 pies; y la altura de 5 pies, normalmente se llena de líquido hasta la mitad; se dispone de vapor a 30 **psia,** saturado. Se debe diseñar un serpentín de calefacción con un coeficiente total de transferencia de calor de 200 **Btu/h-pie^2-°F,** de manera que se tenga capacidad para evaporar la alimentación total a las condiciones de diseño; el serpentín se hará con tubo de acero de 2 pulgadas, catalogo 40.

a) Se debe diseñar un sistema de control para controlar la presión y el nivel del líquido en el tambor, así como la composición de la corriente de vapor. La interacción entre estos objetivos de control se debe minimizar.
b) .Se deben escribir las ecuaciones del modelo, calcular las condiciones iniciales de estado estacionario, simular el tambor, ajustar los controladores y analizar el **desempeño** del sistema de control cuando hay variaciones en la razón de alimentación, de composición y de temperatura. Se puede suponer que la solución se rige por la Ley de Raoult.

9-7. La columna de destilación que se esquematiza en la figura 9-1 se alimenta con una mezcla de benceno y tolueno; en las condiciones de diseño, la razón de alimentación es de 3500 **lbmol/h,** la composición es de 44 mol% de benceno y es líquida en el punto de burbujeo. La columna se compone de seis bandejas de criba, cada una de las cuales contiene 450 lbmol de líquido y tiene una eficiencia de Murphree de 70%. La alimentación entra por la cuarta bandeja.

Se puede suponer que el rehervidor es una etapa de separación de equilibrio; éste tiene un coeficiente total de transferencia de calor de 350 **Btu/h-pie^2-°F** y un área de transferencia de calor de 2000 pies*. Se dispone de vapor saturado a 75 **psia**. El controlador del nivel de sedimentos **(LIC202)** es un controlador proporcional con banda proporcional del 100%. El transmisor de nivel **(LT202)** se calibra de manera que el líquido que se retiene en el rehervidor y el fondo de la columna es de 600 lbmol en el límite inferior y 1000 lbmol en el límite superior. El punto de control esta en el 50% de este rango; la válvula de control para la producción de sedimentos es lineal y se dimensiona para una sobrecapacidad del 100 % con retardo despreciable.

Se puede suponer que con el condensador la presión en la columna se mantiene constante a 1 atmósfera y el reflujo a su punto de burbujeo. La capacidad del tambor acumulador del condensador varia de 500 a 1500 lbmol de líquido entre los límites superior e inferior del transmisor de nivel **(LT201).** El controlador de nivel es proporcional con una banda proporcional de 100% y punto de control de 50% del rango. La **válvula** de control para el reflujo es lineal y se dimensiona para una sobrecapacidad de 1 OO % con retardo despreciable.

A las condiciones de diseño, la composición del producto debe ser de 82 mol % de benceno y los sedimentos que se producen no deben contener más del 15 % de benceno. La composición de los sedimentos se debe controlar mediante la manipulación del flujo de vapor al rehervidor, y la composición del destilado **median-**

te la manipulación del flujo del mismo. Para dimensionar las válvulas de control se debe utilizar una razón de reflujo de 2.0.

a) Se deben diseñar dos circuitos de control de composición e incluir el rango de los transmisores, las dimensiones de las **válvulas** de control y los modos de los controladores. Se puede suponer que ambas composiciones se pueden medir continuamente con un retardo (de primer orden) de un minuto en los transmisores de composición, AT201 y AT202.

b) Se deben escribir las ecuaciones del modelo con la suposición de que el **sobre**flujo es equimolar; esto es, las razones de **líquido** y vapor no cambian de bandeja a bandeja. También se puede suponer que en cada bandeja la mezcla es perfecta, al igual que en el rehervidor y el tambor acumulador, y que las propiedades **físicas** son constantes. Para el benceno-tolueno se puede suponer que a la presión atmosférica la volatilidad relativa es constante a 2.43, es decir,

$$\frac{y^*}{x}\frac{(1-x)}{(1-y^*)} = 2.43$$

donde y^* es la fracción molar del benceno en el vapor, lo que esta en equilibrio con el líquido de la fracción molar x.

c) Se debe simular el arranque de la columna con todas las bandejas, con el fondo y el tambor acumulador llenos inicialmente con un líquido de la misma composición y a la misma temperatura que el de alimentación.

d) Las condiciones finales de estado estacionario de la parte (c) se utilizan como condiciones iniciales para estudiar el desempeño del sistema de control con cambios en la razón de alimentación y fracción de mol y en los puntos de control de la composición. Los controladores de composición se deben ajustar mediante el método de síntesis de controladores.

Nota: Puede ser necesario hacer reiteraciones entre las partes (c) y (d) de este problema, ya que la **simulación** del arranque es una forma conveniente de calcular las condiciones de estado estacionario con el programa, mientras que los controladores se deben ajustar a las condiciones de operación de estado estacionario.

9-8. Se debe simular el horno del modelo que se hizo en la sección 9-3. El tubo del horno es de acero, de 4 pulgadas, catalogo 40, con una longitud de 120 pies. El fluido que se calienta es aire con una capacidad calórica de 6.96 **Btu/lbmol-°F** a presión constante, y de 4.98 **Btu/lbmol-°F** a volumen constante. El combustible es gas natural con un valor calórico de 990 **Btu/pies^3** (a 60 **°F**, 30 pulg de Hg), y la eficiencia del horno es de 78 % .

En las condiciones de diseño, la temperatura de entrada del aire es de 80 **°F**, y su razón de flujo es 85 **lbmol/h.** El punto de control para la temperatura de salida es 1000 **°F.** El coeficiente interno de transferencia de calor se puede suponer **constan-**

te a 100 Btu/h-pie^2-°F, y la emisividad de la superficie del tubo como constante a 0.75. La densidad del acero es 480 lb/pie^3, y su calor específico 0.12 Btu/lb-°F. La masa efectiva del fogón es de 1750 lb, y su calor específico de 0.32 Btu/lb-°F.

Para el transmisor de temperatura (TT42 en la figura 9-5) se tiene un rango calibrado entre 500 y 1500 °F y una constante de tiempo de 50 seg. En la válvula de control se tiene una caída de presión de diseño de 15 psi con características de porcentaje igual y parámetro de ajuste en rango de 50; se dimensiona para una sobrecapacidad del 100 % con base en las condiciones de diseño. El tiempo de retardo del actuador de la válvula es despreciable.

Se debe dividir el tubo en 5, 10 y 20 secciones iguales en longitud y comparar los resultados de una respuesta sin control (K_C = 0) a un incremento del 10% en el flujo de aire, a partir de las condiciones iniciales de estado estacionario; entonces se utiliza el número de secciones con que se obtiene una precisión aceptable para ajustar el controlador de temperatura (TRC42 en la figura 9-5) y estudiar la respuesta del controlador a cambios escalón en el flujo de alimentación, la temperatura de entrada y el punto de control de la temperatura. La simulación del arranque se puede utilizar para obtener los perfiles de estado estacionario de temperatura del gas y del tubo, es decir, las condiciones iniciales. .

9-9. Para el problema 9-8 se debe estudiar el desempeño de un controlador con acción precalculada bien ajustado, el cual consta de un compensador dinámico de ganancia y adelanto/retardo. Con el controlador de acción precalculada se mide el flujo de aire que entra al horno, y su salida se añade a la salida del controlador por retroalimentación.

9-10. El calentador de vapor de la figura 9-30 se utiliza para calentar una corriente en proceso que tiene una capacidad calórica de 4200 J/kg-C y una densidad de 850

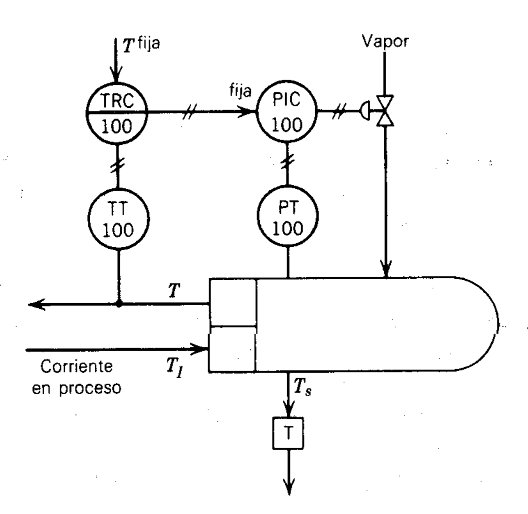


Figura 9-30. Control en cascada del calentador de vapor para el problema 9-10.

kg/m^3. El calentador consta de 86 tubos dispuestos en dos pasos (43 tubos por paso). Los tubos son de cobre de 1 pulg (0.0254 m), calibre 18 (densidad = 8920 kg/m^3, calor específico = 394 J/kg-C), de 48 m de largo. El coeficiente de condensación del vapor se puede suponer lo suficientemente grande como para considerar que los tubos están a la misma temperatura del vapor que se condensa; la acumulación por condensación se puede despreciar. Se dispone de vapor saturado a 350 kN/m^2. El coeficiente interno de transferencia de calor es de 1400 $J/s\text{-}m^2\text{-}C$.

A las condiciones de diseño, se deben calentar 25 kg/seg del fluido que se procesa, de 60° a 80°C.

El sistema de control es un circuito en cascada en el cual el controlador de temperatura manipula el punto de control del controlador de presión en el casquillo. La presión en el casquillo es la presión de vapor del agua a la temperatura de condensación del vapor; se puede calcular mediante la ecuación de Antoine para agua (ver problema 9-4).

El rango de calibración del transmisor de temperatura (TT100) es de 50 a 150°C y el de transmisor de presión (PT100) es de 0 a 500 kN/m^2. El controlador de temperatura (TRC100) es proporcional-integral-derivativo (PID) y el de presión (PIC 1 OO) es proporcional-integral (PI). La válvula de control es de porcentaje igual, con un parámetro de ajuste en rango de 50 y se dimensiona para una sobrecapacidad del 100%, con base en las condiciones de diseño; la constante de tiempo del actuador es de 5 seg. La constante de tiempo del sensor de temperatura es de 35 seg y el retardo del sensor de presión es despreciable.

a) Se deben escribir las ecuaciones del modelo, para lo cual se divide el tubo de intercambio de calor en 10 secciones de longitud igual. Las ecuaciones se deben programar para su resolución en una computadora y, además, se debe simular el arranque para obtener los perfiles de diseño correspondientes a la temperatura de estado estacionario.
b) El controlador de presión se debe ajustar para un sobrepaso del 5 % , mediante el método de síntesis del controlador; entonces se debe ajustar el controlador de temperatura para un IAE mínimo cuando entren perturbaciones. Se debe observar la respuesta a cambios del ±40% en el flujo del líquido que se procesa.
c) Se debe remover el controlador de presión; por lo tanto, la válvula se opera directamente con la salida del controlador de temperatura; en tales condiciones, se debe ajustar el controlador de temperatura como en la parte (b) y comparar los resultados.

9-11. En la recuperación de DMF (dimetil-formamida) de una solución acuosa mediante destilación, se utiliza un vaporizador para separar los componentes pesados que pueden obstruir la columna de destilación. El vaporizador se esboza en la figura 9-31. La alimentación consiste en 5-16 % en peso de DMF, 1% de componentes pesados y el balance se completa con agua, la cual es el componente más volátil. En el líquido de purga quedan todos los componentes pesados, ya que no son volátiles; 4% del peso de la alimentación se purga en las condiciones de diseño. Para

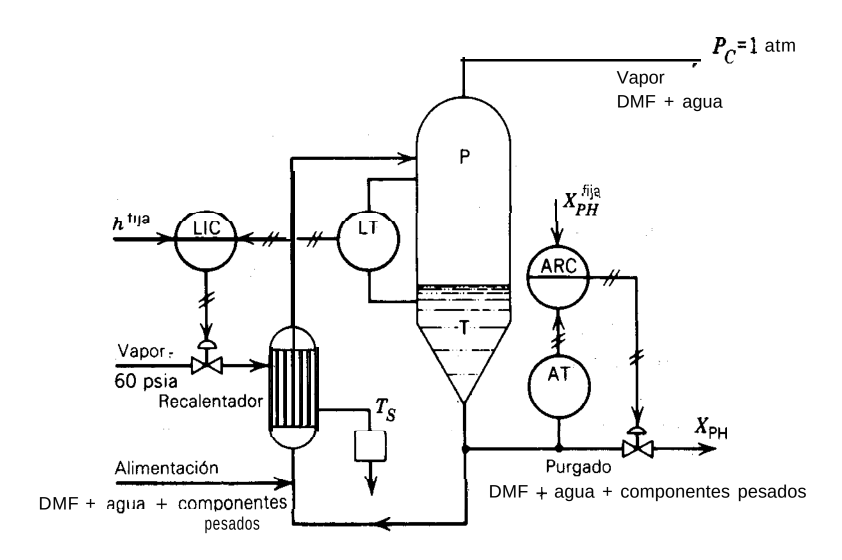


Figura 9-31. Termosifón vaporizador para el problema 9-11.

calentar el termosifón rehervidor se dispone de vapor saturado a 60 psia, y la razón de recirculación es lo suficientemente alta como para suponer que el contenido del vaporizador se mezcla perfectamente. A las condiciones de diseño, la razón de flujo de la solución que entra al vaporizador es de 2000 lb/h a 25°C y 10% en peso de DMF. A continuación se dan las características del equipo y las propiedades físicas; se puede considerar que el vapor esta en equilibrio con el líquido.

Volumen del vaporizador: se diseña para un tiempo de retención de 1 min, con base en la razón de alimentación.

Área transversal: se diseña para una velocidad de vapor de 2.0 pies/seg

Rehervidor: el coeficiente de ebullición de transferencia de calor (limitante) es de 240 Btu/h-pie^2-°F; el área es de 150 pies^2; los tubos son de acero de una pulgada, 16 BWG, y se puede considerar que están a la misma temperatura que el vapor que se condensa.

Caída de presión del vaporizador a la columna: 0.5 psi, a las condiciones de diseño; proporcional al cuadrado del flujo del vapor. La columna se opera a la presión atmosférica.

Controlador de nivel: proporcional con una banda proporcional del 100%.

Transmisor de nivel: rango de 10 pulg con nivel de diseño a 50% del rango; el retardo es despreciable.

Transmisor de 'la composición de purga: rango de 0 a 100 de porcentaje en peso; constante de tiempo de 45 seg.

Controlador de la composición de la purga: proporcional-integral (PI) con un punto de control de 25 % en peso de componentes pesados.

Válvulas de control: se dimensionan para un 100 % de sobrecapacidad; características lineales; el retardo del **actuador** es despreciable.
Propiedades físicas:

	Agua	*DMF*	*Componentes pesados*
Peso molecular	18	73	200 (prom)
Calor latente de vaporización a 25 °C, Btu/lb	1050	261	—
Volatilidad relativa	54.0	1.0	0
Calor específico, Btu/lb-°F			
Liquido	1.0	0.53	0.45
Vapor	0.46	0.36	—
Gravedad específica del líquido	1.0	0.94	0.90

Se puede hacer el modelo del equilibrio vapor-liquido mediante la suposición de que la volatilidad relativa es constante y que la presión parcial del agua obedece la ley de Raoult. La presión de vapor del agua se puede determinar a partir de la ecuación de Antoine que se da en el problema **9-4.**

a) Se deben escribir las ecuaciones del modelo, calcular las condiciones de diseño de estado estacionario y dimensionar el vaporizador. Las ecuaciones se programarán para su resolución en computadora y se verificará que con las condiciones iniciales se logra un estado estacionario.
b) Cada uno de los controladores se debe ajustar para una respuesta de razón de decaimiento de un cuarto, mientras se mantiene el otro en control manual. Se debe determinar la medida de interacción entre los dos circuitos (ver capítulo 8) y corregir los parámetros de ajuste, en caso de que sea necesario.
c) Se debe obtener la respuesta para cambios escalón en la razón de alimentación y composición (de los componentes pesados).

APÉNDICE A

Símbolos y nomenclatura para los instrumentos

En este apéndice se presentan los símbolos y nomenclatura que se utilizan en los diagramas de instrumentación de este libro. La mayoría de las compañías tienen sus propios métodos y, aun cuando son muy semejantes entre sí, no son exactamente iguales. Los símbolos y nomenclatura que se utilizan aquí se apegan a la norma publicada por la *Instrument Society of America* (ISA)[1]; en este apéndice se presenta únicamente la información necesaria para este libro, pero si se desea profundizar más, se remite al lector a la norma de la ISA.

En general, la identificación de los instrumentos se conoce también como número de placa, y es de la forma:

L	RC	— 101	A
Primera letra	*Letras sucesivas*	*Número de circuito*	*Sufijo (no se requiere)*
Identificación funcional		Identificación del circuito	

En la tabla A-l se da el significado de algunas de las letras.

Los símbolos que se utilizan para designar la función de los relevadores se escribe generalmente cerca de la placa del instrumento. Algunos de los símbolos más comunes se presentan en la tabla A-2, y en la tabla A-3 se ilustra un resumen de otras abreviaturas especiales; para terminar, en la tabla A-4 se presentan los símbolos de los instrumentos.

En la figura A-l se ilustra el ejemplo de un circuito de flujo; el elemento de flujo, FE-10, es una placa perforada con espitas en el borde. El elemento se conecta a un transmisor electrónico de flujo, FT-10; la salida del transmisor se envía a un extractor de raíz

Tabla A-l. Significado de la8 letras de identificación.

	Primera letra	*Letras sucesivas*
A	Análisis	Alarma
B	Flama del quemador	
C	Conductividad	Control
D	Densidad o gravedad específica	
E	Voltaje	Elemento primario
F	Razón de flujo	
H	Mano (arranque manual)	Alto
I	Corriente	Indicador
J	Potencia,	
K	Tiempo o tabla de tiempos	Estación de control
L	Nivel	Ligero o bajo
M	Humedad	Medio o intermedio
O		Orificio
P	Presión 0 vacío	Punto
Q	Cantidad o evento	
R	Radiactividad o razón	Registro 0 impresión
S	Velocidad o frecuencia	Interruptor
T	Temperatura	**Transmisión**
v	Viscosidad	Válvula, amortiguador o respiradero
W	Peso 0 fuerza	**Depósito**
Y		Relevador o computador
Z	Posición	Manejo

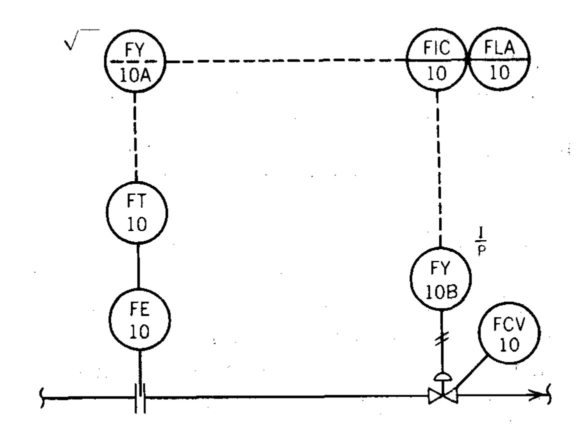


Figura A-l. Circuito de flujo.

Tabla **A-2.** Designación de funciones para relevadores.

Símbolo	*Función*
1. 1-0 o ENCENDIDO-APAGADO	Dispositivo con dos posiciones
2. Σ o SUMA	Adición y/o substracción
3. A o DIFF	Substracción exclusiva de señales
4. ±	Derivación
5. AVG	Promedio
6. % 6 1:3 6 2:1 (típico)	Ganancia o atenuación (entrada-salida)
7. x	Multiplicación
8. ÷	División
9. √ o SQ. RT.	Raíz cuadrada
10. X^n 0 X"'	Elevación a una potencia
11. *f(x)*	Caracterización o generador de función
12. 1:1	Multiplicador (Boost)
13. >	Selección alta
14. <	Selección baja
15. ≯	Límite superior
16. ≮	Límite inferior
17. REV	Reversa
18. ∫	Integración (integral de tiempo)
19. *D o d/dt*	Derivación o razón
20. L/L	Unidad de adelanto/retardo
21. E/P o P/I (típico)	Para secuencias de entrada/salida:
	Designación — Señal
	E — Voltaje
	H — Hidráulico
	I — Corriente
	P — Neumático
	R — Resistencia
	0 — Electromagnético o sónico
22. AID o D/A	A — Analógico
	D — Digital

Tabla A-3. Resumen de abreviaturas especiales.

Abreviatura	*Significado*
A	Analógico
AS	Suministro de aire
D	Control derivativo
	Señal digital
DIR	Acción directa
DEC	Decremento
ES	Suministro de electricidad
FC	Cerrado en falla
FI	Indeterminado en falla
FL	Bloqueado en falla
FO	Abierto en falla
GS	Suministro de gas
I	Señal de corriente
	Interbloqueo
INC	Incremento
M	Actuador de motor
NS	Suministro de nitrógeno
P	Señal neumática
	Control proporcional
	Purga o dispositivo de desagüe
R	Control de reajuste
	Resistencia
REV	Acción inversa
RTD	Detector de temperatura de resistencia
S	Actuador de solenoide
S.P.	Punto de control
SS	Suministro de vapor
T	Trampa
WS	Suministro de agua

Tabla A-4. Símbolos generales de los instrumentos-significado.

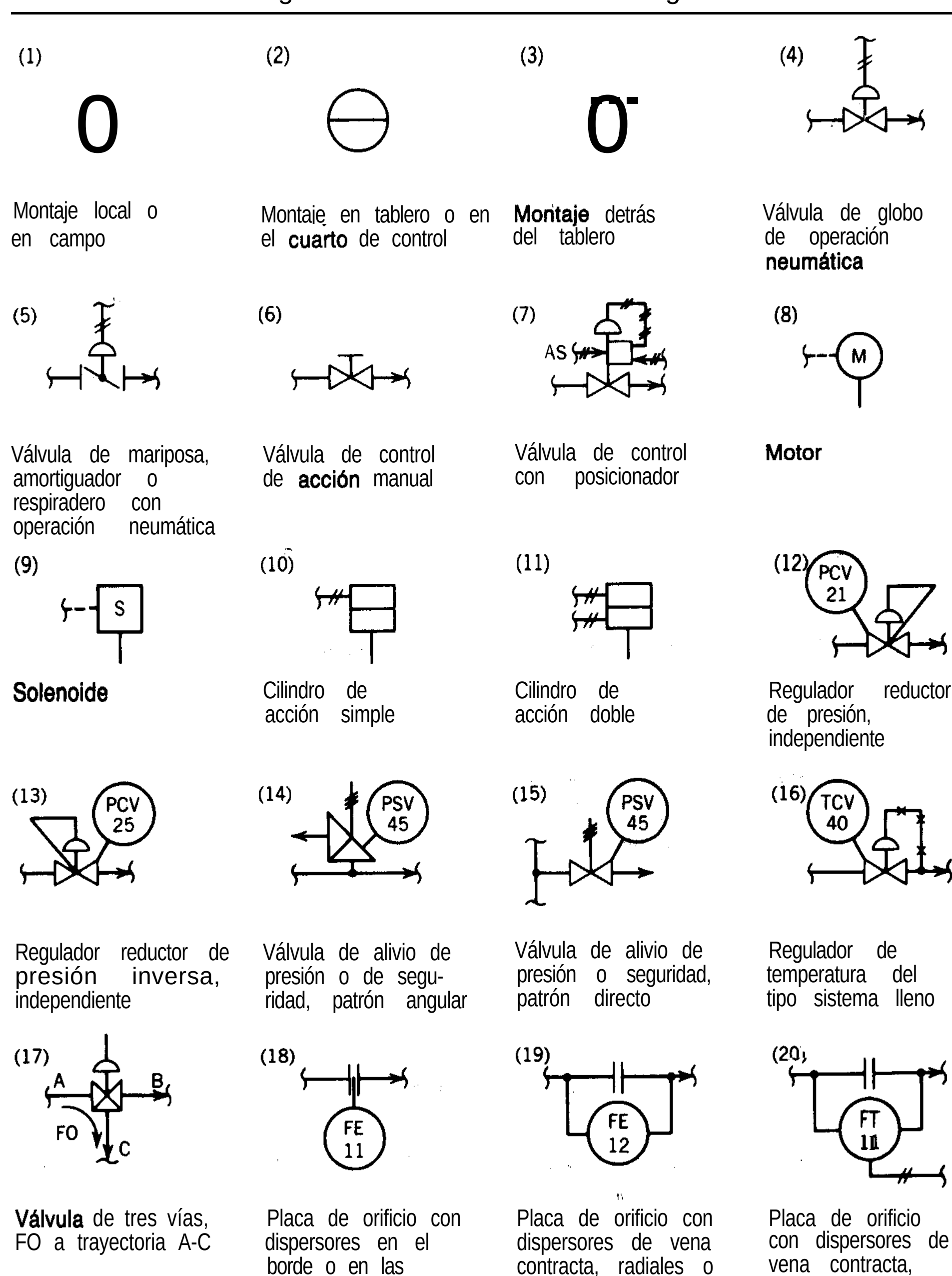
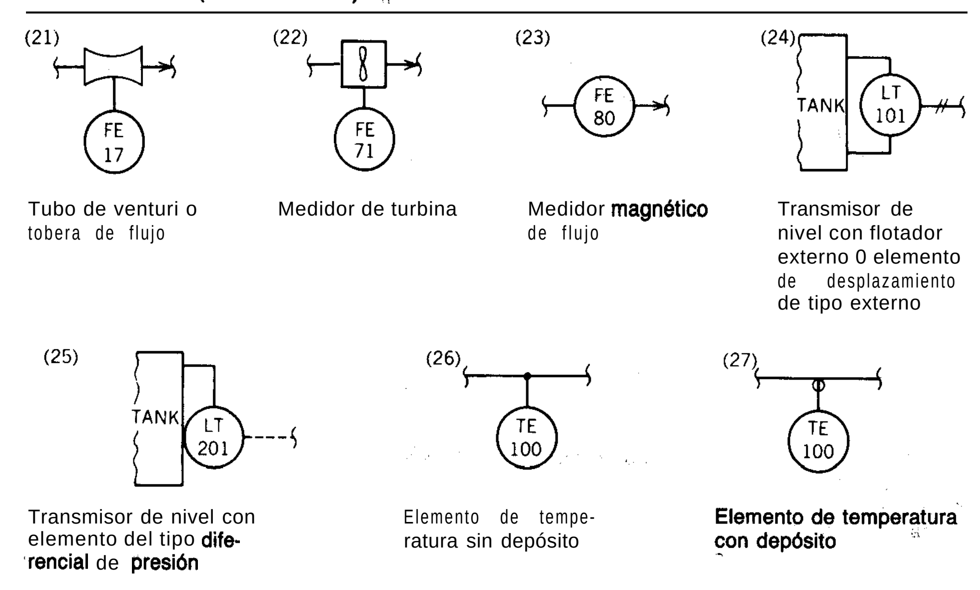


Tabla A-4. ***(continuación).***



(21) Tubo de venturi o tobera de flujo

(22) Medidor de turbina

(23) Medidor **magnético** de flujo

(24) Transmisor de nivel con flotador externo 0 elemento de desplazamiento de tipo externo

(25) Transmisor de nivel con elemento del tipo **diferencial** de **presión**

(26) Elemento de temperatura sin depósito

(27) **Elemento de temperatura con depósito**

cuadrada, **FY-10A,** y de ahí la señal pasa a un controlador indicador de flujo, FIC-10. La señal de **FY-10A** también se envía a una alarma de flujo bajo, FLA-10. La salida del controlador se manda a un transductor **I/P**, **FY-10B,** para convertir la señal electrónica en neumática; entonces, la salida del transductor se envía a la **válvula** de control de flujo, FCV-10. El controlador y la alarma se montan en el tablero de instrumentos; mientras que el extractor de **raíz** cuadrada se monta detrás del panel; los demás instrumenos se montan en el campo de operación.

Nota: Con la finalidad de simplificar, en la mayoría de los diagramas de instrumentos del libro se omite la placa de identificación de la **válvula** de control; por la misma razón, **también** se omite la del elemento, y únicamente se muestra la del transmisor. El lector puede suponer que con la placa del transmisor se representa también el elemento.

BIBLIOGRAFÍA

1. "Instrumentation Symbols and Identification," Instrument Societv of America, Standard ISA-SS-l, Enero 31, 1975, Research Triangle Park, N.C.

APÉNDICE B

Casos para estudio

En este apéndice se presenta una serie de casos de diseño para su estudio, con los cuales se da al lector la oportunidad de diseñar sistemas de control de proceso a partir del borrador. Cabe aclarar que el primer paso en el diseño de sistemas de control para plantas de proceso es decidir cuales de las variables del proceso se deben controlar; tal decisión la deben de tomar, conjuntamente, el ingeniero de proceso que diseña el proceso y el ingeniero de control o de instrumentación que diseña el sistema de control y especifica la instrumentación. Esto implica un verdadero desafío y requiere un trabajo de equipo. El segundo paso es el diseño del sistema de control propiamente dicho; en los casos para estudio que siguen ya se realizó el primer paso, y el segundo es el tema de los presentes casos de estudio. El lector debe recordar que puede existir más de una forma para diseñar un sistema de control.

Caso I. Sistema de control para una planta de granulación de nitrato de amonio[1]

El nitrato de amonio es uno de los principales fertilizantes; en la figura B-l se aprecia el proceso para su manufactura: Desde un tanque de alimentación se bombea'una solución débil de nitrato de amonio (NH_4NO_3) a un evaporador; en la parte superior del evaporador hay un sistema de expulsión por vacio; el vacío se controla con el aire que entra al sistema. La solución concentrada se bombea a un tanque de agitación, y de ahí se alimenta a la parte superior de una torre de granulación (pulverización). El desarrollo de esta torre es uno de los mas importantes en la industria de fertilizantes de la postguerra. En esta torre, la solución concentrada de NH_4NO_3 se lanza desde la parte superior contra una corriente de aire; el aire es suministrado mediante un ventilador situado en el fondo de la torre. Con el aire se enfrían las gotas de forma esférica y se elimina parte de la hume-

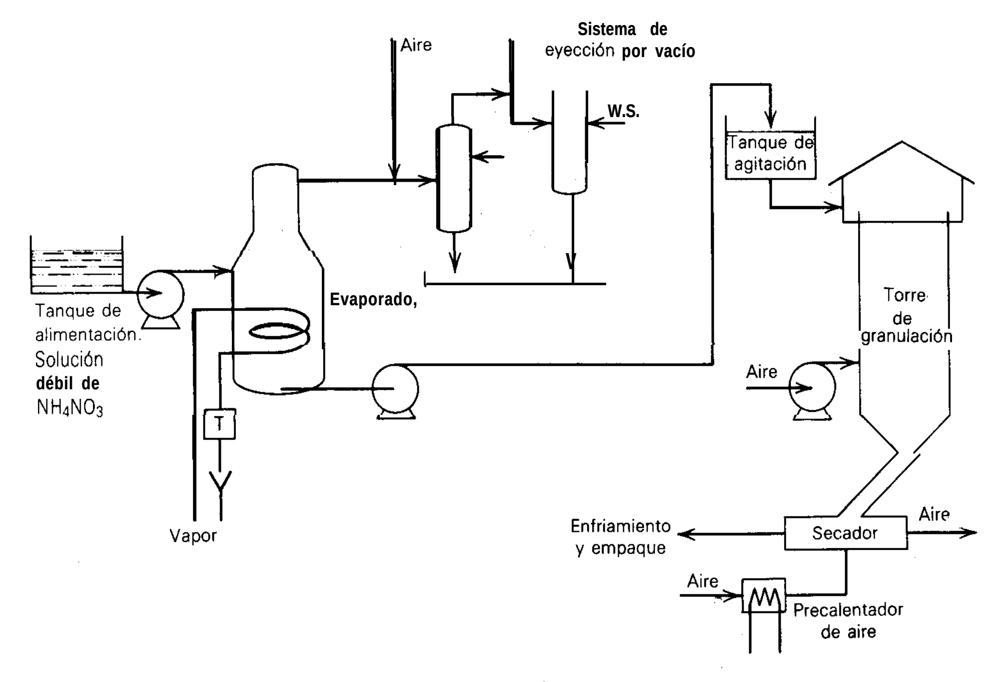


Figura B-l. Planta para granulación de nitrato de amonio.

dad, con lo cual quedan gránulos húmedos. Después, los gránulos se llevan a un secador rotatorio, donde se secan; entonces se enfrfan y se llevan a un mezclador, donde se les añade un agente antiadherente (arcilla o tierra diatomacea) y se empacan para el embarque.

A. Se debe dibujar la instrumentación necesaria para:

1. Controlar el flujo de la solución débil de NH_4NO_3 al evaporador.
2. Controlar el nivel en el evaporador.
3. Controlar la presión en el evaporador, lo cual se puede lograr mediante el control del flujo de aire que va al tubo de salida del evaporador.
4. Controlar el nivel en el tanque de agitación.
5. Controlar la temperatura de los gránulos secos que salen del secador.
6. Controlar la densidad de la solución fuerte que sale del evaporador.

Se debe tener la seguridad de que se ilustran todas las alarmas necesarias y que se especifica la acción de todas las válvulas y controladores.

B. ¿Cómo se puede controlar la razón de producción de esta unidad?

C. Si la producción de esta unidad varía frecuentemente, tal vez también sea conveniente variar el flujo de aire que pasa por la torre de granulación ¿Cómo se puede lograr esto?

D. Uno de los circuitos de difícil ajuste es el de la temperatura de los gránulos secos, por ello se obtuvieron los siguientes datos mediante cambios de + 10% en la salida del controlador de temperatura

Tiempo (min)	Temperatura (°F)
0	200
1	200
3	202
5	208
6.5	214
8.5	218
11.0	220
13.0	222
15.0	221.8
17.0	223.0

El transmisor de temperatura de este circuito tiene un rango de 100 a 300 °F. Se debe ajustar un controlador PI mediante el método de síntesis de un controlador, y un controlador PID mediante el método de IAE mínimo.

Bibliografía

1. The Foxboro Co. Aplication engineering data AEC 288-3, Enero, 1972.

Caso II. Sistema de control para la deshidratación de gas natural

Ahora se considera el proceso que aparece en la figura B-2. El objetivo de este proceso es deshidratar el gas natural que entra al absorbedor, lo cual se logra mediante el empleo de un deshidratante líquido (glicol). El glicol se introduce por la parte superior del absorbedor y fluye hacia abajo, en sentido contrario al gas, a la vez que recoge la humedad del gas. El glicol pasa del absorbedor a un intercambiador de calor y al separador; en el rehervidor, que se encuentra en la base del separador, se extrae la humedad del glicol, la cual se elimina en forma de vapor (de agua). Este vapor sale por la parte superior del separador, se condensa y se utiliza como agua de reflujo, la cual se utiliza para condensar los vapores de glicol que de otra manera saldrían junto con el vapor de agua.

El ingeniero que diseñó el proceso decidió que se debe controlar lo siguiente.

1. El nivel del líquido en el fondo del absorbedor.
2. El reflujo de agua en el separador.
3. La presión en el separador.
4. La temperatura en el tercio superior del separador.

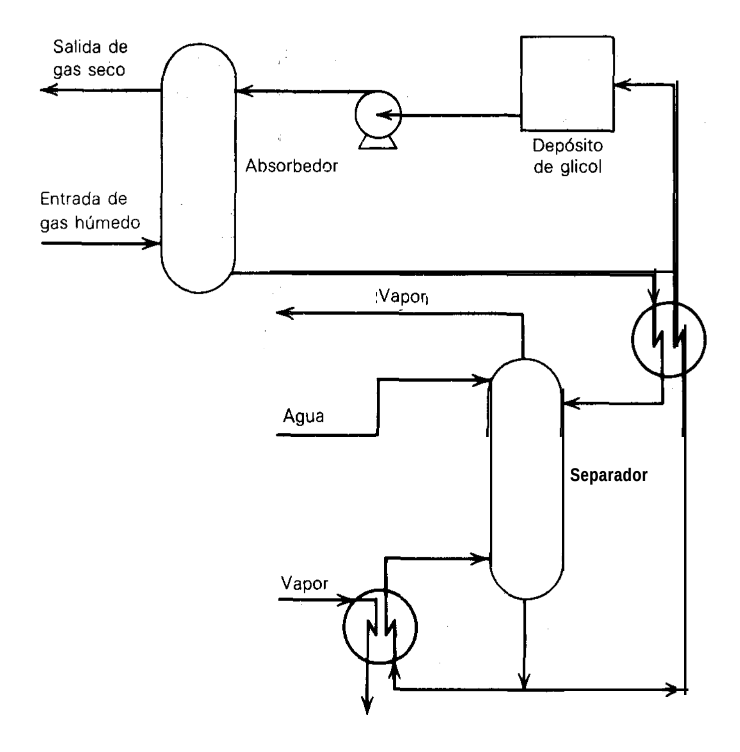


Figura B-Z. Sistema para deshidratación de gas natural.

5. El nivel de líquido en el fondo del separador.
6. La operación eficiente del absorbedor con diferentes cargas de producción.

Dibujar el diagrama de instrumentación completo donde aparezca la instrumentación necesaria para lograr el control que se desea. La instrumentación que se debe emplear es electrónica (4-20 mA), con excepción de las **válvulas.**

Caso III. Sistema de control para la fabricación de blanqueador de hipoclorito de sodio'

El hipoclorito de sodio (NaOCl) se forma por

$$2NaOH + Cl_2 \rightarrow NaOCL + H_2O + NaCl$$

En el diagrama de flujo de la figura B-3 se ilustra el proceso para una manufactura, la cual es de la forma siguiente.

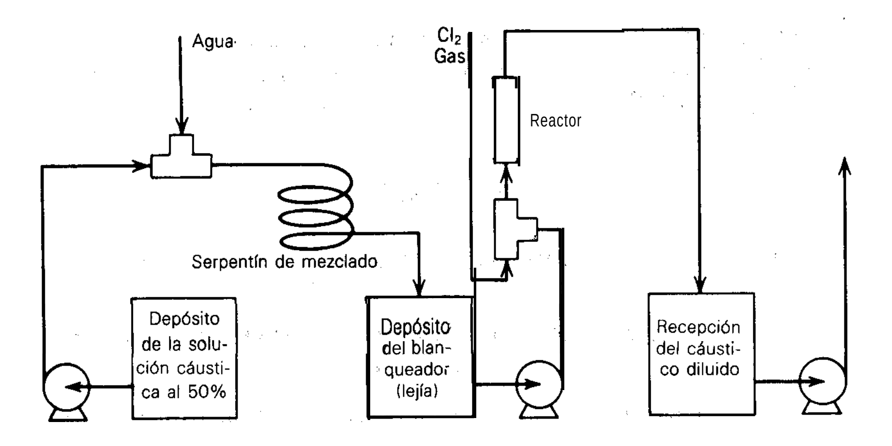


Figura B-3. Proceso para blanqueador de hipoclorito de sodio.

Se prepara constantemente sosa diluida **(NaOH)**, a una concentración fija, mediante dilución en agua. La solución de sosa diluida se almacena en un tanque intermedio, de éste se bombea al reactor de hipoclorito; para la reacción se inyecta cloro en forma de gas en el reactor.

A. Se debe preparar un diagrama detallado de instrumentos para lograr lo siguiente:

1. Controlar el nivel en el tanque de dilución.
2. Controlar el proceso de dilución de la solución cáustica; la concentración de esta corriente se puede medir mediante una celda de conductividad, cuando disminuye la dilución en la solución, aumenta la salida de la celda.
3. Controlar el nivel en el tanque de depósito del blanqueador.
4. Controlar la razón de exceso de $NaOH/Cl_2$ disponible en la corriente que sale del reactor. Esta razón se mide mediante una técnica de POR (potencial de óxido-reducción), cuando la razón se incrementa, también se incrementa la señal POR.

Se debe tener la seguridad de que se muestran todas las alarmas, registros e indicadores necesarios. Toda la instrumentación (con excepción de las **válvulas**) es electrónica (4-20 **mA**). Se debe especificar la acción de las **válvulas** y los controladores y comentar brevemente el diseño.

B. **¿Cómo** se puede fijar la razón de producción de esta unidad?

C. Por razones de seguridad, cuando no hay flujo de solución de sosa diluida del tanque al reactor, también se debe detener el flujo del cloro; se debe diseñar el control para tal fin y explicarlo.

D. Se debe explicar detalladamente, con un ejemplo numérico, cómo se ajustaría el controlador POR mediante el procedimiento de prueba escalón, y de qué manera se ajustaría un controlador PI por medio del método de IAE mínimo.

BIBLIOGRAFÍA

1. The Foxboro Co. Application engineering data, Enero de 1972.

Caso IV. Sistema de control en el proceso de refinación del azúcar

Las unidades de proceso que se muestran en la figura B-4 forman parte del proceso para refinar azúcar. El azúcar cruda se alimenta al proceso a través de un transportador de tornillo y se rocía agua sobre ésta para formar un jarabe, el cual se calienta en el tanque de disolución, de donde fluye al tanque de preparación, en el cual se realiza un mayor calentamiento y la mezcla. Del tanque de preparación el jarabe se envía al tanque de mezclado; conforme el jarabe fluye hacia el tanque de mezclado, se le añade ácido fosfórico y, ya en el tanque, cal. Este tratamiento con ácido, cal y calor tiene dos objetivos: el primero es la clarificación, es decir, con el, tratamiento se coagulan y precipitan el calor de azúcar cruda. Después del tanque de mezclado se continúa el proceso del jarabe.

Se piensa que es importante controlar las siguientes variables.

1. Temperatura en el tanque de disolución.
2. Temperatura en el tanque de preparación.
3. Densidad del jarabe que sale del tanque de preparación.
4. Nivel en el tanque de preparación.
5. Nivel en el tanque de ácido al 50% ; el nivel en el tanque de ácido al 75 % se puede suponer constante.
6. La fuerza del ácido al 50 % ; la fuerza del ácido al 75 % se puede suponer constante.
7. El flujo de jarabe y ácido al 50% que entran al tanque de mezclado.
8. El pH de la solución en el tanque de mezclado.
9. La temperatura en el tanque de mezclado.
10. En el tanque de mezclado se requiere únicamente una alarma de nivel alto.

Los medidores de flujo que se utilizan en el proceso son magnéticos. La unidad de densidad que se utiliza en la industria azucarera es el °Brix, la cual equivale aproximadamente al porcentaje, por peso, de sólidos de azúcar en la solución.

Se deben diseñar los sistemas de control necesarios para controlar todas las variables anteriores. ¿Cómo se controlaría la razón de producción? El diseño se debe comentar brevemente y se debe ilustrar la acción de las válvulas de control y de los controladores, así como las alarmas necesarias.

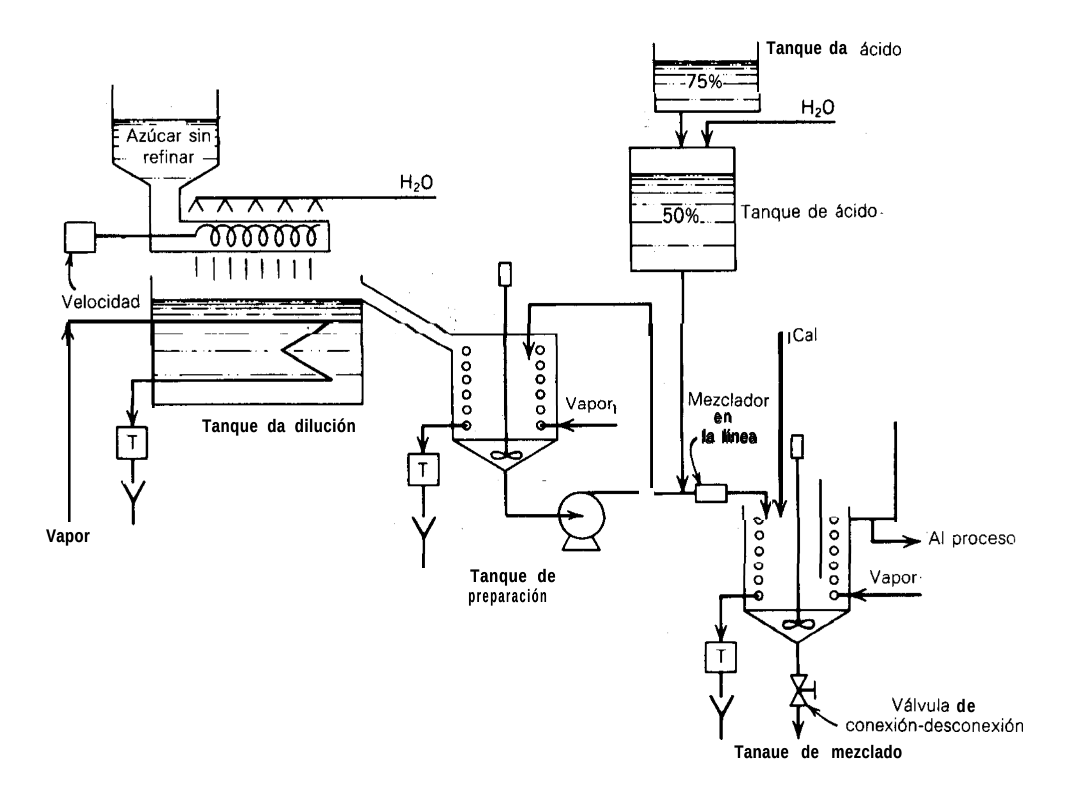


Figura B-4. Proceso para refinación de azúcar.

Caso V. Eliminación de CO_2 de gas de síntesis

Ahora se considera el proceso que se muestra en la figura B-5 para eliminar el CO_2 del gas de síntesis. En la planta se tratan 1646.12 MSCFH de gas que se alimenta. El gas de alimentación se suministra a 1526°F y 223 psig, con la siguiente composición:

	Volumen (%)
Hidrógeno	50.29
Nitrógeno	0.16
Dióxido de carbono	5.60
Monóxido de carbono	9.94
Metano	2.62
Vapor de agua	31.39

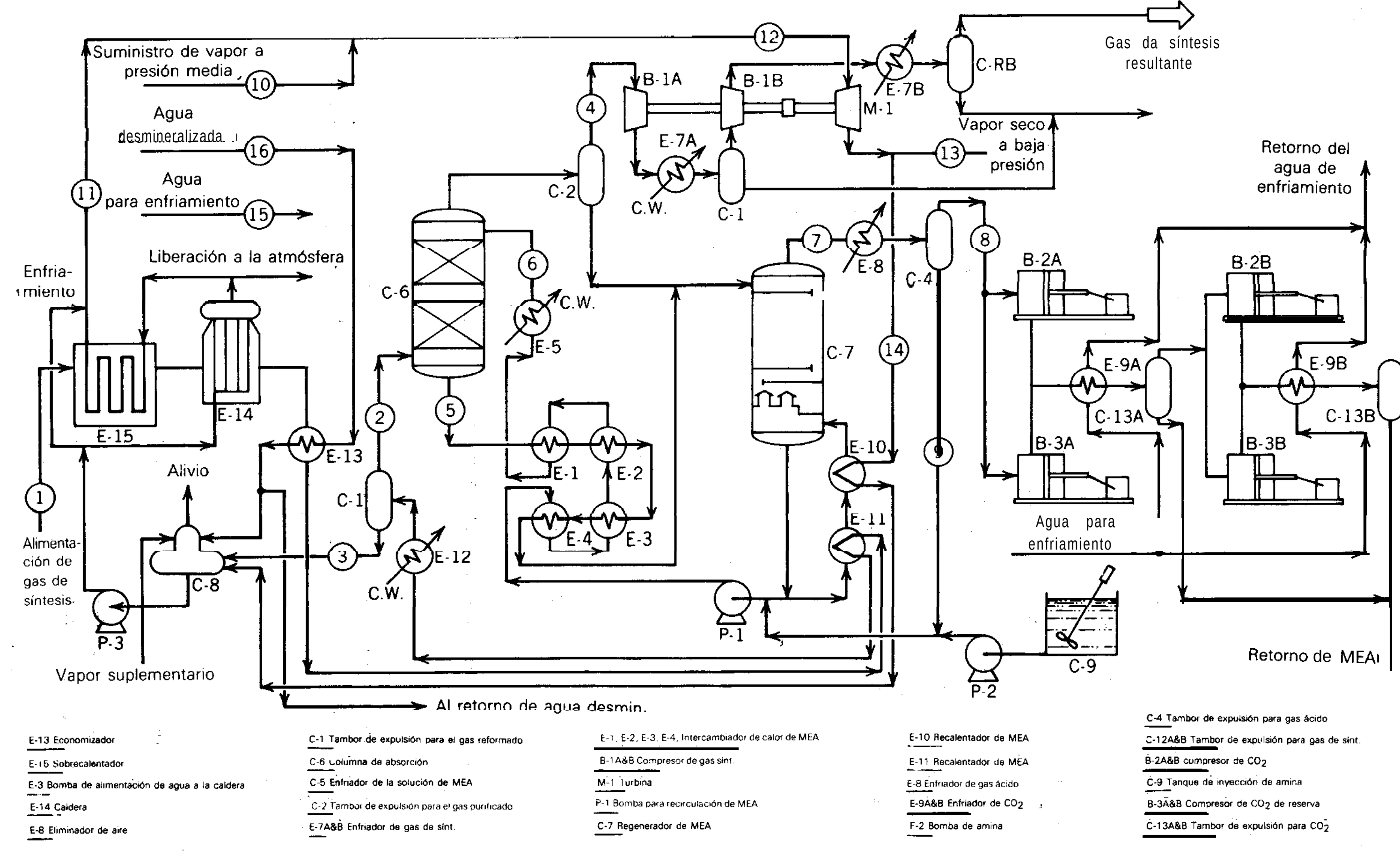


Figura B-5. Proceso para eliminar el CO_2 de gas de síntesis.

Los productos de esta planta deben ser:

1. Gas de síntesis a 115°F y 600 psig con una composición volumétrica máxima de 50 ppm de CO.
2. CO_2 a 115°F y 325 psig.

El proceso es el siguiente: el gas de alimentación se introduce en la planta a 1526 °F y 223 psig; para eliminar el CO_2 el gas se debe enfriar a 105 °F antes de entrar al absorbedor. El enfriamiento se hace en cuatro etapas: primera, el gas de alimentación se pasa a través de un supercalentador (E-15) y una caldera (E-14), y con el calor que se le extrae se produce una presión media de vapor de 27,320 lb/h. Segunda, el gas de alimentación se pasa a través de un economizador (E-24) y se calienta el agua desmineralizada antes de la aireación. Tercera, el gas de alimentación se pasa a través de un rehervidor (E-ll), en el cual el gas proporciona el 84 % del rendimiento del rehervidor en operación completa. Finalmente, en el intercambiador de calor (E-12), el gas de alimentación se enfría con el agua de enfriamiento de la planta. Mediante estas cuatro etapas se recupera 75% de los Btu extraídos del gas para las necesidades de calentamiento del proceso.

Los gases ya fríos entran a contracorriente al absorbedor (C-6), donde se separa el CO_2 del gas con etanolamina (MEA). Los gases restantes se comprimen en una compresión centrífuga de dos etapas (B-1A y B); el compresor se acciona mediante una turbina de vapor (M-l). Después del enfriamiento de los gases entre etapas, y a la salida (E-7A y B) se utilizan tambores de expulsión (C-12A y B) para separar cualquier condensación.

El compresor opera con vapor a presión media, del cual el 68 % se obtiene de la caldera alimentada por el gas. Noventa y tres por ciento del vapor de baja presión queda disponible para su utilización en la planta, y el 7 % restante se utiliza para calentar uno de los rehervidores (E-10) de la columna de regeneración (C-7).

El CO_2 se lleva junto con la MEA al regenerador (C-7), donde se separa de la MEA. El regenerador se opera a baja presión y alta temperatura, con lo cual se provoca que el CO_2 se libere junto con el agua en forma de vapor y salga por la parte superior de la torre, mientras que la MEA recircula (P-l) nuevamente al absorbedor. Antes de que la MEA entre a la parte superior del absorbedor, se pasa por cuatro intercambiadores de calor (E-l, E-2, E-3 y E-4) donde se intercambia en forma cruzada con los sedimentos del absorbedor, mediante lo cual se recuperan 8.8 MM Btu/h; de los intercambiadores, la MEA pasa a través de otro enfriador (E-5) y, finalmente, se introduce al absorbedor.

Los gases de CO_2 que salen del regenerador se comprimen en un compresor de dos etapas (B-2 y 3) accionado mediante motores eléctricos. Los enfriadores entre cada etapa y el de salida (E-9A y B) se proveen con tambores de expulsión (C-13A y B).

En la tabla B-l se tienen las condiciones de las corrientes que aparecen con número en el diagrama de flujo.

El ingeniero de proceso piensa que se deben controlar las siguientes variables:

1. Temperatura del vapor sobrecalentado' que sale de E-15.
2. Presión del vapor sobrecalentado que se produce en E-14/E-15.
3. Nivel en la caldera.

Tabla El

Corriente	1	2	3	4	5	6	7	6
Componente	Gas de **alimentación**	**Alimentación** al absorbedor	Gas del tambor de **expulsión**	Gas de **sínt.** al compresor	Sedimentos del absorbedor	Retorno de MEA	Parte superior del separador	CO_2 al compresor
H,, MSCFH	676.91	676.91		676.34	0.57		0.57	0.57
N,, MSCFH	2.22	2.22		2.22				
CO,, MSCFH	75.36	75.36		0.04	118.36	43.02	75.32	75.32
CO, MSCFH	133.80	133.80		133.74	0.06		0.06	0.06
CH,, MSCFH	35.33	35.33		35.30	0.03		0.03	0.03
H_2O, gpm			31.19					
H_2O vaplvapagua MSCFH	422.50	4.61		3.68				
Solución MEA, MSCFH					274.50	274.50	129.93	4.64
Masa total del flujo, Iblh	43809.05	24041 .OO	15593.00	15261 .00	147034.00	138254.00	13594.00	6919.00
Temperatura, °F	1526	105	105	100	160	100	217	106
Presión, psig.	223	207	207	205	207	206	II	5

Tabla B-l (*Continuación*)

Componente / Corriente	9	10	11	12	13	14	15	16
	Sedimentos de/ tambor de **expulsión** del separador	Vapor a presión media	Vapor a **presión** media de la caldera	Vapora **presión** media hacia la turbina	Vapor a baja **pres.**	Vapor a baja pres.	Agua de enfriamiento	Agua **desmin.**
H_2, MSCFH								
N_2, MSCFH								
CO,, MSCFH								
CO, MSCFH								
CH_4, MSCFH								
H_2O, gpm	9.35						4513.00	55.74
H_2O vaplvapagua, MSCFH								
Solución MEA, MSCFH								
Masa total del flujo, Iblh	4675.00	12719.00	27320.00	40039.00	32747.00	7292.00	22565.00	27868.00
Temperatura, °F	106	600	600	600	3780	370	86	60
Presión, psig	5	400	400	400	75	75	28	100

4. Presión en el eliminador de aire.
5. Nivel en el eliminador de aire.
6. Flujo de vapor de ajuste a baja presión para el eliminador de aire.
7. Temperatura del gas de alimentación que sale de E-13 y pasa al rehervidor E-l 1.
8. Temperatura del gas de alimentación en el absorbedor C-6.
9. Flujo de MEA al absorbedor C-6.
10. Temperatura en el tercio inferior de C-6.
11. Nivel en el regenerador C-7.
12. Temperatura en el fondo del regenerador C-7.
13. Temperatura de los gases de CO_2 que salen de E-8.
14. Presión en el **área** del regenerador.
15. Temperatura del gas de síntesis entre las dos etapas del compresor y la temperatura de salida.
16. Presión del gas de síntesis que sale del compresor B-l.
17. Temperatura entre las etapas y a la salida de los gases de CO_2 cuando pasan a través del compresor B-2.
18. Nivel en *todos* los tambores de expulsión.

Probablemente éstos no son todos los circuitos de control que se necesitan para una operación uniforme, sin embargo, son los primeros que propone el ingeniero de proceso; el lector puede proponer además los suyos.

(a) El lector debe diseñar los circuitos de control anteriores y además los que crea necesarios. Se debe especificar la acción de las válvulas y los controladores.
(b) Se deben especificar las **válvulas** de retención y de bloqueo necesarias, así como las alarmas e indicadores de proceso que se estimen necesarios.

Caso VI. Proceso del ácido sulfúrico

En la figura B-6 se ilustra el diagrama de flujo simplificado para la manufactura de ácido sulfúrico (H_2SO_4).

El azufre se carga en un tanque de fundición donde se mantiene en estado líquido; de ahí pasa a un quemador, donde reacciona con el oxígeno del aire y se produce SO_2 mediante la siguiente reacción:

$$S_{(l)} + O_{2(g)} \rightarrow SO_{2(g)}$$

Del quemador, los gases pasan a través de una caldera de valor residual, donde se produce vapor mediante la recuperación del calor de la reacción anterior. De la caldera, los gases pasan a través de un convertidor catalítico de cuatro etapas (reactor), en el cual tiene lugar la siguiente reacción:

$$SO_{2(g)} + 1/2\ O_{2(g)} \rightleftarrows SO_{3(g)}$$

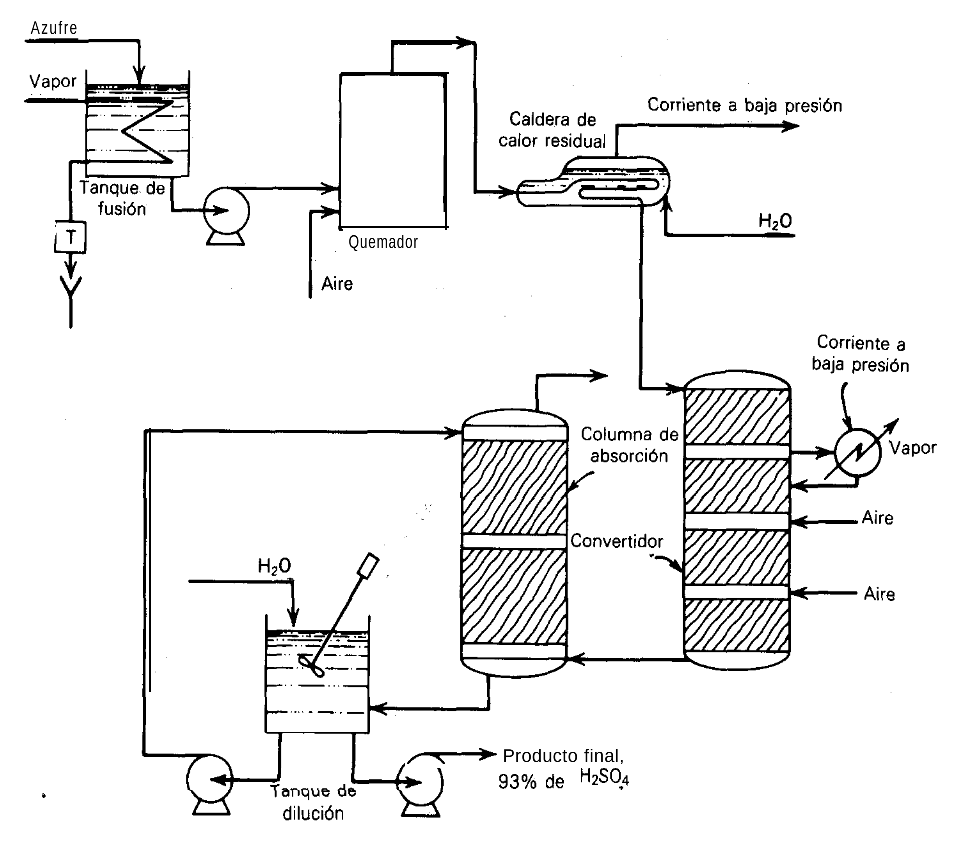


Figura B-6. Proceso para producir ácido sulfúrico.

Del convertidor, los gases se envían a una columna de absorción, donde los gases de SO_3 se absorben con H_2SO_4 diluido (93%); el agua del H_2SO_4 reacciona con el SO_3 y se produce H_2SO_4:

$$H_2O_{(l)} + SO_{3(g)} \rightarrow H_2SO_{4(l)}$$

El líquido que sale del absorbedor, H_2SO_4 concentrado **(98%)**, pasa a un tanque de circulación, donde se diluye de nuevo al 93% con H_2O. Parte del líquido de este tanque se utiliza entonces como medio de absorción en el absorbedor.

A. Se piensa que es importante controlar las siguientes variables.

1. Nivel en el tanque de **fundición**.
2. Temperatura del azufre en el tanque de fundición.

3. Aire que entra al quemador.
4. Nivel de agua en la caldera de calor residual.
5. Concentración de SO_3 en el gas que sale del absorbedor.
6. Concentración de H_2SO_4 en el tanque de disolución.
7. Nivel en el tanque de disolución.
8. Temperatura de los gases que entran a la primera etapa del convertidor.

Se deben diseñar los sistemas de control necesarios para lograr lo anterior y tener la seguridad de que se muestra toda la instrumentación con la especificación de la acción de las válvulas y los controladores. El diseño se debe comentar brevemente.

B. ¿Cómo se podría fijar la razón de producción en esta planta?

APÉNDICE C

Sensores, transmisores y válvulas de control

En este apéndice se presenta parte del equipo físico necesario en la construcción de sistemas de control, y se relaciona estrechamente con el capítulo 5. Se examinan algunos de los sensores más comunes -de presión, de flujo, de nivel y de temperatura-, así como dos tipos diferentes de transmisores; uno neumático y otro electrónico. Al final del apéndice se presentan los diferentes tipos de válvulas de control y consideraciones adicionales para el dimensionamiento de las mismas.

SENSORES DE PRESIÓN[1,2,3,4]

El sensor de presión más común es el ***tubo*** de ***Bourdon***, desarrollado por el ingeniero francés Eugene Bourdon, y el cual se ilustra en la figura C-l; consiste básicamente en un tramo de tubo en forma de herradura, con un extremo sellado y el otro conectado a la fuente de presión. Debido a que la sección transversal del tubo es elíptica o plana, al aplicar una presión el tubo tiende a enderezarse, y al quitarla, el tubo retorna a su forma original, siempre y cuando no se rebase el limite de elasticidad del material del tubo. La cantidad de enderezamiento que sufre el tubo es proporcional a la presión que se aplica, y como el extremo abierto del tubo esta fijo, entonces el extremo cerrado se puede conectar a un indicador, para señalar la presión; o a un transmisor, para generar una señal neumática 0 eléctrica.

El rango de presión que se puede medir con el tubo de Bourdon depende del espesor de las paredes y del material con que se fabrica el tubo. Posteriormente se desarrolló una versión extendida del tubo de Bourdon en forma de helicoide para dar más movimiento al extremo sellado; este elemento se denomina ***hélice*** y se ilustra en la figura C-2. Con la hélice se pueden manejar rangos de presión de aproximadamente 10: 1, con una exacti-

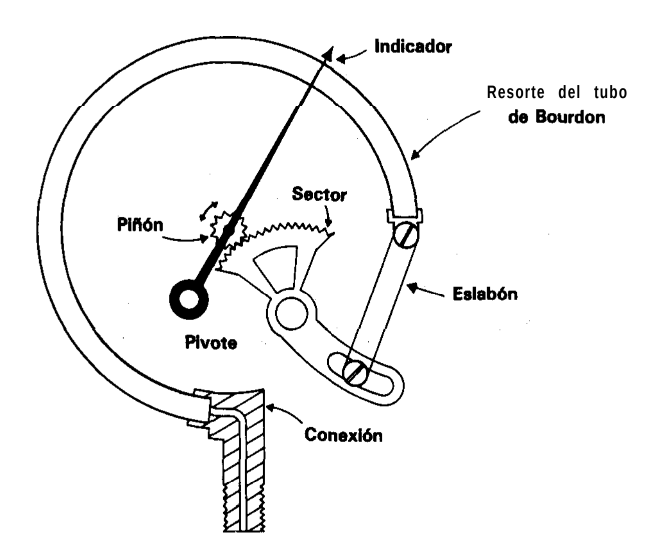


Figura C-l. Tubo de Bourdon sencillo (cortesfa de la Instrument Society of America).

tud de ± 1% de la escala calibrada('). Otro tipo común de tubo de Bourdon es el elemento ***espiral*** que se muestra en las figuras C-2*d* y C-3.

Otro tipo de sensor de presión es el de ***fuelle***, el cual se ilustra en las figuras C-2*c* y C-4, el cual semeja una cápsula corrugada hecha de algún material elástico, por ejemplo, acero inoxidable o latón; al aumentar la presión, el fuelle se expande (o se contrae),

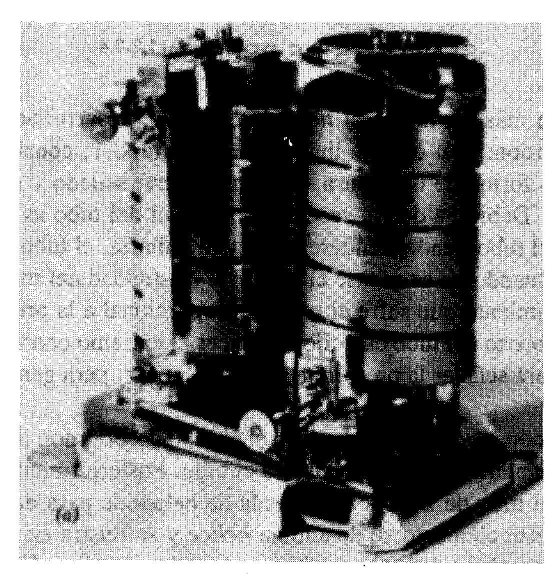


Figura C-2.

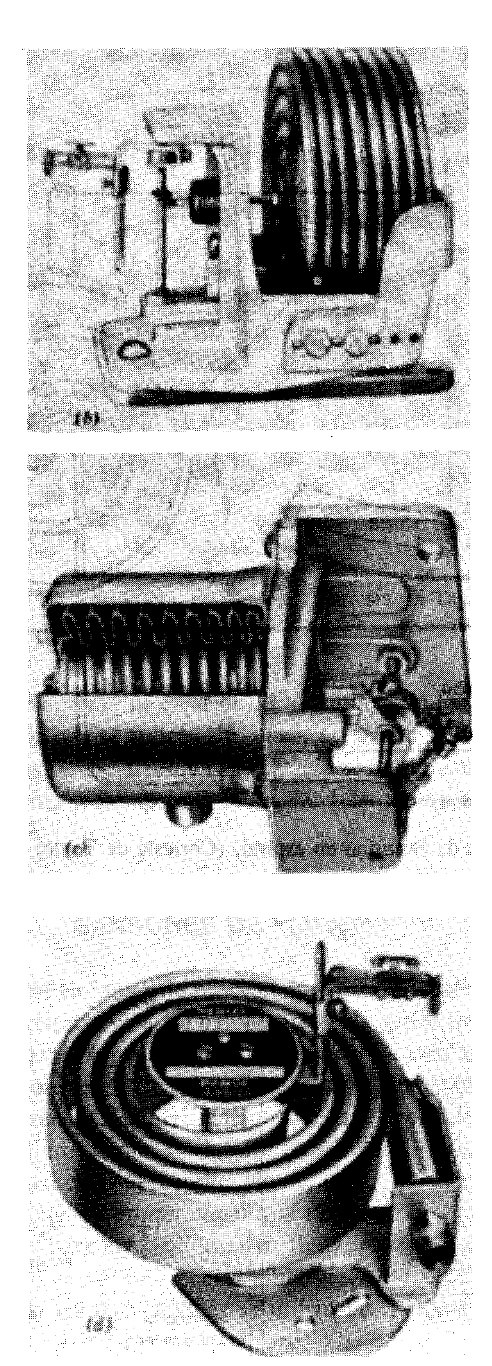


Figura C-2. Tipos de tubo de Bourdon. (Cortesía de la **Foxboro** Co.) ***a)*** Helicoidal, ***b)*** de diafragma, c) de fuelle, ***d)*** espiral.

Tubo de Bourdon

Bulbo

Capilar

Figura C-3. Tubo de Bourdon en espiral. (Cortesía de Taylor Instrument Co.).

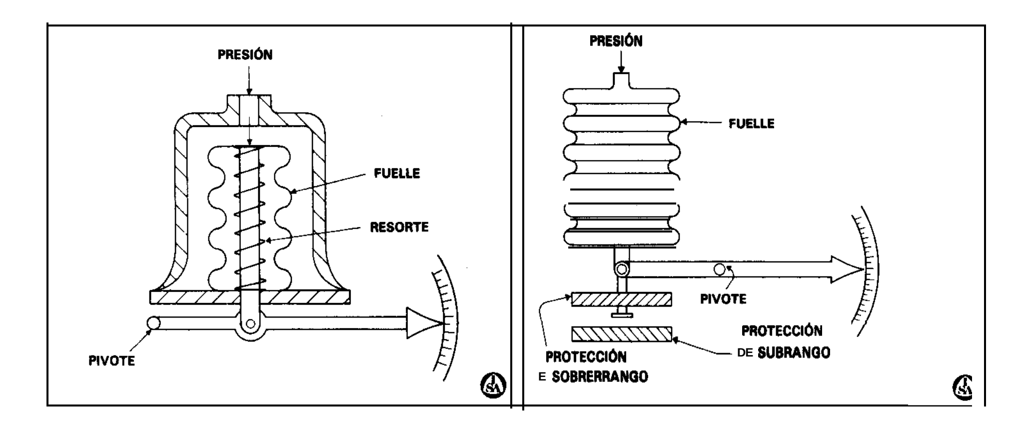


Figura C-4. Sensor de presión con fuelle. (Cortesía de la Instrument Society of America.)

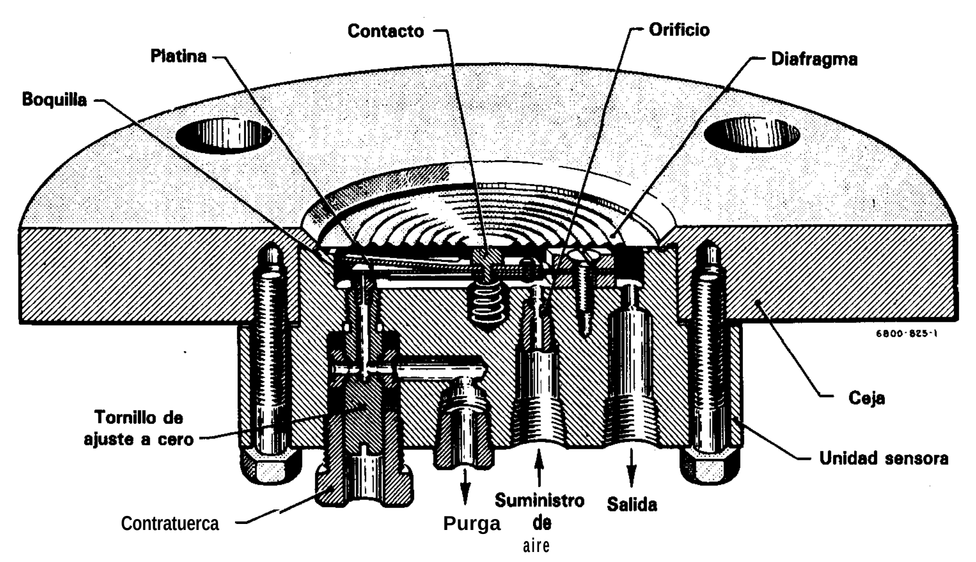


Figura C-5. Sensor de presión con diafragma. (Cortesía de Taylor Instrument Co.).

y cuando disminuye, se contrae (o expande). La cantidad de expansión o contracción es proporcional a la presión que se aplica. Un sensor semejante al de fuelle es el de diafragma que se muestra en las figuras C-2b y C-5; cuando se incrementa la presión en el proceso, el centro del diagrama se comprime; la cantidad de movimiento es proporcional a la presión que se aplica.

SENSORES DE FLUJO[2,4,5,6,7]

El flujo es una de las dos variables de proceso que se miden más frecuentemente, la otra es la temperatura; en consecuencia, se han desarrollado muchos tipos de sensores de flujo. En esta sección se tratan los más utilizados y se mencionan algunos otros; en la tabla C-1[(6)] aparecen varias características de algunos de los sensores comunes.

Probablemente el sensor de flujo más popular es el medidor de *orificio*, que es un disco plano con un agujero, como se muestra en la figura C-6. El disco se inserta en la línea de proceso, perpendicular al movimiento del fluido, con objeto de producir una caída de presión, ΔP, la cual es proporcional a la razón de flujo volumétrico a través del orificio. Las ecuaciones para los medidores de flujo de orificio de precisión son complejas, y se presentan en diversas referencias bibliográficas[(8,9,10)]; sin embargo, probablemente en la mayoría de las instalaciones se utiliza la siguiente ecuación simple:

$$q = C\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} \qquad \text{(C-1)}$$

Tabla C-l. Características de los **sensores** de flujo típicos.

Elemento primario	*Tipo de fluido*	***Pérdida** de **presión**[a]*	*Ajuste en rango del flujo*	*Error*	***Tubería** corriente arriba*	*Efecto de la viscosidad*	*costo*	*Tipo de lectura*
Orificio concéntrico	Líquido, gas y vapor	**50-90%**	**3:1**	**¾%**	1**0-30D**	Alto	Bajo	Raíz cuadrada
Orificio de segmento	Líquido con sólidos (suspensiones)	**60-100%**	**3:1**	**2½%**	1**0-30D**	Alto	Bajo	Raíz cuadrada
Orificio excéntrico	**Combinación** de líquido-gas	**60-100%**	**3:1**	2%	1**0-30D**	Alto	Bajo	Raíz cuadrada
Orificio con filo de cuadrante	Líquidos viscosos	**45-85%**	**3:1**	1%	20-500	Bajo	Medio	Raíz cuadrada
Segmento de cuña	Suspensiones y líquidos viscosos	**30-80%**	**3:1**	1%	**10-30%**	Bajo	Alto	Raíz cuadrada
Tubo de Venturi	Líquido y **gas**	1 o-20%	**3:1**	1%	**5-10D**	Muy alto	Muy alto	Raíz cuadrada
Tubo **Dall**	Líquidos	**5-10%**	**3:1**	1%	**5-10D**	Alto	Alto	Raíz cuadrada
Boquilla de flujo	Líquido, gas y vapor	**30-70%**	**3:1**	**1½%**	1**0-30D**	Alto	**Medio**	Raíz cuadrada
Medidor de codo	Líquido	Ninguna	**3:1**	1%	**30D**	Despreciable	**Medio**	Raíz cuadrada

Rotámetro	Todos los fluidos	1-200''WG	10:1	2 %	Ninguna	Medio	Medio	Lineal
Barrera con muesca V	Líquidos	Ninguna	30:1	4 %	Ninguna	Despreciable	Medio	5/2
Barrera trapezoidal	Líquidos	Ninguna	10:1	4 %	Ninguna	Despreciable	Medio	3/2
Garganta de Parshal	Liquido con sólidos (suspensiones)	Ninguna	10:1	3 %	Ninguna	Despreciable	Alto	3/2
Medidor magnético de flujo	Líquido con sólidos (suspensiones)	Ninguna	30:1	1%	Ninguna	Ninguna	Alto	Lineal
Medidor de turbina	Líquidos puros'	0-7 psi	14:1	½ %	5-10D	Alto	Alto	Lineal
Tubo Pitot	Líquidos	Ninguna	3:1	1%	20-30D	Bajo	Bajo	Raíz cuadrada
Venturi de Pitot	Líquidos y gases	Ninguna	3:1	1%	20-30D	Alto	Bajo	Raíz cuadrada
Desplazamiento positivo	Líquidos	0-15 psi	10:1	½-2%	Ninguna	Ninguna	Alto	Totalización lineal
Medidor de remolino	Gases	0-2 psi	10:1 o 100:1	1 %	10D	Ninguna	Alto	Lineal
Medidor de vórtice	Líquidos y gases	0-5''WF	30:1 o 100:1	¼ %	15-30D	Reynolds No. 10,000, mínimo	Alto	Lineal
Ultrasónico	Líquidos	Ninguna			Ninguna	Ninguna	Alto	Lineal

[a] Los porcentajes de pérdida de presión se establecen como un porcentaje del diferencial de presión que se produce.

[b] La tubería corriente arriba se establece con base en la cantidad de diámetro de la tubería recta que se requiere antes del elemento primario.

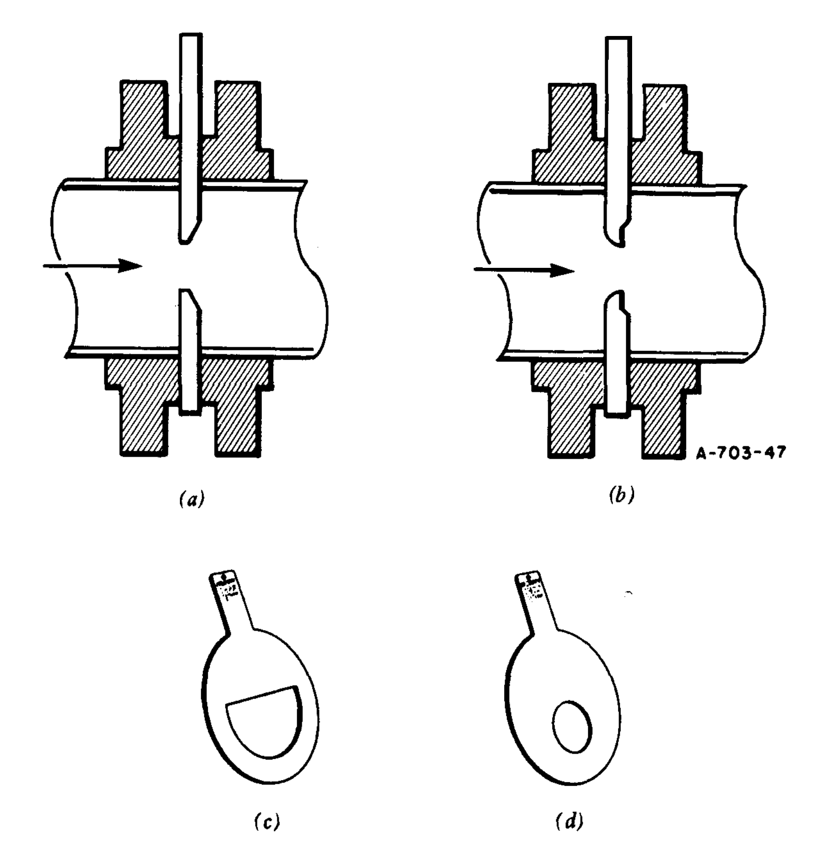


Figura C-6. Esquemas del medidor de orificio: *a*) Filo agudo, *b*) filo de cuadrante (cortesía de Taylor Instrument Co.); c) de segmento, c) excéntrico (cortesía de Foxboro Co.).

donde:

q = razón de flujo
ΔP = caída de presión a través del orificio
C = coeficiente del orificio
ρ = densidad del fluido

En las referencias bibliográficas también se indica cómo calcular el diámetro del orificio que se requiere, el cual generalmente varía entre el 10 y el 75% del diámetro del tubo.

Generalmente, la caída de presión a través del orificio se mide con:

1. Espítas laterales, figura C-7, las cuales son las más comunes. La técnica consiste en medir la caída de presión en las cejas con que se sostiene al orificio en la línea de proceso.

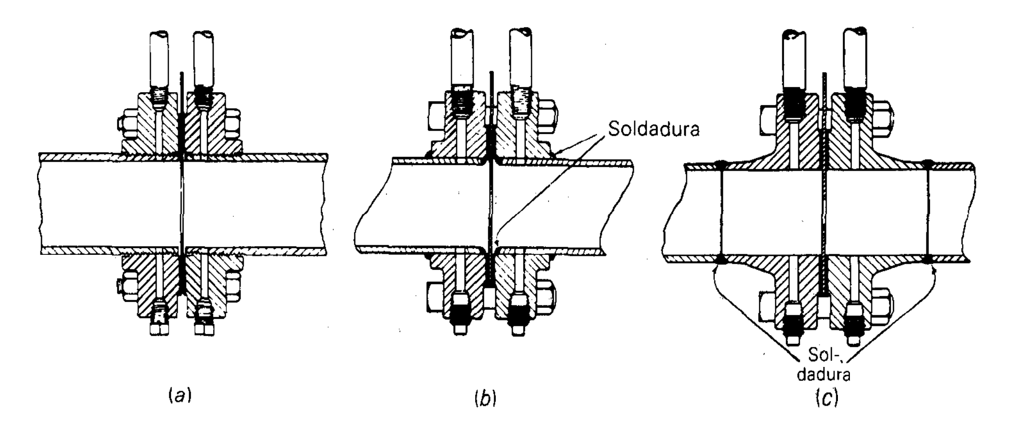
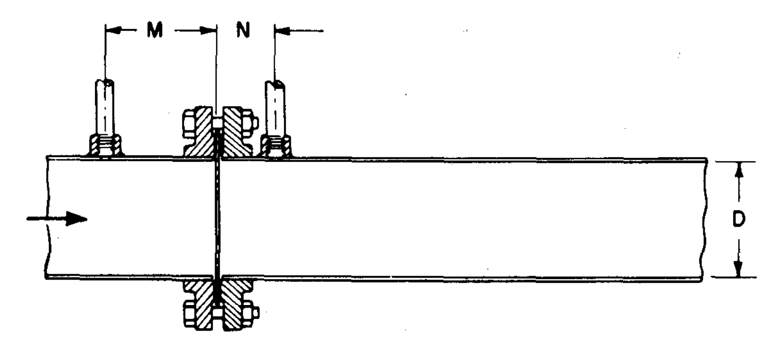


Figura C-7. Espitas laterales: *a*) unión de rosca, *b*) unión deslizable, c) unión soldada. (Cortesía de la **Foxboro** Co.)



Dimensión *M*: se toma entre ½ y 2 **diámetros** de la tuberfa de corriente ascendente, frente a la placa de orificio.

Razón entre el **diámetro** del orificio y el de la tubería	Ubicación de la espita de **presión** corriente abajo (*N*) **(Diámetros** de la **tubería)**		
	Mínimo	*Medio*	*Máximo*
0.2	0.31	0.85	1.30
0.3	0.44	0.80	1.15
0.4	0.47	0.73	1.00
0.5	0.47	0.66	0.84
0.6	0.42	0.57	0.70
0.7	0.35	0.45	0.55
0.8	0.25	0.33	0.41

Figura C-8. Espitas de vena contracta. (Cortesía de **Foxboro** Co.)

2. Espítas de vena contracta, figura C-8; se indica la caída de presión más grande.
3. Otros tipos en los que se incluyen espítas radiales, angulares y de línea; éstos no son tan populares como los dos anteriores.

La que se coloca antes del orificio se conoce como espíta de alta presión, y la que se coloca después del orificio se denomina espíta de baja presión. En la mayor parte de las espítas el diámetro varía entre ¼ y ¾ de pulg. La caída de presión que se mide es función de la ubicación de la espita y de la razón de flujo.

Se deben enfatizar varios puntos acerca de la utilización de los medidores de orificio para medir flujos; el primero es que la señal que sale de la combinación **orificio/transmisor** es la caída de presión a través del orificio, ***no*** el flujo. Para medir la caída de presión a través del orificio se utiliza un sensor diferencial de presión, figura C-9. En la ecuación C-l se observa que la caída de presión se relaciona con el cuadrado del flujo, o

$$\mathbf{AP} = \left(\frac{\rho}{C^2}\right) q^2 \qquad \text{(C-2)}$$

En consecuencia, si se desea el flujo, entonces se debe obtener la raíz cuadrada de la caída de presión; en el capítulo 8 se presenta la instrumentación necesaria para hacer lo anterior, sin embargo, varios fabricantes ofrecen la opción de instalar una unidad de extracción de raíz cuadrada junto con el transmisor y, en este caso, la señal que sale del transmisor se relaciona de manera lineal con el flujo **volumétrico.** Un punto en el que se debe hacer énfasis es que no toda la caída de presión que se mide es perdida por el fluido en proceso, sino que una cierta cantidad la recupera el fluido en los siguientes tramos de la tubería,

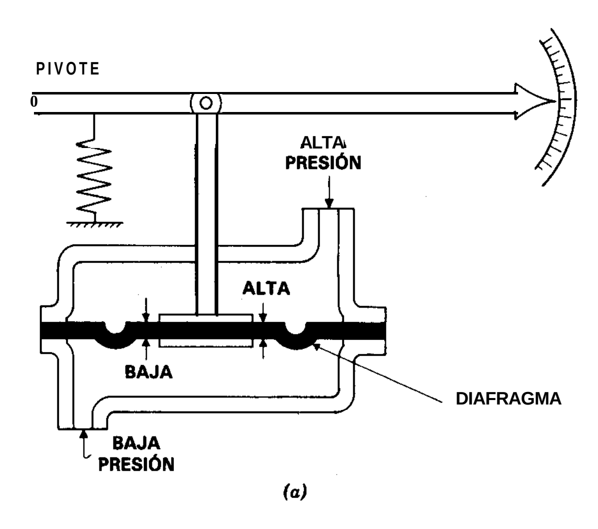


Figura C-9. Sensor y transmisor de diferencial de presión. *a*) (Cortesía de la Instnunent Society of America.)

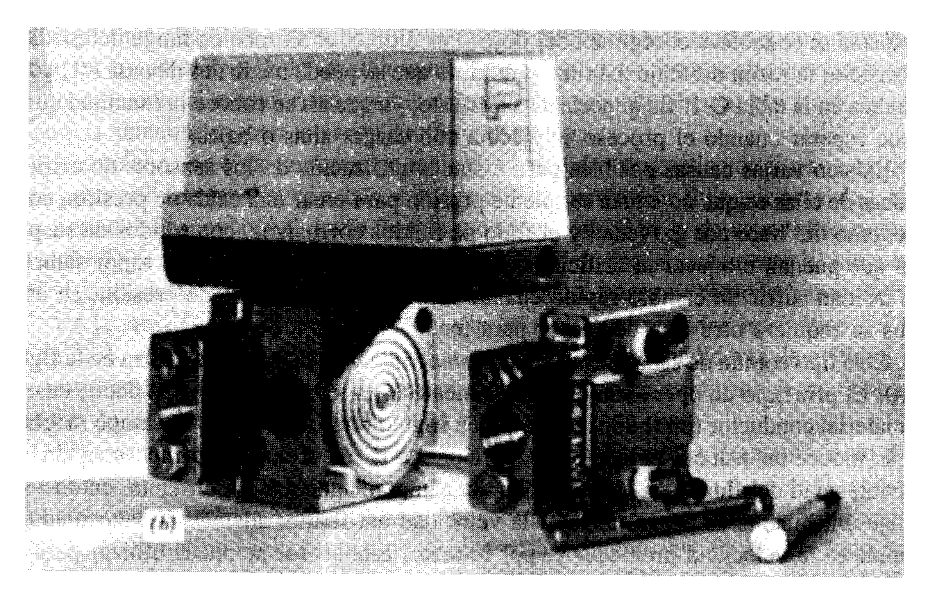


Figura C-9. ‘(Continuación) b) **(Cortesía** de Fisher & Porter.)

Figura C-9. (*Continuación*) c) (Cortesía de Rosemount, Inc.)

conforme se restablece el régimen del flujo. Por último, el alcance en rango del medidor de orificio, la razón del flujo máximo y mínimo que se puede medir, es de casi 3: 1, como se indica en la tabla C-l. Es importante saber esto, ya que así se conoce la exactitud que se puede esperar cuando el proceso se ejecuta con cargas altas o bajas.

Existen varias causas posibles para evitar la utilización de los sensores de orificio, algunas de ellas es que no exista suficiente presión para crear una caída de presión, como en el caso del flujo por gravedad y el flujo de fluidos corrosivos, con sólidos en suspensión que puedan bloquear el orificio, o fluidos cercanos a la presión de vapor saturado que puedan sufrir un cambio rápido cuando se sujetan a una caída de presión, en estos casos se requiere otro tipo de sensor para medir el flujo.

Otro tipo común de sensor es el *medidor magnético de flujo* que se ilustra en la figura C-10. El principio de operación de este elemento es la ley de Faraday; es decir, cuando un material conductor (un fluido) se mueve en ángulo recto a través de un campo magnético, se induce un voltaje, el cual es proporcional a la intensidad del campo magnético y a la velocidad del fluido. Si la intensidad del campo magnético es constante, entonces el voltaje únicamente es proporcional a la velocidad del fluido; además, la velocidad que se mide es la velocidad promedio y, por lo tanto, este sensor se puede utilizar para los

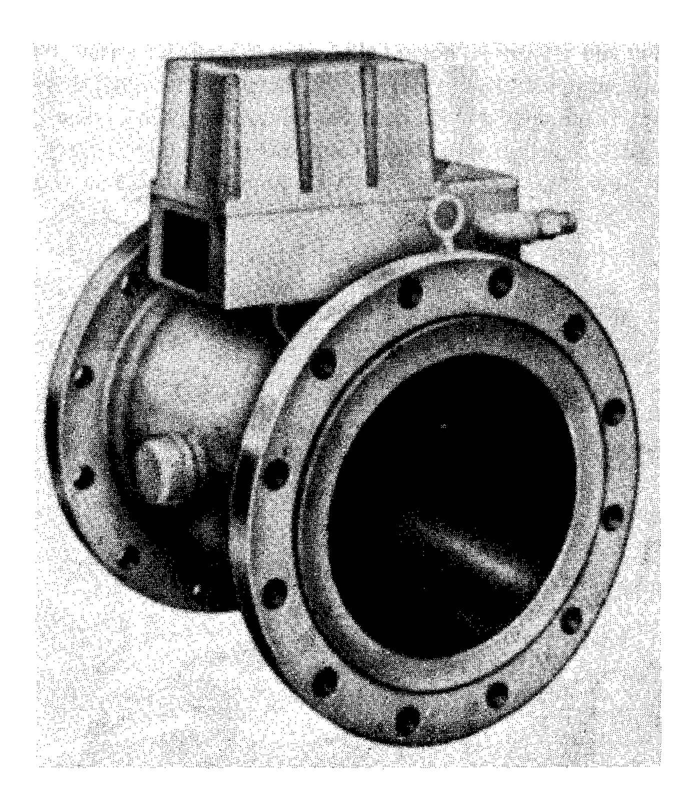


Figura C-10. Medidor magnético de flujo. (Cortesia de Fisher & Porter.)

dos regímenes: laminar y turbulento. Para la calibración de este medidor de flujo se debe tomar en cuenta el área de la sección transversal del tubo, de manera que con la electrónica que se asocia al medidor sea posible calcular el flujo volumétrico; por tanto, la salida se asocia linealmente con la razón de flujo volumétrico.

Puesto que con él no se restringe el flujo, el medidor magnético de flujo es un dispositivo con caída de presión cero que se puede utilizar para medir flujo por gravedad, flujos con variaciones rápidas y flujo de fluidos próximos a su presión de vapor. Sin embargo, en el fluido se debe tener un mínimo de conductividad de aproximadamente 10 μohm/cm^2, por lo cual el medidor no es apropiado para medir ni gases ni hidrocarburos líquidos.

En la tabla C-l se observa que el ajuste en rango del medidor magnético del flujo es de 30: 1, el cual es significativamente mayor que el de los medidores de orificio, pero su costo también es mayor. La diferencia en costo aumenta conforme se incrementa el tamaño de la tubería que se utiliza en el proceso.

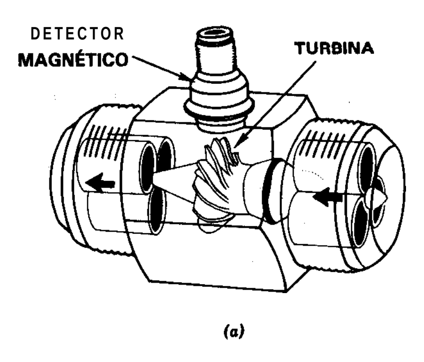
Finalmente, una consideración importante en la aplicación y mantenimiento de los medidores magnéticos de flujo es el recubrimiento de los electrodos, el cual representa otra resistencia eléctrica, de lo que resultan lecturas erróneas; los fabricantes ofrecen técnicas tales como los limitadores ultrasónicos para mantener los electrodos limpios.

Otro medidor de flujo importante es el ***medidor de turbina*** que se ilustra en la figura C-l 1. Es uno de los más precisos de que se dispone comercialmente. Su principio de funcionamiento se basa en un rotor que se hace girar con el flujo del líquido; la rotación de las aspas se detecta mediante una bobina de colección magnética, la cual emite pulsos a una frecuencia que es proporcional a la razón de flujo volumétrico; este pulso se convierte en una señal equivalente de 4-20 mA, de manera que se pueda utilizar con instrumentación electrónica estándar, el convertidor o transductor es generalmente parte integral del medidor. Uno de los problemas que más comúnmente se asocia con los medidores de turbina es el de los cojinetes (rodamientos), por lo que se requiere que los lfquidos sean limpios y con algunas propiedades lubricantes.

Hasta aquí se estudiaron tres de los medidores de flujo que se utilizan más comúnmente en la industria de proceso, aunque existen muchos otros tipos, que van desde el rotómetro, toberas de flujo, tubos de venturi, tubos pitot y anubares, los cuales se han utilizado durante muchos años, hasta los desarrollados más recientemente, como son los medidores de vórtice, los ultrasónicos y los medidores de remolino. Por falta de espacio no se tratan estos medidores, pero si desea estudiarlos, se remite al lector a las abundantes referencias bibliográficas que aparecen al principio de esta sección.

SENSORES DE NIVEL[2,5,6,11]

Los tres medidores de nivel más importantes son el de diferencial de presión, el de flotador y el de burbujeo. El método de ***diferencial de presión*** consiste en detectar la diferencia de presión entre la presión en el fondo del líquido y en la parte superior del líquido, la cual es ocasionada por el peso que origina el nivel del líquido. Este sensor se ilustra en la figura C-12. El extremo con que se detecta la presión en el fondo del líquido se conoce como extremo de alta presión, y el que se utiliza para detectar la presión en la parte supe-



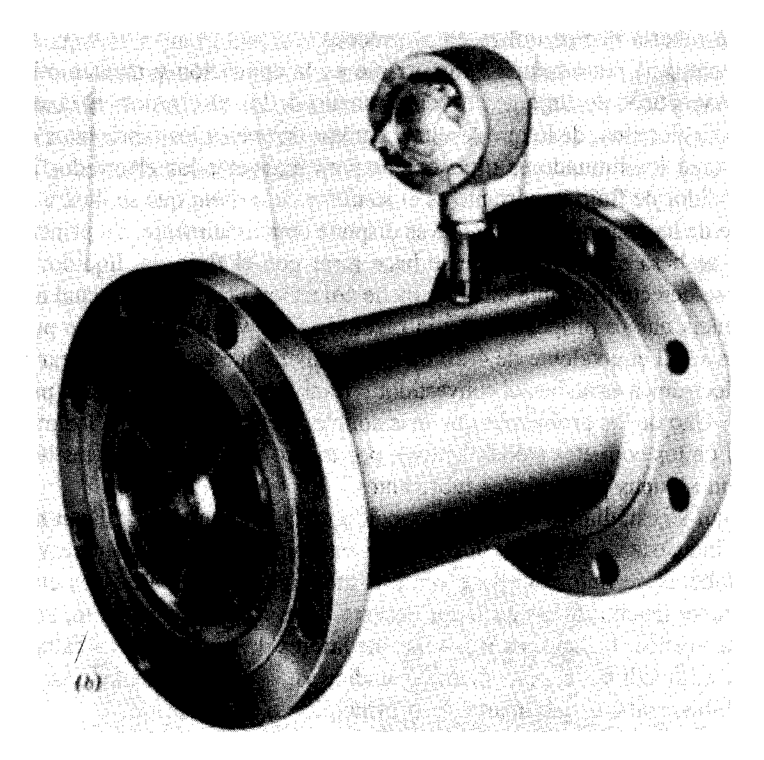


Figura **C-11.** Medidor de flujo de turbina. ***a)*** (Cortesfa de la **Instrument** Society of America.) ***b)*** (Cortesía de Fisher & Porter.)

rior del líquido, como extremo de baja presión. Una vez que se conoce el diferencial de presión y la densidad del líquido, se puede obtener el nivel. En la figura C-12 se muestra la instalación del sensor de diferencial de presión en recipientes abiertos y cerrados; si los vapores en la parte superior del líquido no son condensables, entonces la tubería de baja presión, que también se conoce como derivación húmeda, puede estar vacía; sin em-

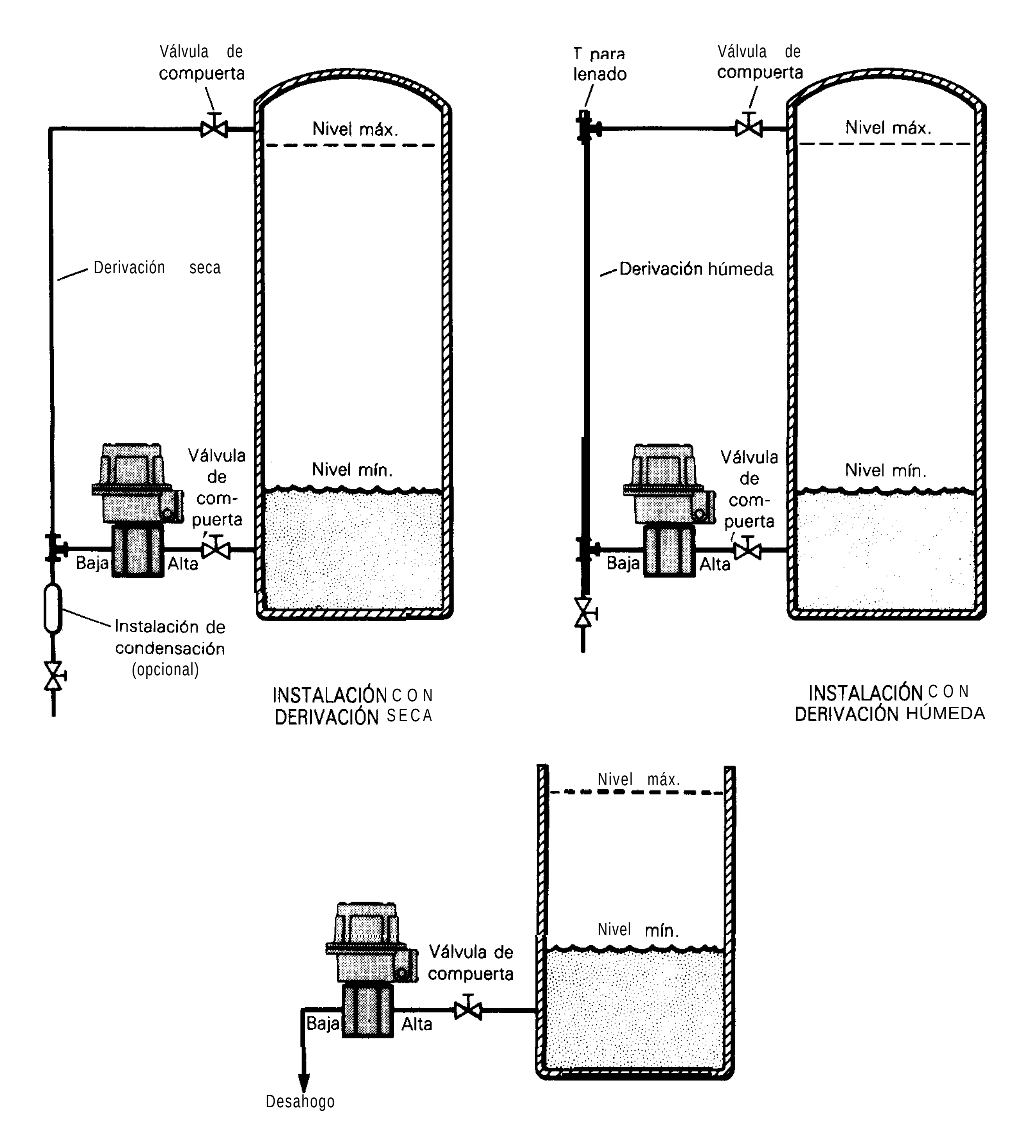


Figura C-12. Instalación de transmisores de diferencial de presión en recipientes abiertos y cerrados. (Cortesfa de Taylor Instrument Co.)

bargo, si los vapores se condensan, entonces la derivación húmeda se debe llenar con un líquido sellador apropiado. Si la densidad del líquido varía, entonces se debe utilizar alguna técnica de compensación.

Con el ***sensor de flotador*** se detecta el cambio en la fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido en el líquido. Este sensor se instala generalmente en un ensamble que se monta de manera externa al recipiente, como se muestra en la figura **C-13.** La fuerza que se

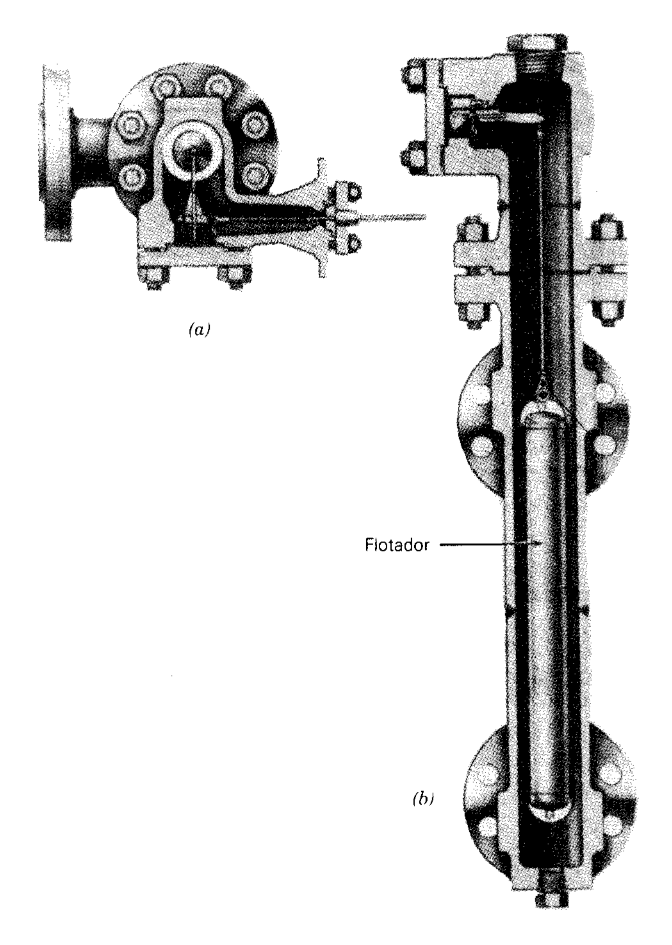


Figura C-13. Sensor de nivel con flotador. (**Cortesía** de Taylor Instrument Co.) ***a***) Vista superior, ***b***) vista lateral.

requiere para mantener al flotador en su lugar es proporcional al nivel del líquido y se convierte en una señal en el transmisor. Este tipo de sensor es menos caro que la mayoría de los otros **sensores** de nivel; sin embargo, su mayor desventaja estriba en la incapacidad para cambiar el cero y la escala; para cambiar el cero se requiere la reubicación de la cápsula completa.

El ***sensor de*** burbujeo es otro tipo de sensor de presión hidrostática, y consiste, como se muestra en la figura C-14, en un tubo con gas inerte que se sumerje en el líquido; el aire o gas inerte que fluye a través del tubo se regula para producir una corriente continua de burbujas, y la presión que se requiere para producir esta corriente continua es una medida de la presión **hidrostática** o nivel del liquido.

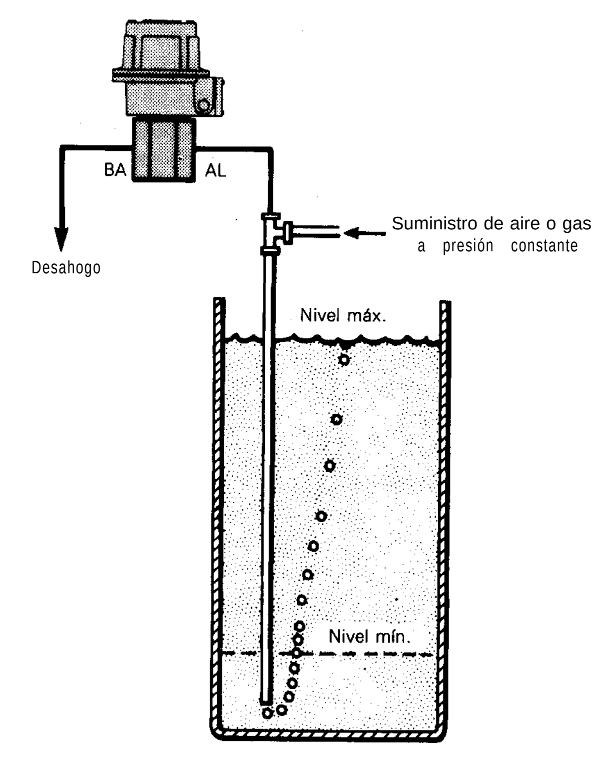


Figura C-14. Sensor de nivel de burbujas de aire. (Cortesfa de Taylor Instrument Co.)

Existen otros métodos nuevos para medir el nivel en los tanques, algunos de éstos son patrones de capacitancia, sistemas ultrasónicos y sistemas de radiación nuclear; los dos últimos sensores también se utilizan para medir el nivel en materiales sólidos. Para ampliar este estudio se recomiendan las referencias bibliográficas que se citan al principio de esta sección.

SENSORES DE TEMPERATURA* [2,3,6]

La temperatura, junto con el flujo, es la variable que con mayor frecuencia se mide en la industria de proceso; una razón simple es que casi todos los fenómenos físicos se ven afectados por ésta. La temperatura se utiliza frecuentemente para inferir otras variables del proceso; dos de los ejemplos más comunes son las columnas de destilación y los reac-

* Esta sección se escribió parcialmente con base en las notas que desarrolló el Dr. L. A. Scott para sus cursos de instrumentación dedicados a no graduados en la Universidad del Sur de Florida.

tores químicos. Comúnmente, en las columnas de destilación se utiliza la temperatura para inferir la pureza de una de las corrientes existentes; en los reactores químicos la temperatura se utiliza como un indicador de la extensión de la conversión o reacción.

A causa de los múltiples efectos que se producen con la temperatura, se han desarrollado numerosos dispositivos para medirla; con muy pocas excepciones, los dispositivos caen en cuatro clasificaciones generales, como se observa en la tabla C-2. Termómetros de cuarzo, conos pirométricos y pinturas especializadas son algunos de los sensores que no entran en la clasificación de la tabla C-2. En la tabla C-3[6] se muestran algunas características de los sensores típicos.

Con los *termómetros de vidrio con líquido* se indica el cambio de temperatura que causa la diferencia entre el coeficiente de temperatura de expansión del vidrio y del líquido que se utiliza; los líquidos que se utilizan más ampliamente son mercurio y alcohol. Los termómetros de mercurio que se fabrican con vidrio ordinario son útiles entre —35°F y 600°F, el límite inferior se debe al punto de congelación del mercurio y el superior a su punto de ebullición. Si el espacio que queda arriba del mercurio se llena con un gas inerte, generalmente nitrógeno, para evitar la ebullición, el rango útil se puede extender hasta los 950°F; tales termómetros llevan generalmente la inscripción de "llenado con nitrógeno" ("nitrogen filled"). Para temperaturas por debajo del punto de congelación del mercurio (—38°F) se debe emplear otro liquido; para temperaturas abajo de —80°F se utiliza ampliamente el alcohol; para temperaturas hasta de —200°F se utiliza pentano, y tolueno para temperaturas abajo de —200°F.

Los *termómetros de tira bimetdlica* trabajan con base en el principio de que los metales se expanden con la temperatura y que los coeficientes de expansión no son los mismos para todos los metales; en la figura C-15 se ilustra un termómetro de tira bimetálica típico. El elemento sensitivo a la temperatura se compone de dos metales diferentes que se

Tabla C-2. Sensores comunes para mediciones de temperatura.

I. Termómetro de expansión
   A. Termómetro de líquido en vidrio
   B. Termómetro de expansión de sólidos (tira bimetálica)
   C. Termómetros de sistema lleno (termómetros a presión)
      1. Llenos de gas
      2. Llenos de líquido
      3. Llenos de vapor

II. Dispositivos con sensor de resistencia
   A. Termómetros de resistencia
   B. Termistores

III. Termopares

IV. Métodos sin contacto
   A. Pirómetros ópticos
   B. Pirómetros por radiación
   C. Técnicas infrarrojas

Tabla C-3. Características de los **sensores** de temperatura típicos.

	Rango, °F	***Precisión,* °** *F*	*Ventajas*	*Desventajas*
Termómetros de tubo de vidrio	Práctico: -200 a 600 Extremo: -321 a 1100	0.1-2.0	Bajo costo Simplicidad Larga vida	**Difícil** de leer **Únicamente** para medición local; no existe capacidad para control automático 0 registro
Termómetros **bimetálicos**	Práctico: -60 a 600 Extremo: -100 a 1000	1 .o-20	Menos sujetos a ruptura Lectura en cuadrante Menor costo que el térmico o el eléctrico	Menor precisión que con los de tubo de vidrio La calibración cambia con el manejo rudo
Elementos de relleno **térmico**	Práctico: -300 a 1000 Extremo: -450 a 1400	+ **0.5-2.0%** de toda la escala	Simplicidad No se necesita energía auxiliar Tiempos de respuesta suficientes	Tamaño del bulbo mayor que en los sistemas **eléctricos,** los rangos mínimos son mayores La distancia máxima entre el bulbo y el punto de lectura es de 50-200 pies
Termómetro de resistencia	-430 a 1600	0.1 (mejor de)	Precisión del sistema Se dispone de rangos bajos **(10°F)** **Respuesta** rápida, tamaño pequeño	El autocalentamiento puede ser un problema La desviación a largo plazo excede a la del termopar Algunos modelos son caros; difícil de montar
Termopares	-440 a 5000	0.2 (mejor de)	Tamaño pequeño, bajo costo Montaje práctico Rango amplio	No tan simple como los termómetros de lectura directa El trabajo con alambres fríos puede **afectar** la calibración; rango mínimo nominal: **70°F**
Pirómetro de radiación	0 a 7000	**±0.5-1.0%** de toda la escala	No hay contacto físico Rango amplio, respuesta rápida **Medición** en áreas pequeñas, o promedio en un área grande	Más frágil que otros dispositivos eléctricos Escala no lineal; se requiere un rango relativamente amplio
Termistores	-150 a 600	0.1 (mejor de)	Tamaño pequeño, respuesta rápida Bueno para rangos estrechos Bajo costo, estable No hay unión fría	Amplia respuesta no lineal La estabilidad por arriba de **600°F** es problemática; no son adecuados para rangos amplios La alta resistencia hace que el sistema sea susceptible a la inducción de ruido de las lineas de energía

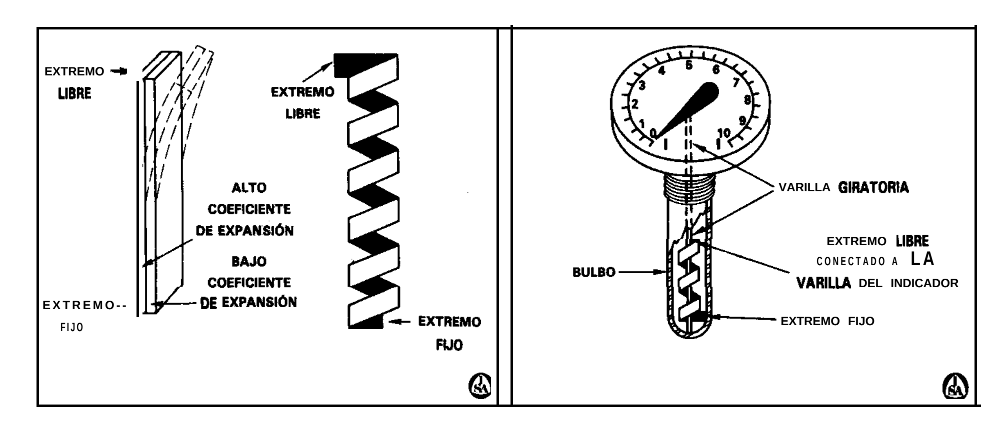


Figura C-15. Termómetro de tira **bimetálica.** (Cortesía de la Instrument Society of America.)

unen en una tira, el coeficiente de expansión de uno de los metales es alto, y el del otro es bajo; una combinación corriente es el invar (64% Fe, 36% Ni), cuyo coeficiente es bajo, y la aleación de níquel-hierro, cuyo coeficiente es alto. Generalmente la expansión con la temperatura es baja, y por esta razón la tira bimetálica se enrolla en forma de espiral; conforme la temperatura se incrementa, la espiral tiende a combarse hacia el lado del metal con bajo coeficiente térmico.

En la figura C-16 se muestran los elementos de un ***termómetro** de sistema lleno* típico; el líquido del sistema se expande o se contrae con las variaciones de temperatura, lo cual se detecta mediante el resorte de Bourdon y se transmite a un indicador o transmisor. A causa de la simplicidad de su diseño, confiabilidad, bajo costo relativo y seguridad inhe-

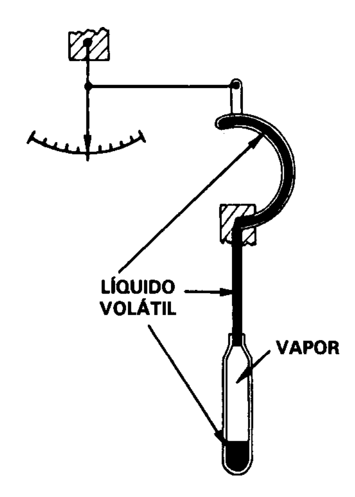


Figura C-16. Termómetro típico de sistema lleno. (Cortesía de la Instrument Society of America.)

Tabla C-4. Clasificación de la Scientific Apparatus Manufacturers' Association para los termómetros de sistema lleno.

Clase	Relleno	*Características*
I	Llquido distinto al mercurio	Sin compensación
IA	Líquido distinto al mercurio	Contenedor y capilar con compensación
IB	Líquido distinto al mercurio	Contenedor con compensación
IIA	Vapor	Para aplicaciones del bulbo en condiciones por arriba de la temperatura ambiente
IIB	Vapor	Para aplicaciones del bulbo en condiciones por abajo de la temperatura ambiente
IIC	Vapor	Para aplicaciones del bulbo en condiciones por arriba o por abajo de la temperatura ambiente Se utiliza tubo grande
IID	Vapor	Para aplicaciones del bulbo en condiciones por arriba o por abajo de la temperatura ambiente Se utiliza liquido no volátil para la transmisión
IIIA	Gas	Contenedor y capilar con compensación
IIIB	Gas	Contenedor con compensación
VA	Mercurio	Contenedor y capilar con compensación
VB	Mercurio	Contenedor con compensación

Note: Para IV no existe clasificación SAMA.

rente, estos elementos son populares en la industria de proceso. La Scientific Apparatus Manufacturers' Association (SAMA) estableció cuatro clases principales de sistemas llenos, con subclasiñcaciones, las cuales se listan en la tabla C-4. Las diferencias más significativas entre las clasificaciones son el líquido que se utiliza y la compensación de las diferencias de temperatura entre el bulbo, la capilaridad y el resorte de Bourdon; en la figura C-17 se muestran varios de estos sistemas llenos. Para una descripción más extensa de dichos sistemas se remite al lector a las referencias bibliográficas 2 y 3.

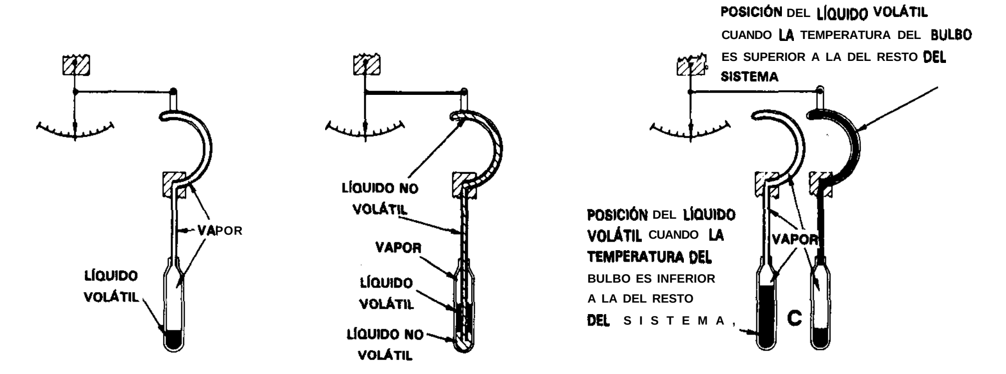


Figura C-17. Otros tipos de termómetros de sistema lleno. (Cortesfa de la Instrument Society of America.)

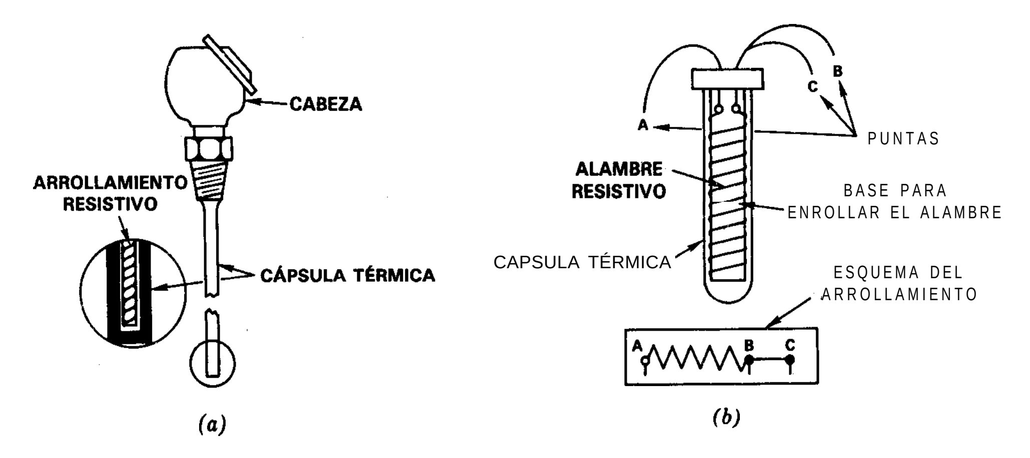


Figura C-M. Esquema de un termómetro de resistencia. *a*) Ensamblaje, *b*) componentes. (Cortesía de la Instrument Society of America.)

Los *termómetros de dispositivos resistivos* (TDR) son elementos que se basan en el principio de que la resistencia eléctrica de los metales puros se incrementa con la temperatura y, ya que la resistencia eléctrica se puede medir con bastante precisión, esto proporciona un medio para medir la temperatura con mucha exactitud. Los metales que se utilizan más comúnmente son platino, níquel, tungsteno y cobre. En la figura C-18 se muestra el esquema de un TDR típico.

Para la lectura de la resistencia y, en consecuencia, también para la de temperatura generalmente se utiliza un puente de Wheatstone. En la figura C-19 se ilustra el sistema de los puentes de dos y tres hilos que se utilizan.

Con los *elementos termistores* se detectan cambios muy leves de temperatura. Los termistores se fabrican con la combinación sinterizada de material cerámico y alguna clase de óxido metálico semiconductor, como níquel, manganeso, cobre, titanio o hierro.

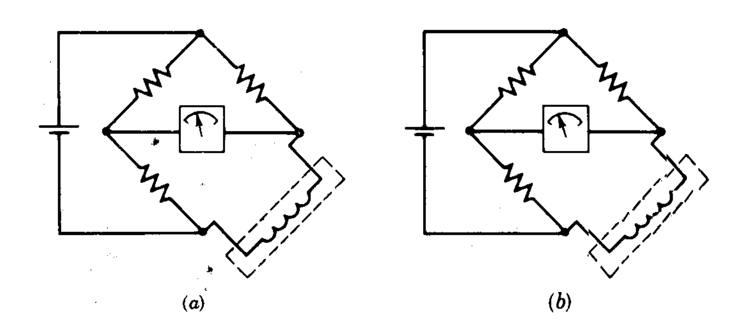


Figura C-19. *a*) Puente de Wheatstone de dos hilos, *b*) de tres hilos.

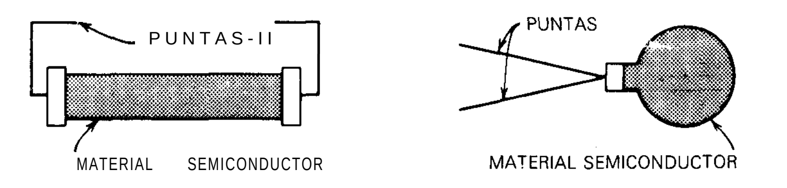


Figura C-20. Construcción de un termistor típico. (Cortesía de la Instrument Society of America.)

En los termistores se tiene un coeficiente de resistividad térmica muy negativo, o algunas veces positivo. En la figura C-20 se ilustran algunos termistores típicos. Los puentes de Wheatstone de la figura C-19 se utilizan generalmente para medir la resistencia y, por lo tanto, también la temperatura. Algunas de las ventajas son el tamaño pequeño y el bajo costo; sus principales desventajas estriban en que la relación de la temperatura contra la resistencia no es lineal, así como el hecho de que generalmente se requieren líneas de fuerza blindadas.

El último elemento de-temperatura que se estudiará es el *termopar,* el cual es el sensor de temperatura industrial más conocido. El principio de funcionamiento del termopar lo descubrió T. J. Seebeck, en 1821; en el efecto de Seebeck, o principio de Seebeck, se establece que hay un flujo de corriente eléctrica en un circuito de dos metales diferentes si las dos uniones están a temperaturas diferentes. En la figura C-21 se muestra el esquema de un circuito simple; M_1 y M_2 son los dos metales, T_H es la temperatura a medir, y T_C es la temperatura que generalmente se conoce como de unión fría o de referencia. El voltaje que se produce con este efecto termoeléctrico depende de la diferencia de temperatura entre las dos uniones y los metales que se utilicen; en la figura C-22 se muestran los voltajes que se generan como metales típicos. En la figura C-33 se ilustra un esquema más realista de un circuito de medición. El tipo más común de termopares son platino-platino/rodio, cobre-constantan, hierro-constantan, cromel-alumel y cromel-constantan. En la figura C-24 se muestra el ensamblaje de un termopar industrial; el tubo de protección, que también se conoce como depósito térmico, no es necesario en todas las instalaciones; con el depósito térmico se tiende a hacer más lenta la respuesta del sistema sensor. Para un estudio más detallado de los termopares se recomiendan ampliamente las referencias bibliográficas 2 y 3.

SENSORES DE COMPOSICIÓN[2,25,26,27,28]

Otra clase importante de sensores son los de composición, los cuales se utilizan en las mediciones y control de calidad de producto. Existen muchos tipos diferentes de sensores de medición, por ejemplo, los de densidad, viscosidad, cromatografía, pH y POR. Debido a la falta de espacio no se presentan estos sensores, sin embargo, se desea que el lector esté consciente de su importancia; se proporcionan referencias bibliográficas para lectura y aprendizaje.

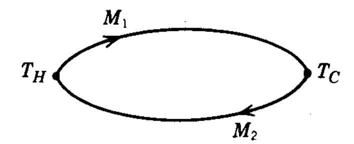


Figura C-21. Circuito de termopar sencillo.

GRADF	0	2	4	6	8	10
-100	-2.699	-2.136	-2.773	-2.810	-2.867	-2.883
10	-0.478	-0.435	-0.392	-0.349	-0.305	-0.262
100	1.520	1.566	1.611	1.657	1.703	1.748

(*a*)

GRAD F	0	2	4	6	8	10
- 100	-2.581	-2.616	-2.650	-2.665	-2.119	-2.753
10	-0.467	-0.425	-0.383	-0.341	-0.299	-0.256
100	1.518	1.565	1.611	1.450	1.705	1.152

(*b*)

GRAD F	0	2	4	6	8	10
100	-3.492	-3.541	-3.590	-3.639	-3.688	-3.131
10	-0.611	-0.556	-0.501	-0.445	-0.390	-0.334
100	1.942	2.000	2.058	2.117	2.175	2.233

(*c*)

Figura C-22. Voltajes que se generan con diferentes tipos de termopares (milivolts). (Unión de referencia a 32°F.) *a*) Tipo K: Níquel-cromo con níquel-aluminio (cromel-alumel). *b*) Tipo T: Cobre con cobre-níquel (cobre-constantan) . c) Tipo J: Hierro con cobre-níquel (hierro-constantan) .

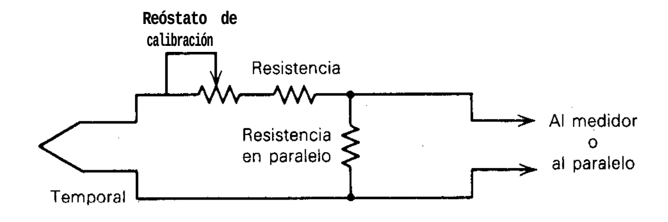


Figura C-23. Circuito para medición con termopar.

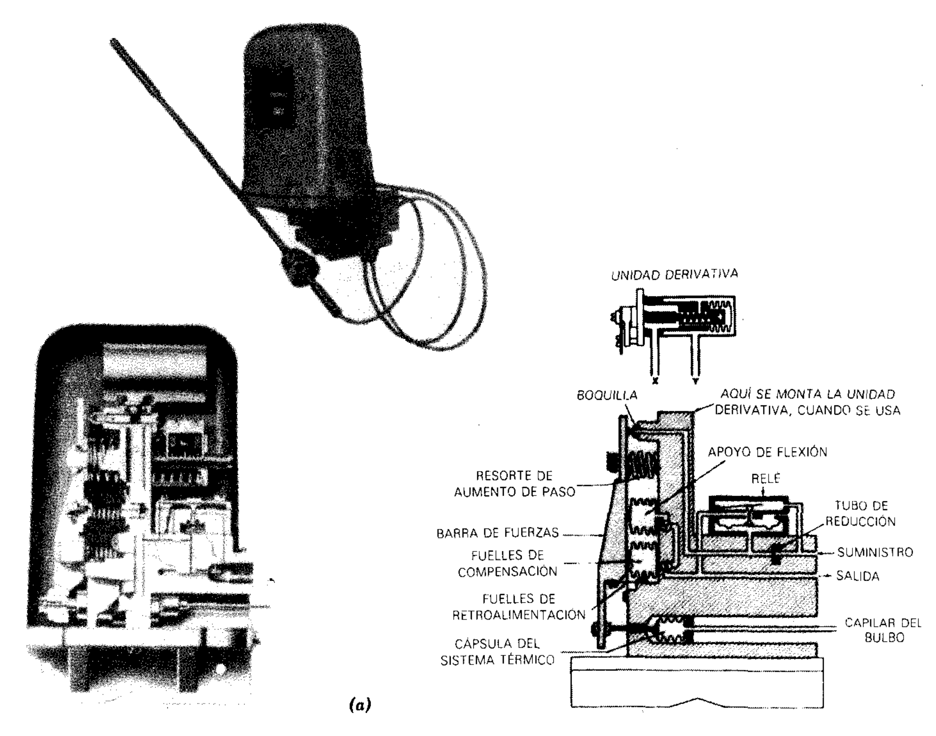


Figura C-24. Ensamblaje de los sistemas de termopar. *a*) (Corteía de la Foxboro Co.)

TRANSMISORES

En esta sección se presentan los ejemplos de un transmisor neumático y de uno eléctrico. El objetivo es presentar al lector los principios de funcionamiento de estos transmisores típicos. Como se mencionó anteriormente en este apéndice, el propósito del transmisor es convertir la salida de un sensor en una señal lo suficientemente intensa como para que se pueda transmitir a un controlador o cualquier otro dispositivo receptor. En general, la mayoría de los transmisores se pueden dividir en dos tipos: de balance de fuerzas y de movimiento-balance, los cuales son los más comunes y se utilizan extensamente en la industria.

Transmisor neumático

En todos los transmisores neumáticos se utiliza un arreglo de mariposa y boquilla para producir una señal de salida proporcional a la salida del sensor. Para ilustrar los principios de funcionamiento se utilizará un transmisor de diferencial de presión(12), el cual es de balance de fuerza y se ilustra en la figura C-25.

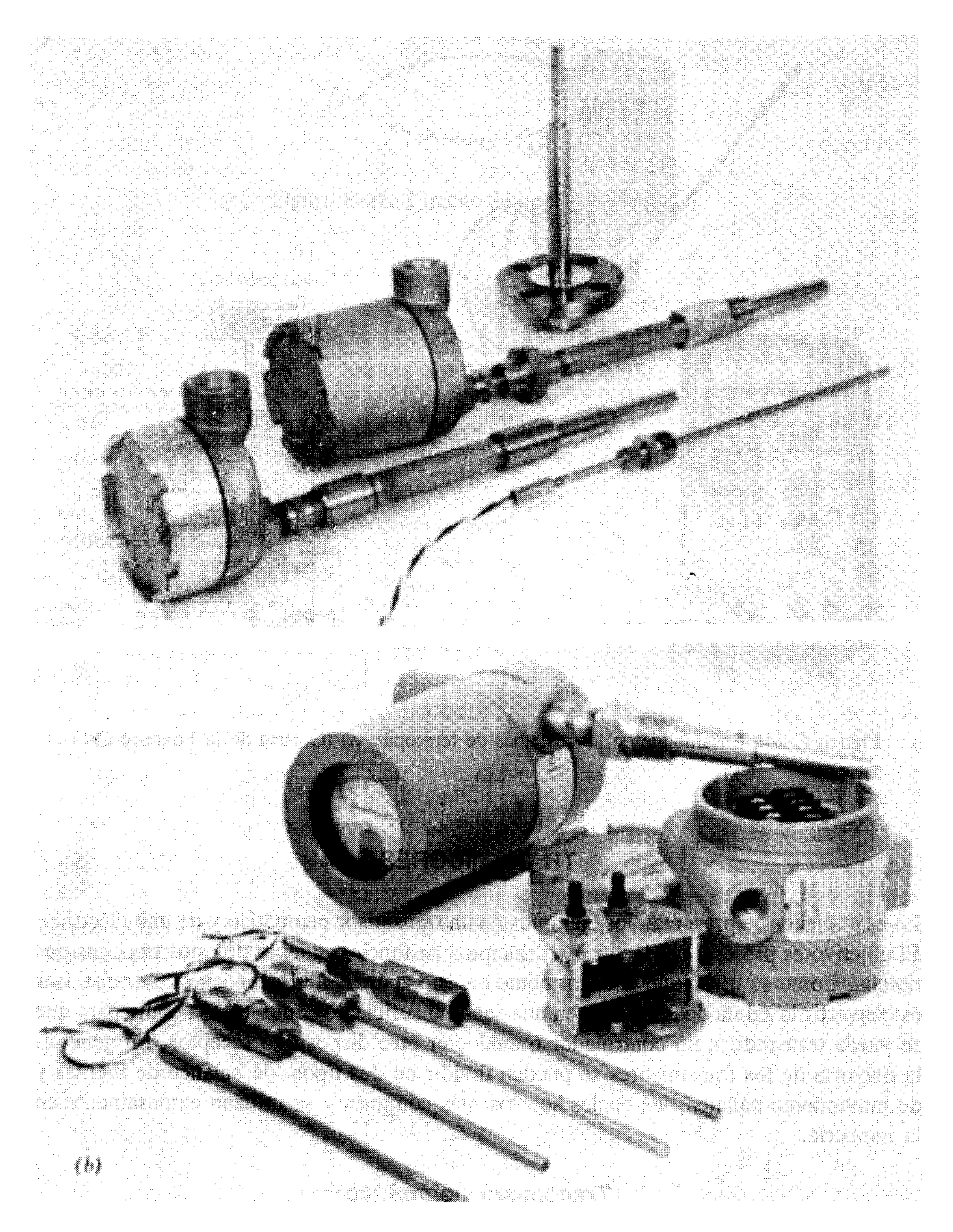


Figura C-24. (Continuación) b) (Cortesía de Rosemount, Inc.)

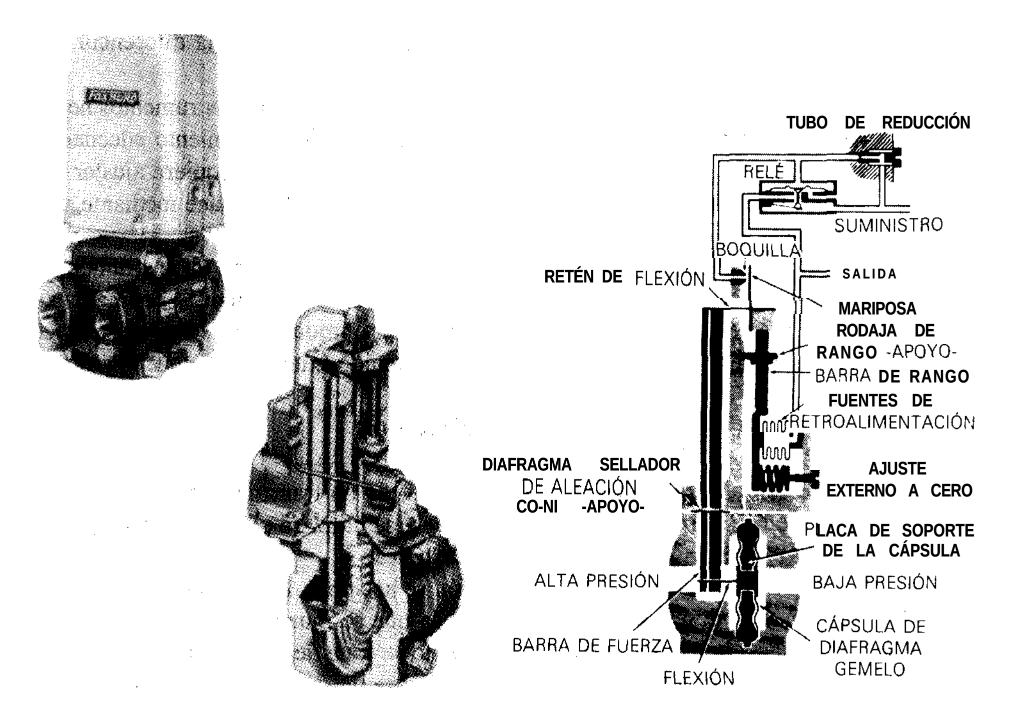


Figura C-25. Transmisor neumático de diferencial de presión. (Cortesfa de la **Foxboro** Co.)

La cápsula de diafragma gemelo es el sensor con que se detecta la diferencia de presión entre el lado de alta y el lado de baja presión. Ya anteriormente se vio que este tipo de sensor se utiliza para medir el nivel de un liquido y el flujo. El diafragma se une a una barra de fuerza mediante una conexión flexible; la barra de fuerza se conecta al cuerpo del transmisor mediante un diafragma de acero inoxidable, el cual sirve como sello de la cavidad de medición y también como un apoyo firme para la barra de fuerza. La parte superior de la barra de fuerza se conecta a la barra de rango mediante una tira de flexión; la barra de rango se apoya en la rodaja de rango. En la parte inferior de la barra de rango se encuentra un diafragma de retroalimentación y un ajuste a cero. Arriba de la barra de rango se encuentra un arreglo de mariposa-boquilla y un relevador neumático y, como se observa, la mariposa se conecta a la combinación de barra de fuerza y barra de rango.

Cuando en la cápsula del diafragma se detecta una diferencia de presión, se crea una tensión o fuerza en la parte inferior de la barra de fuerza; más específicamente, se puede suponer que la presión en la parte superior se incrementa, con lo que se crea una fuerza que tira de la barra de fuerza, de lo cual resulta un movimiento en el extremo externo de la barra, con lo que la mariposa se acerca a la boquilla, en cuyo caso se incrementa la salida del relevador y con ello se incrementa la fuerza que se ejerce sobre la barra de rango mediante el diafragma de retroalimentación. Con esta fuerza se balancea la fuerza del diferencial de presión presente en la cápsula de diafragma; del balance de estas fuer-

zas resulta la señal de salida del transmisor, la cual es proporcional a la diferencia de presión.

El suministro de presión que se recomienda para la mayoría de los instrumentos neumáticos es entre 20 y 25 psig, ya que con éste se asegura el funcionamiento adecuado con un nivel de salida de 15 psig. Para calibrar estos instrumentos se requiere ajustar el cero y la escala (o rango); en el instrumento de la figura C-25 esto se hace mediante un tornillo externo de ajuste a cero y con la rodaja de rango.

En los párrafos precedentes se describió el principio de trabajo de un instrumento neumático típico. Como se mencionó al principio, en todos los instrumentos neumáticos se utiliza alguna clase de arreglo de boquilla mariposa para producir una señal de salida, la cual es una técnica confiable y simple con la que se ha tenido éxito durante muchos años.

Transmisor electrónico

En la figura C-26 se muestra el diagrama simplificado de un transmisor electrónico de diferencial de presión[(13)] del tipo movimiento-balance y se utilizara para ilustrar los principios de trabajo de la instrumentación electrónica típica.

Con un incremento en el diferencial de presión se accionan los diafragmas del elemento de medición y se desarrolla una fuerza con la que se mueve la parte inferior de la barra de fuerza hacia la izquierda. Este movimiento se transfiere a la unidad de medición de la fuerza de deformación a través de un alambre de conexión; en la unidad de medición de la fuerza de deformación se tienen cuatro medidores de fuerza que se conectan en configuración puente; con el movimiento de la barra de fuerza se causa un cambio de resistencia en los medidores de fuerza, mediante el cual se produce una señal diferencial proporcional al diferencial de presión que entra, misma que se aplica a las entradas del amplificador de entrada; un lado de la señal se aplica directamente a la entrada del amplificador con inversión, y el otro a la entrada sin inversión, a través de una red de cero, con la cual se obtiene el ajuste a cero del transmisor.

Con la señal que sale del amplificador de entrada se maneja al regulador de corriente de salida, por medio del cual se controla la corriente de salida del transmisor a través de la red de escala y el circuito sensor de corriente de salida. Con la red de escala se obtiene el ajuste de escala del transmisor; la señal de esta red se retroalimenta al circuito de entrada mediante un amplificador con almacenamiento (buffer) y se utiliza para controlar la ganancia del circuito de entrada. Si la corriente de salida del transmisor se incrementa más allá de 20 mA C.D., el voltaje que pasa a través de la resistencia de detección de corriente activa el limitador de corriente de salida, con el. cual se limita la salida.

TIPOS DE VÁLVULAS DE CONTROL[14,15,16,17,18,19,20]

Existen muchos tipos diferentes de válvulas de control en el mercado, casi ca& mes se ofrece una “nueva” válvula de control “mejorada” y, en consecuencia, es difícil clasificarlas, sin embargo, aquí se clasificarán en dos categorías principales: de vástago recíproco y de vástago rotatorio.

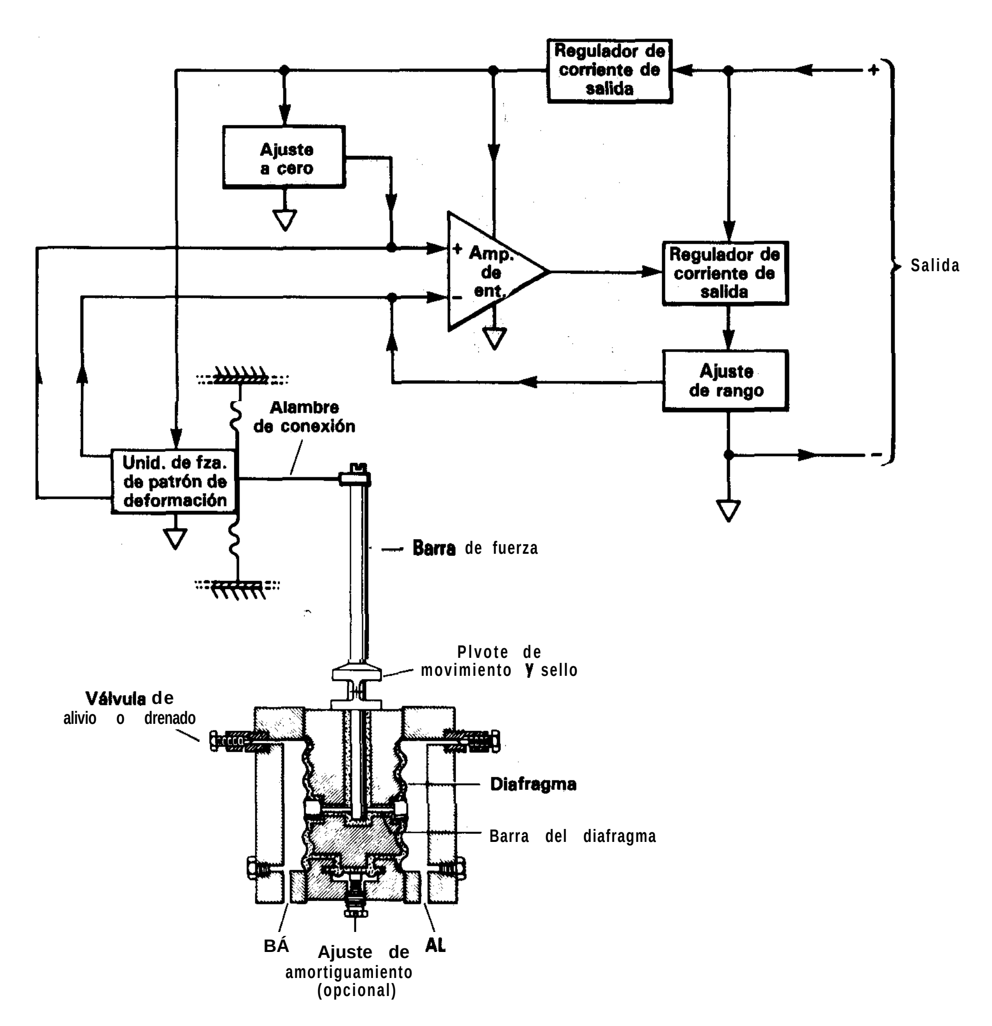


Figura C-26. Transmisor electrónico de diferencial de presión. (Cortesfa de Taylor Instrument Co.)

Vástago recíproco

En la figura *C-27* se muestra una válvula de control de vástago recíproco típica, que en particular *se* conoce como ***válvula de globo con asiento sencillo y vástago deslizable. Las válvulas de globo*** son una familia de válvulas que se caracteriza por una parte de cierre que viaja en línea perpendicular al asiento de la válvula, y se utilizan principalmente para propósitos de estrangulamiento y control de flujo en general. En la figura C-27 también se muestran en detalle los diferentes componentes de la **válvula;** se observa que la **válvula** se divide en dos áreas generales: el ***actuador*** y el ***cuerpo.*** El **actuador** es la parte de la **válvula** con que se convierte en movimiento mecánico la **energía** que entra a la **válvula**

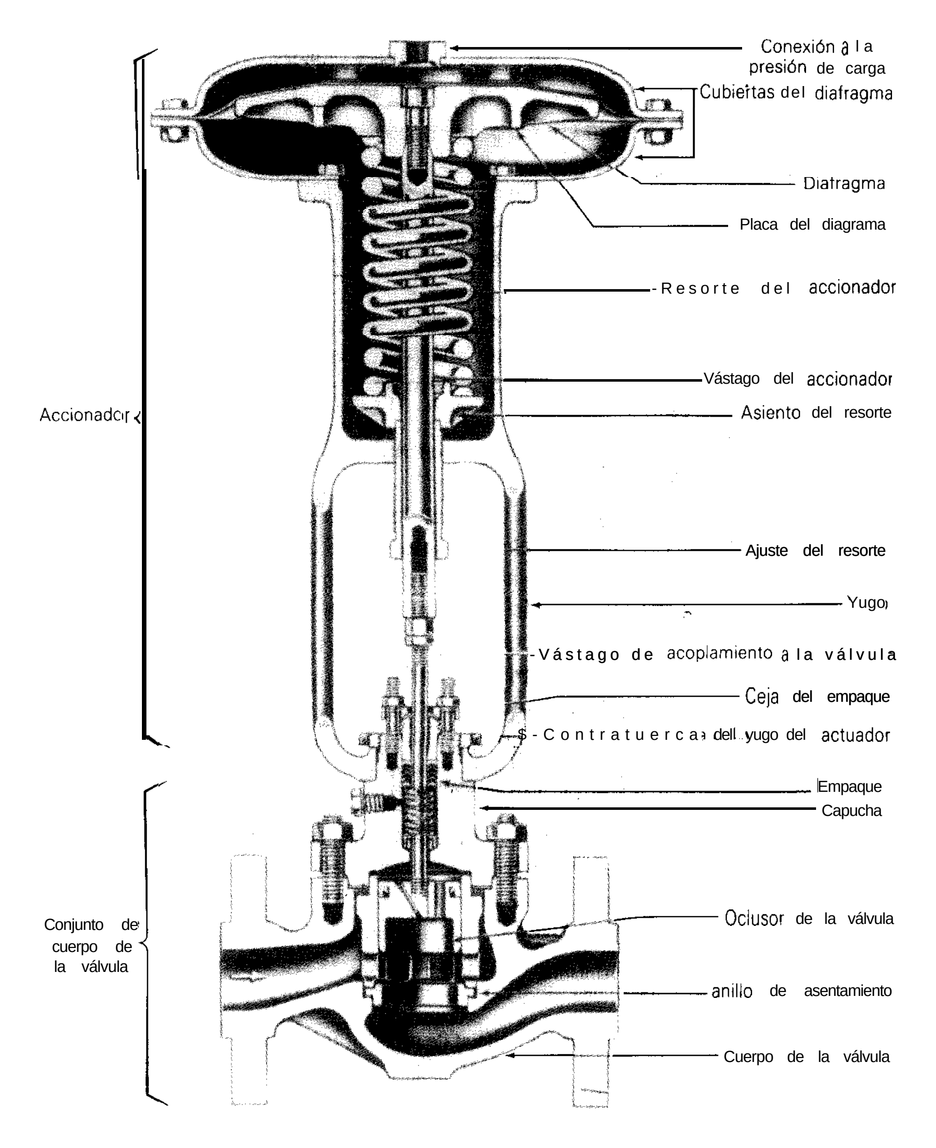


Figura C-27. **Válvula** ce **globo** de asiento sencillo y vástago deslizable. (Cortesía de Fisher Controls.)

para aumentar o disminuir la restricción de flujo. En la figura C-28 se muestra una ***válvula de globo con asiento doble y vástago deslizable,*** con las cuales se pueden manejar presiones de proceso altas; sin embargo, si se requiere un cierre extremo, generalmente se utilizan **válvulas** de asiento sencillo, ya que con las de doble asiento cerradas se tiende a tener mayor escurrimiento que con las de asiento sencillo.

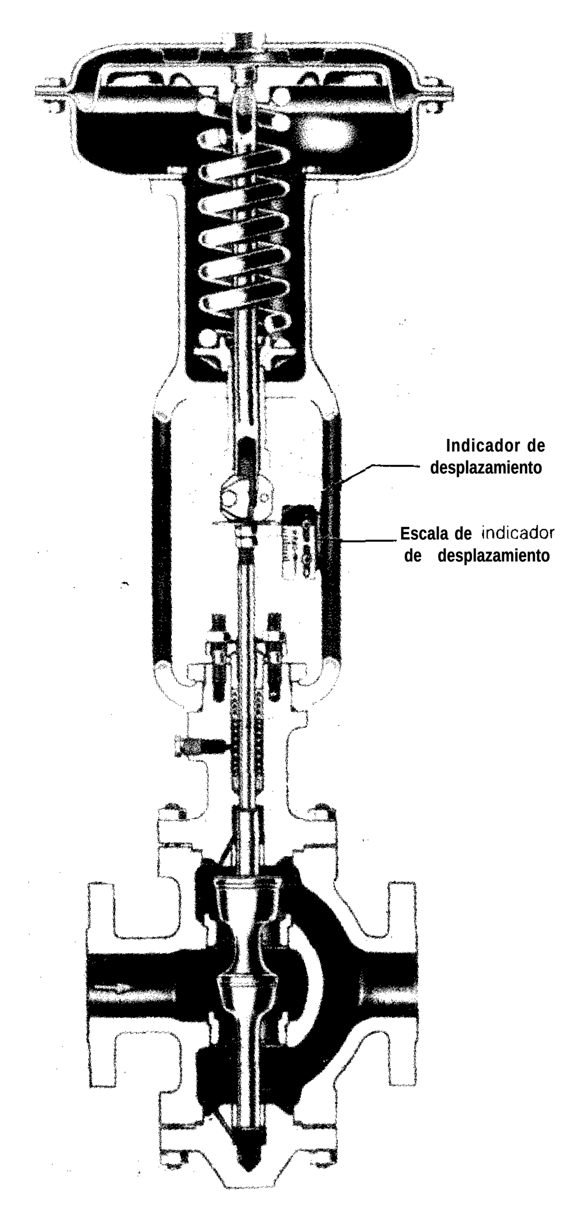


Figura C-28. **Válvula** de globo con asiento doble y **vástago** deslizable. (Cortesía de Fisher Controls.)

Otro tipo de **válvula** que se utiliza comúnmente es la ***de cuerpo separado*** que se muestra en la figura ***C-29. Se*** utiliza frecuentemente en líneas de proceso donde se requiere cambiar con frecuencia el oclusor y el asiento para evitar la corrosión.

Válvulas de jaula, se ilustra en la figura ***C-30,*** el oclusor tiene pasajes internos.

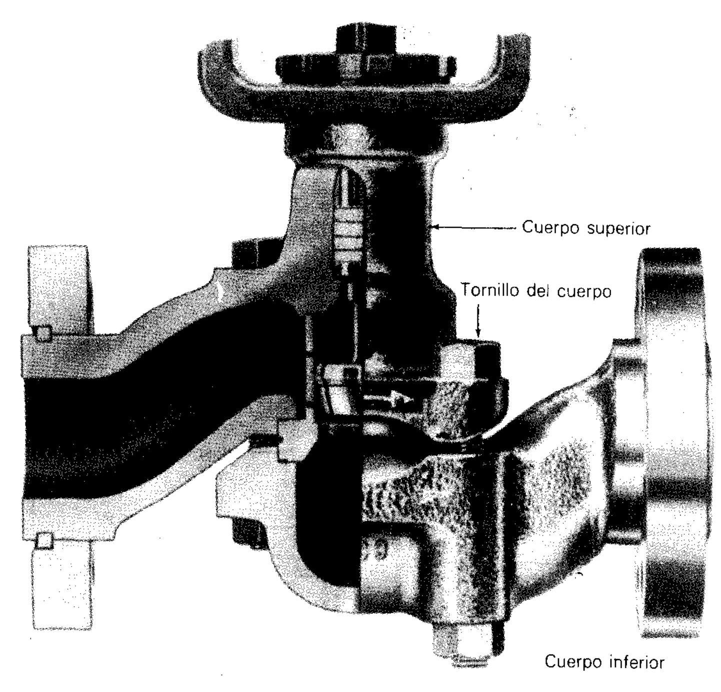


Figura C-29. **Válvula** de cuerpo separable. (**Cortesía** de Masoneilan division, **McGraw-Edison** Co.)

Válvulas de tres vías; **éstas** se ilustran en la figura C-31 y son también de tipo recíproco. Las **válvulas** de tres **vías** pueden ser convergentes o divergentes y, en consecuencia, con ellas se puede separar una corriente en dos o se pueden mezclar dos corrientes en una sola. **Comúnmente** se utilizan para propósito de control.

Existen algunos otros tipos de **válvulas** de control con vástago **recíproco,** la mayoría de ellas se utilizan en servicios especializados. Algunas de éstas son la *válvula* estilo *Y*, la cual se utiliza comúnmente en servicio de fundición de metales o criogénico; la válvula *de apriete o diafragma*, que posee alguna parte flexible, por ejemplo, un diafragma que se puede mover junto con, o abrir, o cerrar el **área** de flujo y comúnmente se utiliza con fluidos altamente corrosivos, suspensiones y líquidos de alta viscosidad, así como en operaciones de procesamiento de alimentos **tales** como la elaboración de cerveza y vino. La *válvula de compuerta* es otro tipo de **válvula** de vástago recíproco que se utiliza principalmente en servicios donde se necesite una abertura o un cierre completo, sin embargo, por lo regular no se emplea en servicios de estrangulamiento.

Vástago rotatorio

Existen varios tipos usuales de **válvulas** de vãstago rotatorio; uno de los más comunes es la válvula *de mariposa* que se ilustra en la figura C-32. Estas **válvulas** constan de un

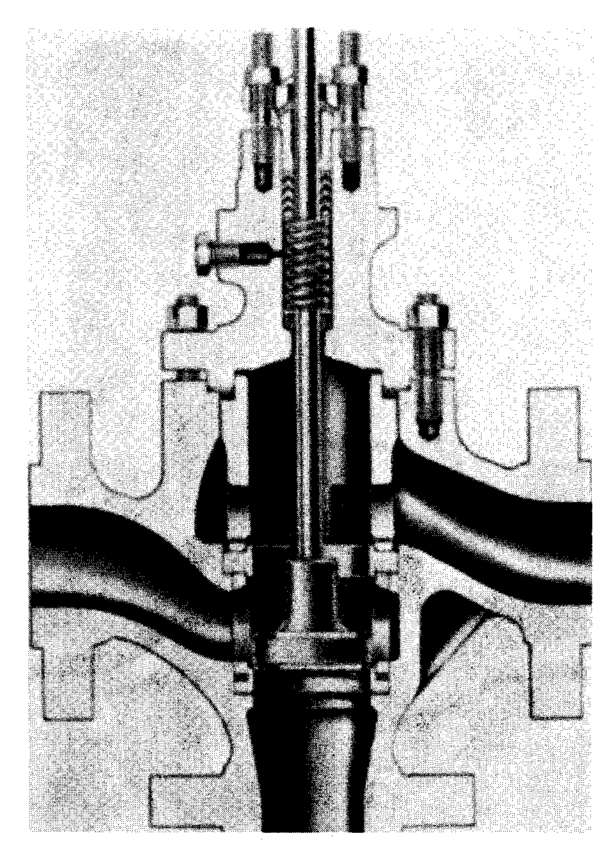


Figura C30. **Válvula** de jaula. (Cortesfa de Masoneilan division, **McGraw-Edison** Co.)

disco que gira alrededor de un eje; se requiere mínimo espacio para su instalación, y se tiene alta capacidad de flujo con **caída** de presión mínima; se utilizan en servicios de baja presión. Con los discos **covencionales** se logra controlar el estrangulamiento hasta en 60 grados de giro, pero con discos de nueva patente se puede controlar el estrangulamiento para un giro completo de 90 grados.

Otra **válvula** común de vástago rotatorio es la ***válvula*** de ***esfera*** que se ilustra en la figura C-33. Con estas válvulas **también** se logra una alta capacidad de flujo con **caída** mínima de presión; se utilizan comúnmente para manejar suspensiones o materiales fibrosos; la tendencia a escurrimiento es baja y su tamaño es pequeño.

Hasta aquí se presentó una breve introducción a varios tipos de válvulas de control, sin embargo, **éstas** no son las **únicas;** en el mercado existe un gran número de **válvulas** para cubrir los requerimientos de servicios especializados, **así** como de seguridad y de otros tipos de regulaciones.

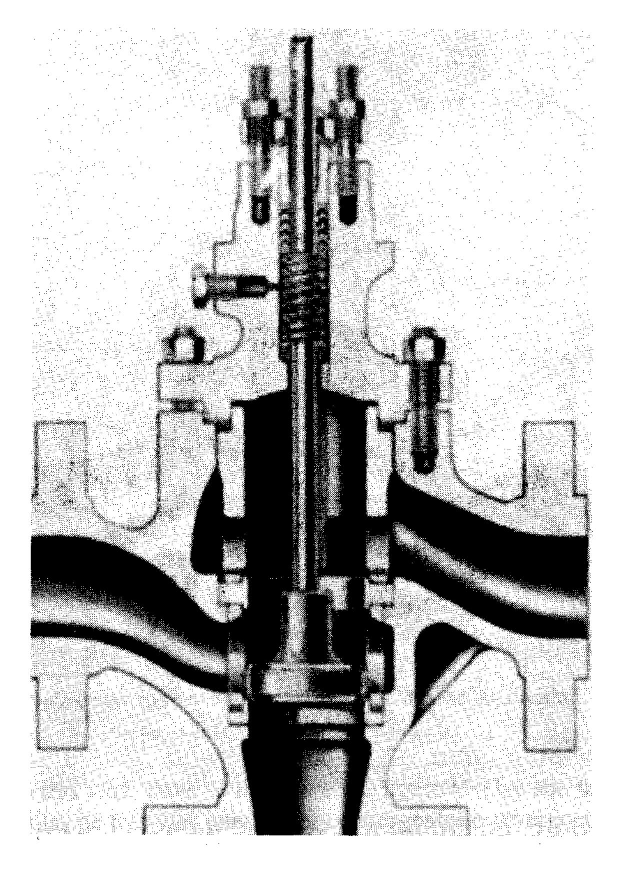


Figura C31. Válvula de tres vías. (Cortesía de Fisher Controls.)

ACCIONADOR DE LA VÁLVULA DE CONTROL

Como se difinió previamente, el accionador (o actuador) es la parte de la válvula de control con que se convierte la energía de entrada, ya sea neumática o eléctrica, en movimiento mecánico para abrir o cerrar la válvula.

Accionador de diafragma con operación neumática

Éstos son los accionadores más usuales en la industria de proceso. En la figura C-34 se muestra un accionador de diafragma típico; estos accionadores consisten en un diafragma flexible que se coloca entre dos compartimientos; una de las cámaras resultantes de este arreglo debe ser hermética. A la fuerza que se genera con el accionador se opone un re-

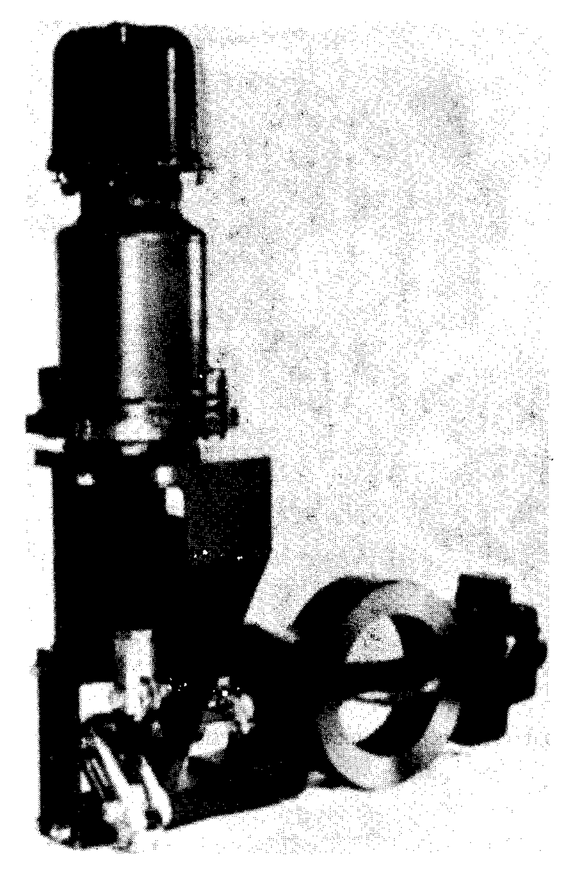


Figura C-32. Válvula de mariposa. (Cortesia de Fisher Constrols.)

sorte de "rango". La señal neumática del controlador entra a la cámara hermética, y con el incremento o decremento de presión se produce una fuerza que se utiliza para vencer la fuerza del resorte de rango del accionador y las del interior del cuerpo de la válvula.

La acción de la válvula, CF o AF, se determina mediante el accionador. En la figura C-34*a* se muestra una válvula cerrada en falla o aire para abrir, y en la figura C-34b se muestra una válvula abierta en falla o de aire para cerrar.

El tamaño del accionador depende de la presión del proceso contra la cual se debe mover el vástago y de la presión de aire de que se dispone; el rango de presión de aire más común es de 3 a 15 psig, pero también se utilizan rangos de 6 a 30 y de 3 a 27 psig. Estos accionadores de diafragma son de construcción simple, confiables y económicos. El fabricante proporciona las ecuaciones para dimensionar los accionadores

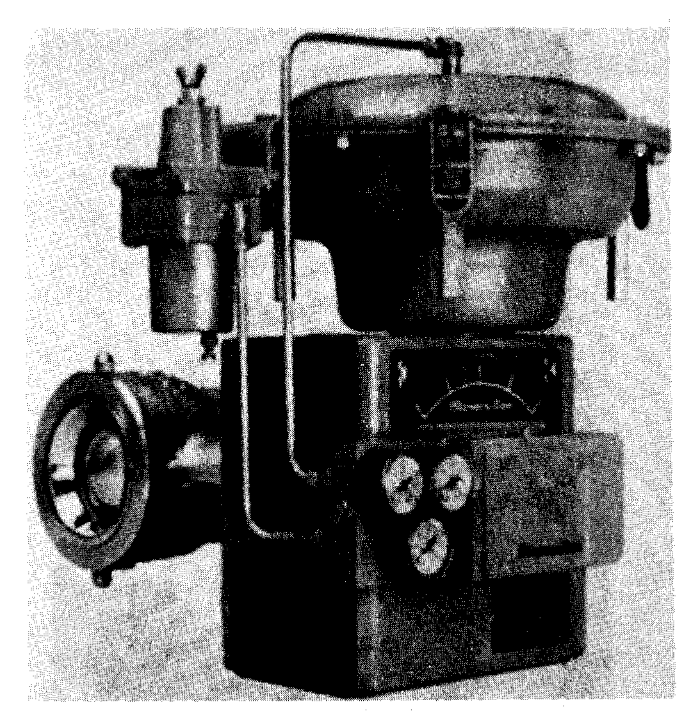


Figura C-33. Válvula de esfera con posicionador. (Cortesía de Masoneilan division, McGraw-Edison Co.)

Accionador de pistón

Normalmente, los accionadores de pistón se utilizan cuando se requiere máxima confiabilidad junto con una respuesta rápida, lo cual generalmente ocurre cuando es alta la presión de proceso contra la que se trabaja. Estos accionadores operan con un suministro de aire a alta presión, de más de 150 psig. Los mejores diseños son de acción doble, con el fin de brindar máxima confiabilidad en ambos sentidos.

Accionadores electrohidráulicos y electromecánicos

Aunque no son tan usuales como los dos tipos anteriores, en el futuro el uso de accionadores electrohidráulicos y electromecánicos se hará más común debido a la utilización creciente de señales eléctricas de control. Dichos accionadores se muestran en las figuras C-35 y C-36; requieren energía eléctrica para el motor y una señal eléctrica desde el controlador .

Dentro de esta familia de accionadores, probablemente el más común es el de solenoide. Se puede utilizar una válvula de solenoide para accionar un accionador de pistón

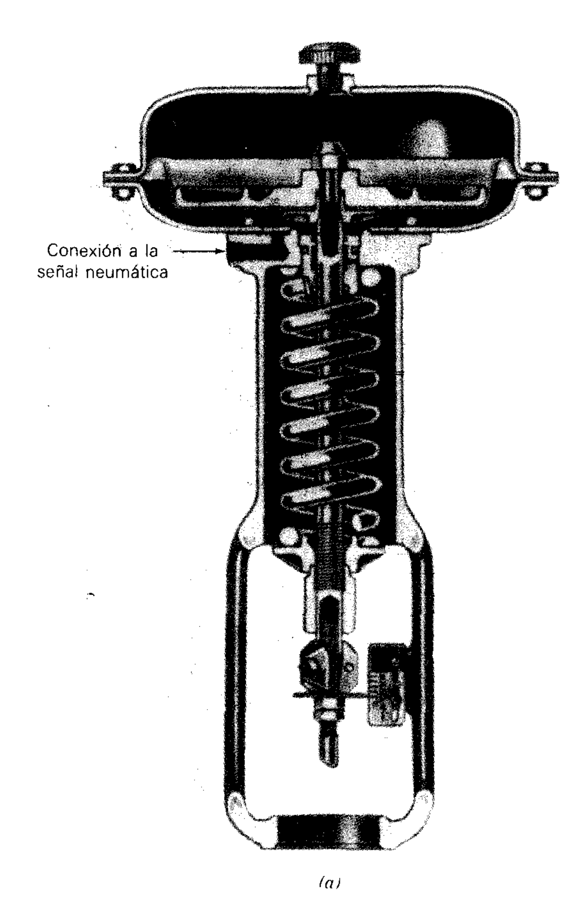


Figura **C-34*a*. Accionador** de diafragma: cerrado en falla, aire para abrir. **(Cortesía** de Fisher Controls.)

de doble acción; mediante la formación o ruptura de una señal de corriente eléctrica se conmuta con el solenoide la salida de una bomba hidráulica para que se conecte a la parte superior o inferior del accionador de pistón. Con esta unidad se obtiene un control preciso sobre la posición de la **válvula.**

Accionadoi manual con volante

Estos accionadores se utilizan cuando no se requiere control automático; en el mercado existen modelos tanto para vástago recíproco como para vástago rotatorio. En la figura C-37 se muestra un accionador de volante típico.

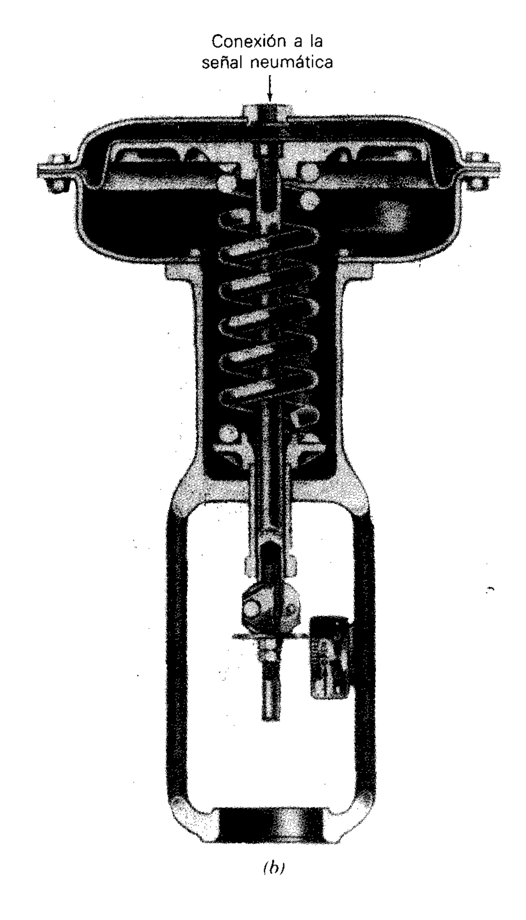


Figura **C-34*b*. Accionador** de diafragma: abierto en **falla,** aire para cerrar. **(Cortesía** de Fisher Controls.)

ACCESORIOS DE LA VÁLVULA DE CONTROL

Existen varios dispositivos que se conocen como accesorios y que generalmente se asocian con las válvulas de control, en esta sección se presenta una breve introducción a algunos de estos accesorios, los más comunes.

Posicionadores

Un posicionador es un dispositivo cuya acción es muy semejante a la de un controlador; su función es comparar la señal del controlador con la posición del vástago de la **válvula.** Si el vástago no esta en la posición que indica el controlador, con el posicionador se añade o elimina aire de la **válvula** hasta que se logra la posición correcta; es decir, cuando es

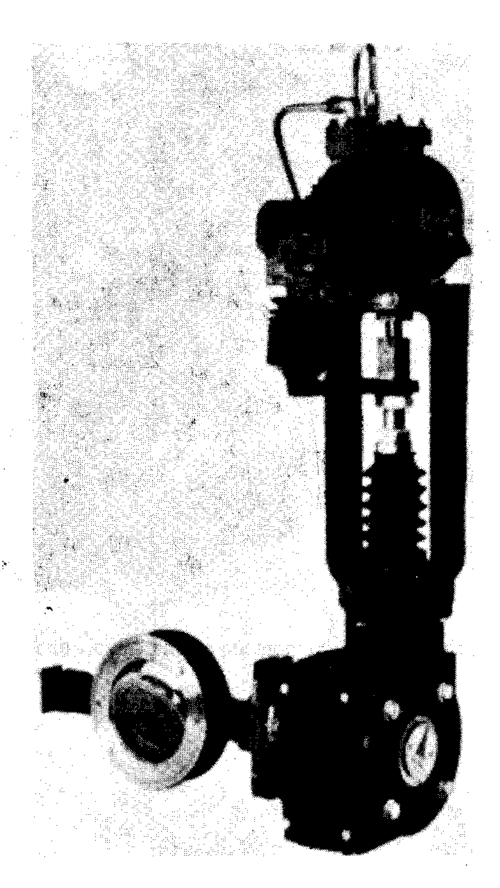


Figura C35. **Accionador** electrohidráulico montado en una **válvula** rotatoria. (Cortesía de Fisher Controls.)

.mportante posicionar el vástago de la **válvula** con precisión, normalmente se utiliza un posicionador. En la figura C-38 se muestra una **válvula** con un posicionador donde se aprecia el arreglo de barra de acoplamiento mediante el cual se detecta la posición del vástago en el posicionador. En la figura C-33 se muestra otro posicionador.

Con la utilización de los posicionadores se tiende a minimizar los efectos de:

1. Retardo en los accionadores de gran capacidad.
2. Fricción del vástago debida a cajas de empaque justas.
3. Fricción debida a fluidos viscosos o pegajosos.
4. Cambios de presión en la linea de proceso.

Se recomienda un posicionador cuando la respuesta de la combinación **válvula**-posicionador es mucho más rápida que el proceso mismo; algunos circuitos de control

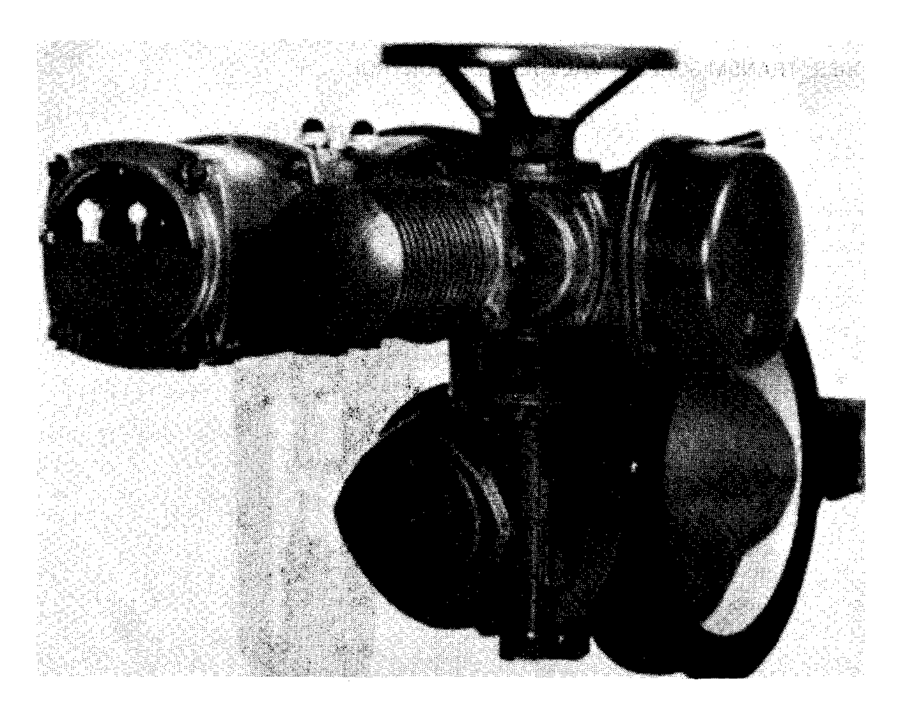


Figura C-36. Accionador **electromecánico** montado en una **válvula** de mariposa. (Cortesfa de Fisher Controls.)

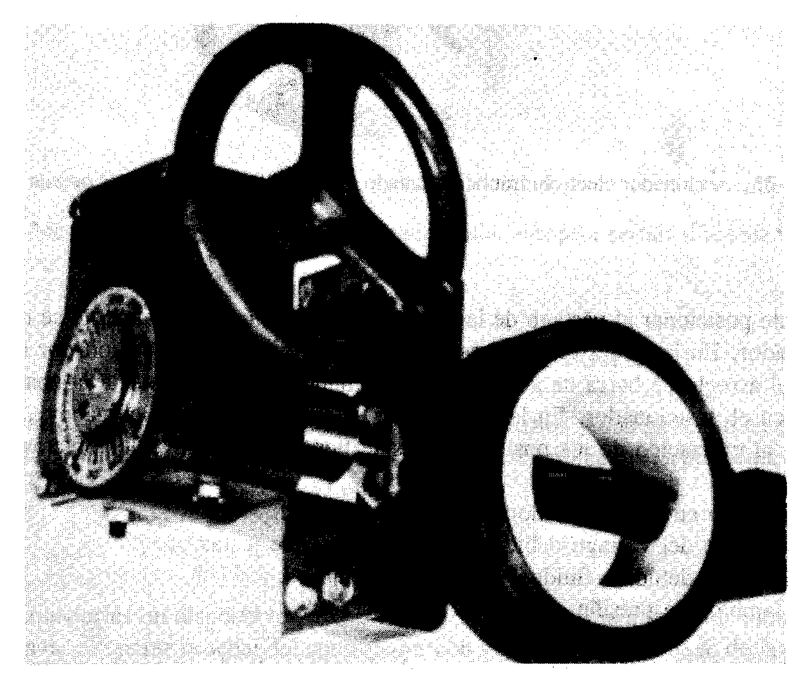


Figura **C-37.** Accionador manual. (Cortesía de Fisher Controls.)

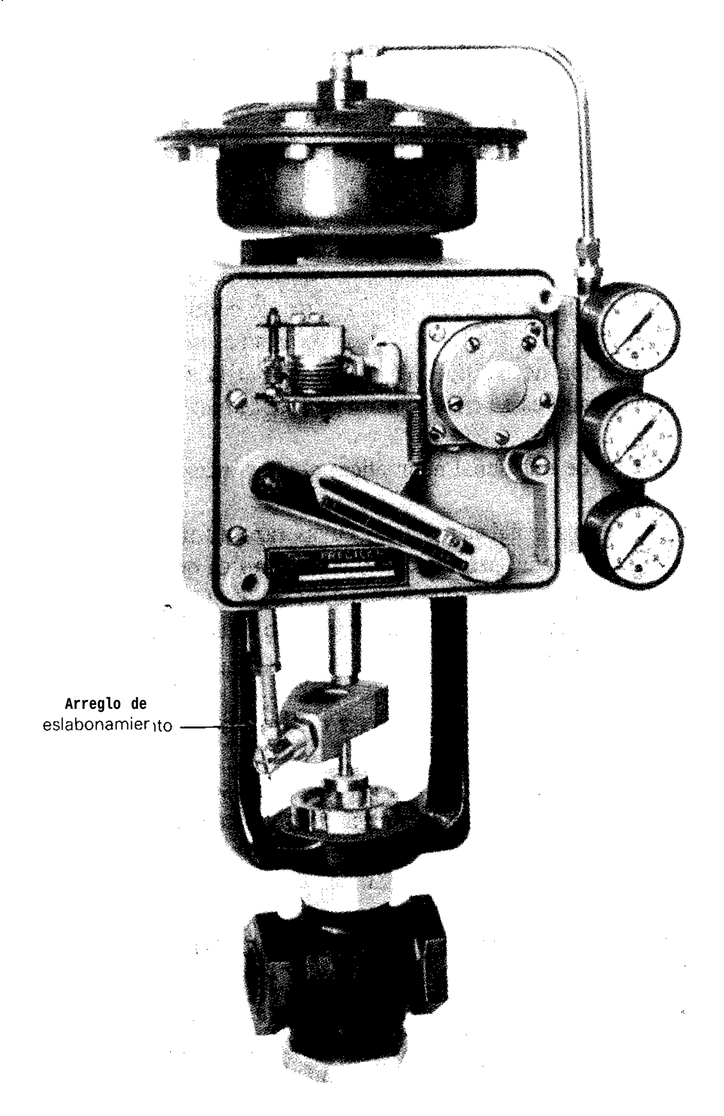


Figura C-38. Posicionador instalado en una **válvula.** (Cortesfa de Taylor Co.)

en que se da este caso son los de nivel de líquido, de temperatura, de concentración y de flujo de gas. Los de flujo y los de presión de líquido son algunos circuitos rápidos en los que se puede eliminar la utilización de posicionadores.

Generalmente, los posicionadores son neumáticos o electroneumáticos. En los neumáticos se recibe una señal neumática como entrada y se emite una señal neumática hacia la **válvula;** en los electroneumáticos se recibe una señal **eléctrica** como entrada (1-5 V, 4-20 **mA** o **10-50 mA)** y se emite una señal neumática hacia la válvula. Con

los posicionadores también se pude determinar la acción de las válvulas de control (CF o AF).

Multiplicadores

Los multiplicadores (boosters), que también se conocen como relevadores de aire, se utilizan con los accionadores de las válvulas para acelerar la respuesta de la válvula a un cambio de señal proveniente de un controlador o transductor con baja capacidad de salida. También se debe hacer notar que para los circuitos de control de respuesta rápida, tales como los de flujo o presión de líquidos, en los cuales no es indicada la utilización de posicionadores, la utilización de multiplicadores puede ser la elección adecuada.[14]

Para los multiplicadores se tienen otros posibles usos:

1. Amplificación de una señal neumática; algunas razones típicas de amplificación son 1:2 y 1:3.
2. Reducción de una señal neumática, cuyas razones típicas son 5: 1, 2: 1 y 3: 1.
3. Inversión de una señal neumática, lo cual significa que, conforme se incrementa la señal de entrada, disminuye la señal de salida. Cuando la señal de entrada es de 3 psig, la de salida es de 15 psig; cuando la señal de entrada es de 15 psig, la señal de salida es de 3 psig.

Interruptores de límite

Estos interruptores se montan a un lado de las válvulas y se disparan mediante la posición del vástago. Con estos interruptores generalmente se manejan alarmas, válvulas de solenoide, luces o cualquier otro de tales dispositivos.

VÁLVULAS DE CONTROL, CONSIDERACIONES ADICIONALES

En esta sección se presentan varias consideraciones adicionales que se deben tomar en cuenta cuando se dimensiona y elige la válvula de control; por tanto, con esta sección se complementa la sección 5-2.

En las figuras C-39*a* hasta C-39d se muestran ejemplos de catálogos de fabricantes (Masoneilan y Fisher controls). Una vez que se calcula el coeficiente C_V mediante las ecuaciones del capítulo 5, se utilizan esas cantidades para determinar las dimensiones de la válvula.

Correcciones de viscosidad

En la ecuación (5-1) no se considera el efecto de la viscosidad del líquido al calcular el coeficiente C_V. Para la mayoría de los servicios de líquidos se puede despreciar la corrección de viscosidad, sin embargo, en algunos otros casos esto puede conducir a errores de dimensionamiento.



Serie 20000

ANSI Class 150-600 (Sch. 40)

Dimensión nominal	1/4	3/8	1/2	3/4	1	1 1/2	2	3	4	6	9	10
Diámetro del orif. (pulg.)	.250	.375	.500	.750	.812	1.250	1.625	2.625	3.500	5.000	6.250	8.000
Dimensión de la válvula (pulg.)	Ajuste reducido			Ajuste a capacidad completa								
3/4	1.7	3.7	6.4	11								
1	1.7	3.7	6.4	11	12							
1 1/2	1.7	3.8	6.6	12	13	25						
2	1.7	3.8	6.7	13	19*	26	46					
3				14		31	47	110				
4						32	49	113	195			
6							53	126	208	400		
8								133	224	415	640	
10									233	442	648	1000

Diámetro del orificio .994

Referirse al boletín 334E

(a)

Figura C-39*a*. Ejemplo del catálogo de válvulas Masoneilan. (Cortesía de Masoneilan division, McGraw-Edison Co.)

Masoneilan[15] propone que se calcule un C_V turbulento y uno laminar y que se utilice como valor mayor el C_V que se requiere.

Flujo turbulento

$$C_V = 9\sqrt{\frac{G_f}{\Delta P}} \tag{C-3a}$$

Flujo laminar

$$C_V = 0.072\left(\frac{\mu q}{\Delta P}\right)^{2/3} \tag{C-3b}$$

Serie 37000
MiniTork

Factor crítico de flujo-C_f
Flujo en cualquier dirección-.65

ANSI Class 150-300 (2" to 12")
ANSI Class 150 (14" to 24")

Dimensión de la válvula	$\frac{\text{Tamaño de la línea}}{\text{Dimensión de la válvula}} = 1.0$
2	54
3	180
4	390
6	1150
8	2050
10	3200
12	4600
14	5600
16	7400
18	9500
20	11600
24	17200

Referirse al boletín 352E

Serie 38000

Factor crítico de flujo-C_f = .60
ANSI Class 150

Dimensión de la válvula	C_v
2	130
3	265
4	460
6	1025
8	1775
10	2500
12	4400

Referirse al boletín 371E

Figura C-39b. Ejemplo del catálogo de válvulas Masoneilan. (Cortesía de Masoneilan division, McGraw-Edison Co.)

COEFICIENTES DE FLUJO

Para información adicional acerca del cuerpo ver Boletín 51. 1:EB(10)

De porcentaje igual

Característica de porcentaje igual

Coeficientes	Diám. del cpo. pulg.	Diám. del pto. pulg.	Desp. total, pulg.	Abertura de la válvula-Porcentaje del desplazamiento total 10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	K_m* C_1
C_v (Líquido)	1	1	3/4	.834	1.22	1.79	2.54	3.60	5.46	8.04	10.4	11.3	12.0	.92
	1-1/2	1-1/2	3/4	1.18	1.76	2.63	3.58	5.17	7.63	10.5	17.0	22.8	28.9	.85
	2	2	1-1/8	2.18	3.35	4.55	6.40	9.10	13.5	22.0	34.6	44.5	50.0	.94
	3	3	1-2	4.13	7.97	10.6	16.9	23.6	39.0	62.4	92.4	112	120	.83
	4			5.54	[illegible]	[illegible]	[illegible]	29.1	41.0	61.9	108	155	183	.86
	1	3/4	3/4	.361	.597	.878	1.38	1.99	3.02	4.51	6.30	7.37	7.84	.97
	1-1/2	3/4	3/4	.354	.559	.874	1.34	2.02	3.01	4.61	6.78	8.54	9.71	.96
		1	3/4	.803	1.13	1.61	2.50	3.58	4.95	8.20	12.3	15.7	16.9	.93
	2	1	3/4	.772	1.17	1.65	2.47	3.53	5.38	8.20	11.2	13.7	14.9	.93
		1-1/2	3/4	1.11	1.64	2.42	3.46	4.86	7.22	12.0	17.4	24.0	29.1	.83
	3	1-1/2	3/4	1.17	1.75	2.46	3.62	4.66	7.06	11.0	17.9	25.4	31.5	.79
		2	1-1/8	2.01	3.14	4.57	6.39	9.01	12.8	22.0	37.1	51.8	60.9	.84
	4	2	1-1/8	2.18	3.27	4.61	6.28	8.78	12.8	23.1	40.2	53.8	64.1	.83
		3	1-1/2	3.47	6.12	9.66	14.8	22.6	37.1	62.2	92.5	117	136	.84
C_g (Gas)	1	1	3/4	27.0	37.5	53.0	77.6	112	162	242	344	434	482	40.1
	1-1/2	1-1/2	3/4	40.7	56.5	81.3	112	162	221	312	514	784	992	34.3
	2	2	1-1/8	72.9	111	149	207	293	392	639	1100	1580	1800	36.0
	3	3	1-1/2	127	219	317	471	706	1160	1970	3000	3870	4280	35.7
	4	4	2	176	293	445	619	838	1170	1810	3300	5960	6650	36.3
	1	3/4	3/4	12.9	19.9	27.0	42.4	59.9	91.0	136	201	265	331	42.2
	1-1/2	3/4	3/4	12.3	18.2	27.9	42.2	62.8	94.3	143	210	290	367	37.8
		1	3/4	20.4	32.0	48.4	73.4	108	162	244	358	463	617	36.5
	2	1	3/4	27.1	38.5	53.0	77.4	111	162	236	348	466	582	39.1
		1-1/2	3/4	37.0	54.5	80.8	110	152	202	316	495	778	973	33.4
	3	1-1/2	3/4	38.8	56.4	80.1	113	146	227	328	527	780	1040	33.0
		2	1-1/8	66.3	102	142	196	271	388	622	1060	1590	2040	33.5
	4	2	1-1/8	65.1	107	147	193	281	386	617	1050	1530	2100	32.8
		3	1-1/2	114	200	305	450	704	1100	1850	2950	3960	4920	36.2
C_s (Vapor)	1	1	3/4	1.35	1.88	2.65	3.88	5.60	8.10	12.1	17.2	21.7	24.1	40.1
	1-1/2	1-1/2	3/4	2.04	2.83	4.07	5.60	8.10	11.1	15.6	25.7	39.2	49.6	34.3
	2	2	1-1/8	3.65	5.55	7.45	10.4	14.7	19.6	32.0	55.0	79.0	90.0	36.0
	3	3	1-1/2	6.35	11.0	15.9	23.6	35.3	58.0	98.5	150	194	214	35.7
	4	4	2	8.80	14.7	22.3	31.0	41.9	58.5	90.5	165	298	333	36.3
	1	3/4	3/4	.645	.995	1.35	2.12	3.00	4.55	6.80	10.1	13.3	16.6	42.2
	1-1/2	3/4	3/4	.615	.910	1.40	2.11	3.14	4.72	7.15	10.5	14.5	18.4	37.8
		1	3/4	1.02	1.60	2.42	3.67	5.40	8.10	12.2	17.9	23.2	30.9	36.5
	2	1	3/4	1.36	1.93	2.65	3.87	5.55	8.10	11.8	17.4	23.3	29.1	39.1
		1-1/2	3/4	1.85	2.73	4.04	5.50	7.60	10.1	15.8	24.8	38.9	48.7	33.4
	3	1-1/2	3/4	1.94	2.82	4.01	5.65	7.30	11.4	16.4	26.4	39.0	52.0	33.0
		2	1-1/8	3.32	5.10	7.10	9.80	13.6	19.4	31.1	53.0	79.5	102	33.5
	4	2	1-1/8	3.26	5.35	7.35	9.65	14.1	19.3	30.9	52.5	76.5	105	32.8
		3	1-1/2	5.70	10.0	15.3	22.5	35.2	55.0	92.5	148	198	246	36.2

* En columna se enlistan los valores de K_m para los coeficientes C_v y los valores de C_1 para los coeficientes C_g y C_s al 100% de desplazamiento.
Ajuste estricto

Figura C-39c. Ejemplo del catalogo de válvulas de Fisher: diseño EAB, especificaciones C y D; el oclusor de la válvula es de porcentaje igual. (Cortesía de Fisher Controls.)

donde:

μ = viscosidad, centipois

En Fisher controls[16] se desarrolló una nomograffa y un procedimiento con el cual se puede obtener el factor de corrección F_V que es posible aplicar al coeficiente C_V normal para determinar el coeficiente corregido, C_{Vr}. En'la figura C-40 se muestra la nomograffa con las instrucciones para su uso; cuando ya se ha obtenido el factor de corrección, entonces el coeficiente corregido se calcula como sigue:

$$C_{Vr} = F_V C_V \tag{C-4}$$

COEFICIENTES DE FLUJO

Para información adicional acerca del cuerpo ver *Boletín 51.1:EB(10)*

Lineal — Característica **lineal**

Coeficientes	Diám. del cpo. pulg.	Diám. del pto. pulg.	Desp. total, pulg.	Abertura de la válvula-Porcentaje del desplazamiento total										K_m*
				10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	C_1
C_v (Líquido)	1 1-1/2 2 3 4	1 1-1/2 2 3 4	3/4 3/4 1-1/8 1-1/2 2	2.01 4.20 5.96 16.7 20.5	3.52 7.93 11.7 32.2 38.2	4.81 11.7 17.6 47.2 55.3	5.96 15.6 23.6 63.4 60.3	7.46 19.7 29.5 78.0 96.5	8.93 23.7 35.7 91.2 124	10.1 27.1 42.0 102 151	11.0 30.7 48.6 112 173	11.8 32.8 51.0 117 191	12.4 33.6 51.4 120 201	.90 .87 .96 .85 .84
	1-1/2	1	3/4	1.90	3.32	4.80	5.93	7.58	9.00	10.6	12.6	14.7	16.2	.90
	2	1 1-1/2	3/4 3/4	1.81 4.39	3.28 7.93	4.76 11.7	6.24 15.5	7.75 19.3	9.30 22.9	10.8 27.0	12.3 30.2	13.8 33.0	15.1 35.1	.90 .81
	3	1-1/2 2	3/4 1-1/8	4.24 5.63	7.97 11.4	11.7 17.7	15.4 24.0	19.3 30.8	23.2 37.6	27.2 47.5	31.3 57.7	35.1 65.1	38.5 68.7	.80 .81
	4	2 3	1-1/8 1-1/2	5.45 14.8	11.3 30.1	17.7 44.9	24.6 59.8	31.9 75.3	39.9 91.9	52.0 109	59.7 125	69.7 133	76.8 136	.81 .87
C_g (Gas)	1 1-1/2 2 3 4	1 1-1/2 2 3 4	3/4 3/4 1-1/8 1-1/2 2	66.6 131 173 512 610	113 251 365 999 1210	159 371 553 1520 1830	197 507 753 2040 2490	247 633 960 2510 3150	294 762 1180 3000 3870	334 888 1440 3440 4970	376 1010 1660 3850 6290	430 1120 1840 4150 7090	469 1190 1920 4380 7480	37.8 35.4 37.4 36.4 37.2
	1-1/2	1	3/4	51.6	99.7	147	195	242	289	335	395	492	573	35.4
	2	1 1-1/2	3/4 3/4	55.9 129	99.8 249	146 367	195 497	242 614	291 739	343 864	388 960	473 1110	570 1240	37.7 35.3
	3	1-1/2 2	3/4 1-1/8	122 172	247 327	362 520	489 763	914 951	742 1180	864 1450	986 1790	1130 2180	1280 2420	33.2 35.2
	4	3	1-1/8 1-1/2	184 482	35 963	1470	1950 761	2440 974	2920 1220	3460	1840 4060	4710	2590 5150	337 37.9
C_s (Vapor)	1 1-1/2 2 3 4	1 1-1/2 3 4	3/4 3/4 1-1/8 1-1/2 2	3.33 6.55 25.6 8.65 30.5	5.65 12.6 18.3 60.5	19.6 7.95 76.0 91.5	9.85 25.4 102.7 125	12.4 31.7 126.0 158	39.1 14.7 150.0 194	17.2 44.4 172.0 249	50.5 18.8 193 93.0 315	21.5 56.0 209 92.0 355	23.5 59.5 96.0 219 374	37.8 35.4 37.4 36.4 37.2
	1-1/2	1	3/4	2.58	4.99	7.35	9.76	12.1	14.5	16.8	19.9	24.5	28.7	35.4
	2	1 1-1/2	3/4	2.80 6.45	12.5 4.99	19.4 7.30	24.9 9.75	12.1	37.0 14.6	43.2 17.2	49.0 19.4	23.7 55.5	28.5 82.0	37.7 35.3
	3	1-1/2 2	1-3/4	8.60	12.4 16.4	25.0 18.1	24.5 38.2	30.7 47.6	37.1	43.2 72.5	49.3 99.5	109 56.5	164.0	33.2 35.2
	4	2 3	1-1/2	24 9.20 1	17.9 48.2	27.9 73.5	98.0	122 49.7	146 61.0	173 76.0	203 92.0	110	258	33.7 37.9

* En columna se enlistan los valores de K_m para los coeficientes C_v y los valores de C_1 para los coeficientes C_g y C_s al 100% de desplazamiento.
Ajuste estricto

Figura C-39*d*. Ejemplo del catálogo de válvulas de Fisher: diseño EB, especificaciones C y D; el oclusor de la válvula es lineal. (Cortesía de Fisher Controls.)

Vaporización instantánea y cavitación

El hecho de que en la válvula de control exista vaporización instantánea o cavitación, o ambas, puede tener efectos significativos sobre la operación de la válvula y el procedimiento de dimensionamiento. Es importante comprender el significado e importancia de estos dos fenómenos; en la figura C-41 se muestra el perfil de presión de un liquido que fluye a través de un elemento restrictivo (posiblemente una válvula de control).

Para mantener el flujo en estado estacionario la velocidad del liquido se debe incrementar conforme disminuye el área de la sección transversal para el flujo. La velocidad máxima del líquido se alcanza en un punto inmediatamente posterior al área mínima de la sección transversal (el área de puerto para una válvula de control); el punto de máxima velocidad se conoce como "vena contracta"*, en este punto se tiene también la presión más baja en el liquido. Lo que ocurre es que el incremento de velocidad (energía cinética) se acompaña por un incremento en la "energfa de presión", la energía se transforma de una forma a otra.

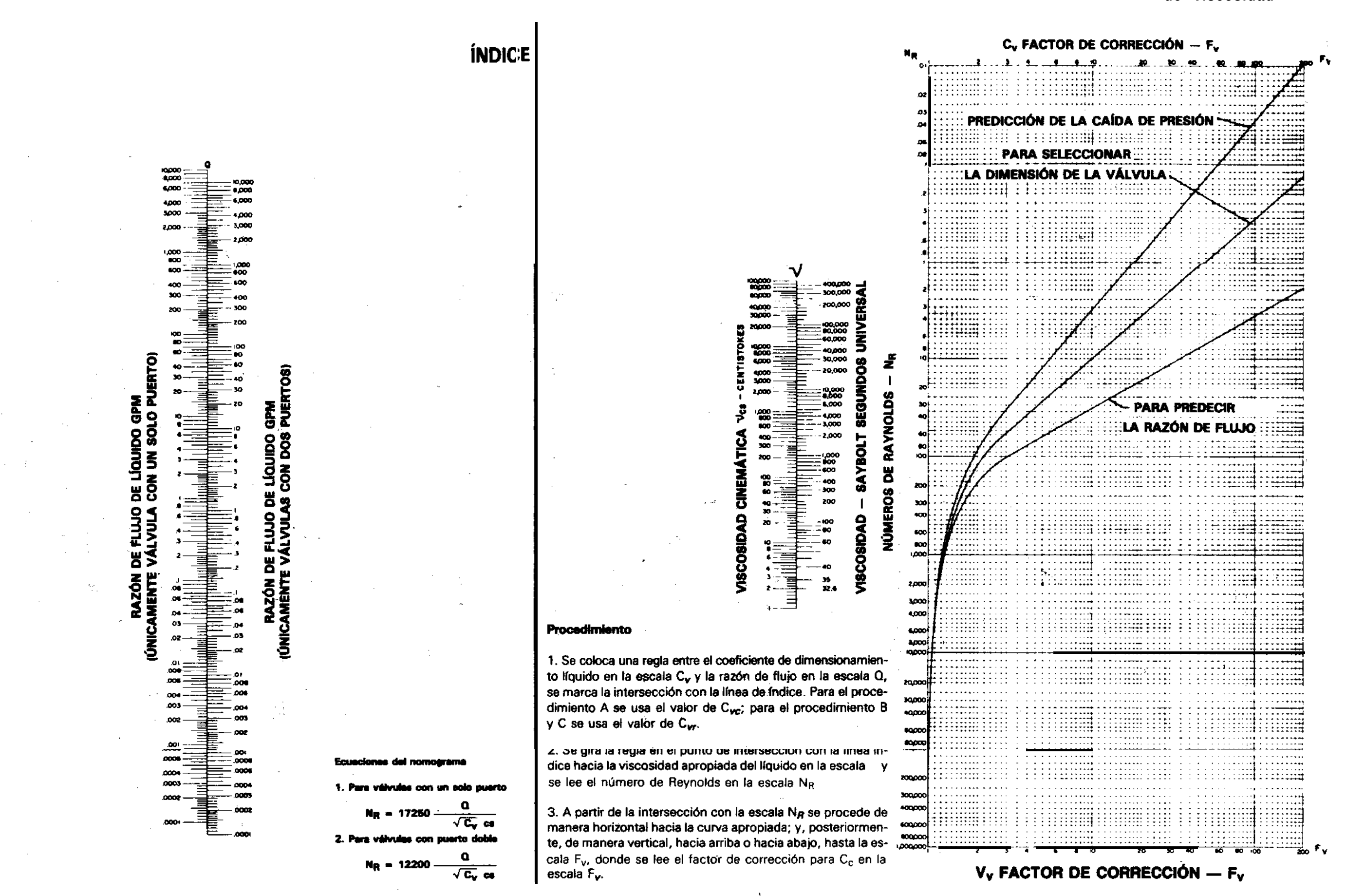


Figura C-40. Nomograma para la corrección de viscosidad. (Cortesfa de Fisher Controls.)

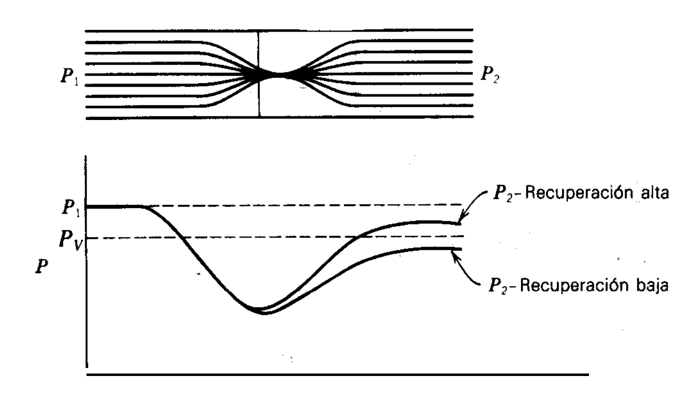


Figura C-41. Perfii de la presión de un liquido que pasa a través de un elemento de restricción.

Cuando el liquido pasa por la vena contracta, su velocidad disminuye, y entonces se recupera parte de la presión. Las **válvulas tales** como las de mariposa, de esfera o la **mayoría** de las **válvulas** rotatorias tienen **características** de recuperación de presión altas; en cambio, en las **válvulas** de vástago recfproco esta característica es baja. En las **válvulas** de vástago recfproco la trayectoria del flujo es **más** tortuosa que en las **válvulas** rotatorias y, por lo tanto, la **caída** de presión del liquido es mayor a través de esas **válvulas** que en las de tipo rotatorio.

Ahora se utiliza nuevamente la figura C-41 y se supone que la presión de vapor de líquido a la temperatura de flujo es P_V; cuando la presión del líquido cae abajo de esta presión P_V, parte del líquido empieza a cambiar de la fase líquida a la de vapor, es decir, el líquido se evapora **instantáneamente** (flashea). Con la vaporización instandnea se pueden producir serios danos por erosión en el oclusor de la válvula y en el asiento, como se muestra en la figura C-42.

Además del daño físico que se ocasiona a la **válvula**, la vaporización instantánea tiende a disminuir la capacidad de flujo en la **válvula**. Conforme se empiezan a formar burbujas, esto tiende a causar una "condición de obstrucción" en la **válvula**, con lo cual se limita el flujo; además, esta condición de obstrucción puede agravarse al grado de ocasionar "bloqueo" del flujo a **través** de la **válvula**; es decir, más allá de esta condición de bloqueo, el incremento en la caída de presión en la **válvula** no dará por resultado un incremento en el flujo. Es importante reconocer que con la ecuación de la **válvula**, ecuación (5-3), no se describe esta condición. Conforme se incrementa la caída de presión, con la ecuación se predicen razones de flujo **más** altas; dicha relación se muestra gráficamente en la figura C-43, junto con la condición de bloqueo de flujo.

En esta figura se observa que para el ingeniero es importante conocer la caída máxima de presión, $\Delta P_{máx}$, la cual es efectiva para producir el **flujo**. Los fabricantes eligieron indicar esta caída **máxima** de presión mediante una ecuación para ΔP_{perm}; con caídas de presión superiores a esta ΔP_{perm} se puede ocasionar un bloqueo del flujo. ΔP_{perm} depende en mucho no **sólo** del fluido, sino también del tipo de **válvula**. Varios fabricantes

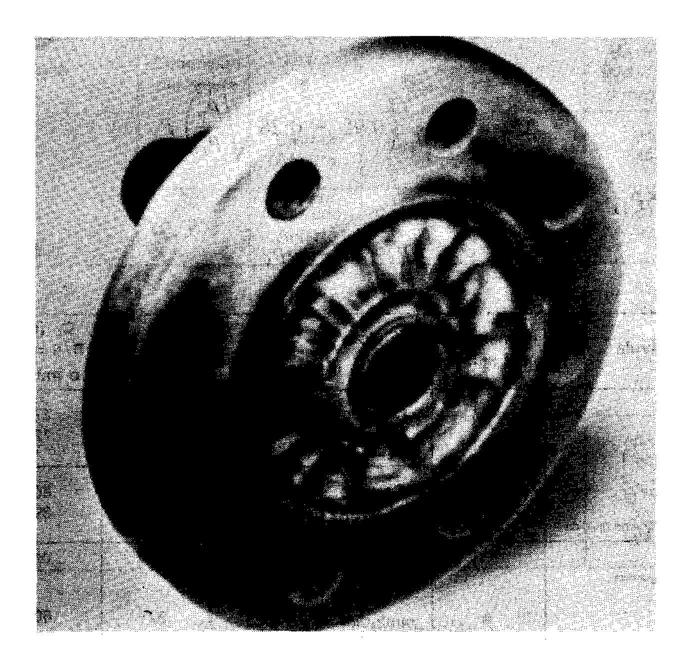


Figura C-42. Daño que se produce en el oclusor de la **válvula** a causa de vaporización instanthea. (Cortesfa de Masoneilan division, **McGraw-Edison** Co.)

han realizado investigaciones tendientes a obtener datos y desarrollar una **ecuación** para predecir ΔP_{perm}; **Masoneilan**(18) propone la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{perm} = C_f^2 \Delta P_S \qquad \text{(C-5)}$$

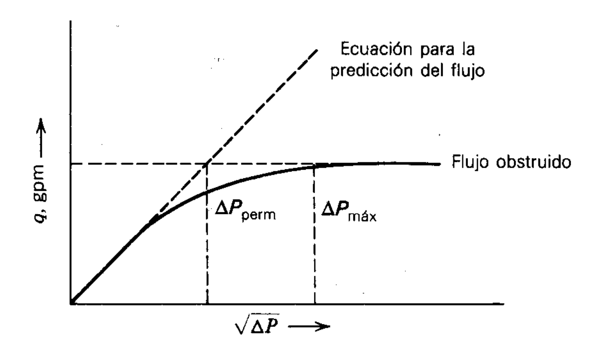


Figura C-43. Condiciones del flujo con bloqueo.

Y

$$\Delta P_S = P_1 - \left(0.96 - 0.28\sqrt{\frac{P_V}{P_C}}\right) P_V \qquad \text{(C-6)}$$

0, si $P_V < 0.5P_1$,

$$\Delta P_S = P_1 - P_V \qquad \text{(C-7)}$$

Tipo de válvula	Dimensión del ajuste	Flujo	C_f (F_L)	K_c*	C_{fr} (F_{LP}) D/d = 1.5 o mayor	X_T
Válvulas de globo con cuerpo dividido	A	→ Cerrado Abierto ←	.80 .75	.51 .46	.77 .72	.54 .47
	B	→ Cerrado Abierto ←	.80 .90	.52 .65	.80 .89	.54 .68
Serie 37000	A	En cualquier dirección	.65	.32	.60	.35
Válvula de control de balín	A	→ Abierto	.60	.24	.55	.30
Serie 40000 balanceada	1½"- 4"	→ Cenado	.94	.71	.87	.74
	6"-16"	Cerrado →	.92	.68	.89	.71
Serie 40000 sin balancear	A	← Abierto	.90	.65	.79	.68
	B	← Abierto	.90	.65	.86	.68
Serie 70000	A	→ Cerrado Abierto ←	.81 .89	.53 .64	.78 .85	.55 .67
	B	→ Cerrado Abierto ←	.80† .90	.52† .65	.80 .90	.54 .68

) Ajuste a capacidad completa, diámetro del orificio = .8 de dimensión de la válvula

) Ajuste a capacidad reducida al 50% de (A) o menos.

:on venturi revestido $C_f = 0.50$, $K_c = 0.19$

Nota $X_T = 0.84C_f^2$

Figura **C-44.** Factor de flujo crítico, C_f, con abertura completa. (Cortesía de Masoneilan division, McGraw-Edison Co.)

Tipo de **válvula**	Dimensión del ajuste	Flujo a	C_f (F_L)	K_c*	C_{fr} (F_{LP}) D/d = 1.5 0 mayor	X_T
Serie 20000	A	→ Cerrado Abierto ←	.85 .90	.58 .65	.81 .86	.61 .68
	B	→ Cerrado Abierto ←	.80 .90	.52 .65	.80 .90	.54 .68
Válvula camflex	A	← Cerrado Abierto →	.68 .85	.35 .60	.65 .80	.39 .61
	B	← Cerrado Abierto →	.70 .88	.39 .62	.70 .87	.41 .65
Serie 10 000	A	Puerto V curvado	.90 .98	.70 .80	.86 .94	.68 .81
	B	Puerto V curvado	.80 .95	.31 .73	.80 .94	.54 .76

Nota $X_T = 0.84C_f^2$

Figura **C-44.** *(Continuación.)*

donde:

P_V = presión de vapor del liquido, en psia
C_f = factor de flujo crítico[15]
P_C = presión critica del líquido, en psia

En la figura C-44 se muestra el factor de flujo critico para diferentes tipos de válvulas, C_f; estos valores son el resultado de pruebas de flujo sobre las válvulas.

Fisher controls[16] propone la siguiente ecuación:

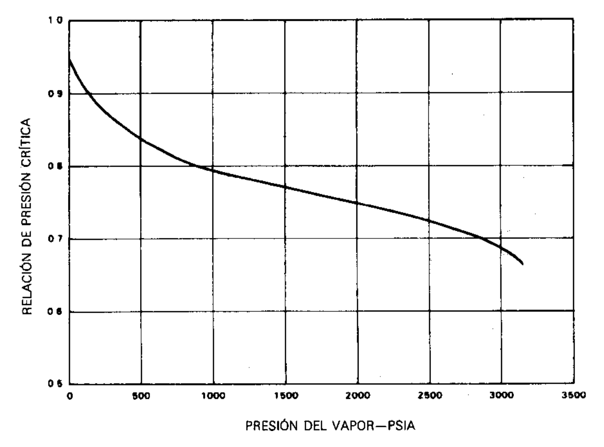
$$\Delta P_{perm} = K_m(P_1 - r_C P_V) \qquad \text{(C-8)}$$

donde:

K_m = coeficiente de recuperación de la válvula[16]
r_C = razón de presión crítica[16]

El coeficiente K_m depende del tipo de válvula y también es un resultado de las pruebas de flujo. En la última columna de las figuras C-39c y C-39d se muestran los valores de K_m para cada tipo particular de válvula. El término r_C se determina con base en la figura C-45.

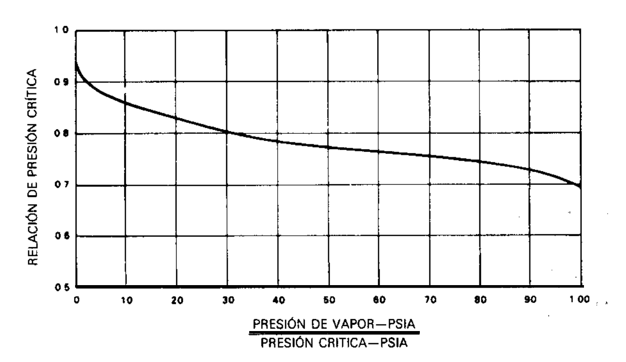
Si la recuperación de presión que experimenta el liquido es suficiente como para elevar la presión por arriba de la presión de vapor del líquido, entonces las burbujas de va-



Esta curva se usa para agua. Se inicia en la abscisa con el valor de la presión del vapora la entrada de la válvula; después se procede de manera vertical, hasta interceptar la curva; posteriormente se continúa hacia la izquierda para leer la relación de presión crítica, r_c, en la ordenada.

Presión critica de diversos fluidos. Psia*

Amoníaco.	1636
Argón	705.6
Butano	550.4
Dióxido de carbono	1071.6
Monóxido de carbono.	507.5
Cloro	1116.7
Dowtherm A	465
Etano	706
Etileno	735
Fluor	606.5
Helio	33.2
Hidrógeno	166.2
Cloruro de hidrógeno	1198
Isobutano	529.2
Isobutileno	560
Metano	673.3
Nitrógeno	492.4
Óxido nitroso	1047.6
Oxigeno	736.5
Fosgeno	623.2
Propano	617.4
Propileno	670.3
Refrigerante 11	635
Refrigerante 12	596.9
Refrigerante 22	716
Agua*	3206.2



Esta curva se usa para líquidos diferentes al agua. Se determina la razón presión de vapor/presión critica. dividiendo la presión del vapor del líquido en la entrada de la válvula entre la presión critica del líquido; con este valor se inicia por la abscisa y se sube una vertical hasta intersecar la curva; después se tiende una horizontal hacia la izquierda y se lee la razón de presión critica. r_c, en la ordenada

Figura C-45. Razón de presión crítica según Fisher. (Cortesía de Fisher Controls.)

por se empiezan a colapsar 0 a implosionar, lo cual se conoce como "cavitación". La energía que se libera durante la cavitación produce ruido, como si fluyera grava a través de la **válvula**(14); en la figura **C-46** se muestra el daño típico que se produce en la **válvula** al desprenderse material por efecto de la cavitación. Ciertamente, en las **válvulas** de vástago rotatorio, cuya recuperación de presión es alta, se tiende a experimentar cavitación más frecuentemente que en las válvulas de vástago recíproco, las cuales poseen recuperación baja de presión.

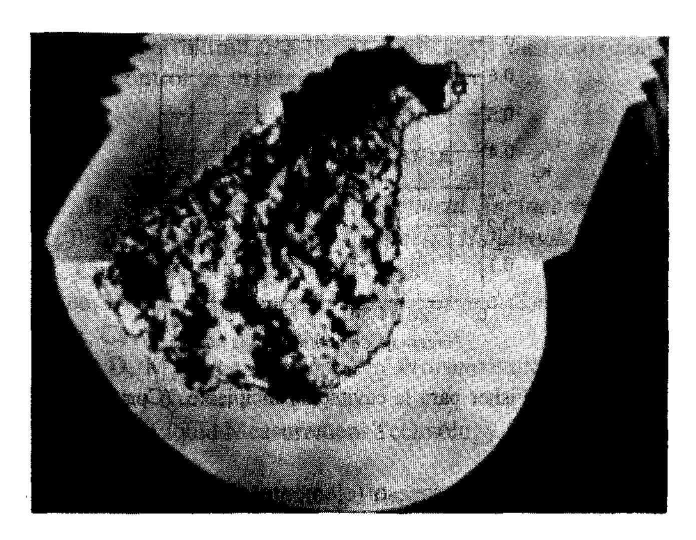


Figura C-46. Daño causado por la **cavitación.** (Cortesfa de Masoneilan division, **McGraw-Edison** Co.)

Con las pruebas se ha demostrado que, en las **válvulas** con recuperación de presión baja, el bloqueo de flujo y la cavitación se presentan aproximadamente a la misma ΔP y, en consecuencia, las ecuaciones (C-5) y (C-8) también se pueden utilizar para calcular la caída de presión a la cual comienza la cavitación. En las **válvulas** con alta recuperación de presión, la cavitación puede ocurrir a caídas de presión por abajo de ΔP_{perm}; para estos tipos de **válvulas, Masoneilan**(15) propone la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{\text{cavitación}} = K_C(P_1 - P_V) \quad \text{(C-9)}$$

donde:

K_C = coeficiente de **cavitación** incipiente, el cual se muestra en la figura C-44
Fisher **controls**[19] propone la misma ecuación y sus términos K_C se muestran en la figura **C-47.**

Los fabricantes de **válvulas** producen dispositivos especiales **anticavitación** con los que se tiende a incrementar el **término** K_C *de* la **válvula** y, por lo tanto, la caída de presión a la cual ocurre la cavitación.

RESUMEN

En este breve apéndice se tuvo como propósito familiarizar al lector con algunos de los instrumentos que se utilizan comúnmente. en los circuitos de control de proceso. Entre la instrumentación que se expone se incluye parte de los instrumentos que se necesitan

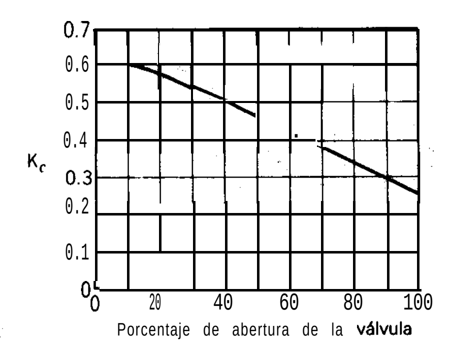


Figura C-47. Coeficiente de Fisher para la cavitación incipiente. (Cortesía de Fisher Controls.)

para medir (M) las variables, del proceso (elementos primarios) tales como flujo, temperatura y presión. Se presentaron dos tipos de transmisores y se expusieron sus principios de funcionamiento. Finalmente, también se presentaron algunos tipos muy comunes de válvulas (elementos finales de control) que se utilizan para ejecutar la acción (A), junto con sus características de flujo.

Como se mencionó en la primera frase de este resumen, éste es un apéndice breve. En este libro es imposible presentar y abordar todos los detalles que se relacionan con los diferentes tipos de instrumentos, pero existen manuales completos y colecciones muy exhaustivas de articulos disponibles para este fin. Se remite al lector a la bibliografía que aparece al final de este apéndice. Además de los numerosos tipos diferentes de instrumentos de que se dispone en la actualidad, cada mes se introducen al mercado nuevos y "mejorados" tipos de elementos primarios, transmisores y elementos finales de control. En el área de elementos primarios se desarrollan constantemente nuevos sensores con los que se puede medir variables difíciles con mas exactitud, más frecuente y más rápidamente, por ejemplo, la concentración. En el área de transmisores, la ultima palabra son los "transmisores inteligentes' ' .

Con estos transmisores de hoy en día, en los que se utilizan microprocesadores, se puede entregar la información a los controladores en una forma más comprensible. La de los elementos finales de control es otra área de investigación en la que existe mucha actividad; no solamente se mejoran continuamente las válvulas neumáticas de control, sino que ahora se desarrollan y mejoran los actuadores eléctricos para lograr la interconexión con otros componentes electrónicos, como son los controladores y las computadoras Además, están en desarrollo otros elementos finales de control, tales como los manejadores para bombas y ventiladores de velocidad variable, cuya razón de desarollo es la conservación de energía. A causa de la falta de espacio no se presenta en este libro la factibilidad y la justificación para uitlizar estos ventiiadores y bombas de velocidad variable en la regulación del flujo, sin embargo, el lector puede consultar las referencias bibliográficas 21, 22, 23 y 24 para estudiar este tema.

Ciertamente, en los últimos párrafos, el lector se dará cuenta que se llevan a cabo investigaciones, principalmente por parte de los fabricantes, en el área de instrumenta-

ción, *cuyos* resultados permitirán una mejor medición y un mejor control. Esta es una razón por la cual el control es un campo tan dinámico.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ryan, J. B., "Pressure Control," *Chemical Engineering,* Febrero 3, 1975.
2. Liptak, Beta G., ed., *Instrument Engineers ' Handbook, Vol. 1, Process Measurement,* Chilton Book Co., Nueva York.
3. Considine, D. *M., Ed., Process Znstruments and Controls Handbook,* McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1957.
4. Considine, D. M., Ed., *Handbook of Instrumentation and Controls,* McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1961.
5. Smith, c. L., "Liquid Measurement Technology," *Chemical Engineering,* Abril 3, 1978.
6. Zientara, Dennis E., "Measuring Process Variables," *Chemical Engineering,* Septiembre ll, 1972.
7. Kern, R., "How to Size Flowmeters," *Chemical Engineering,* Marzo 3, 1975.
8. "Handbook Flowmeter Orifice Sizing," Handbook No. 10B9000, Fischer Porter Co., Warminster, Pa.
9. Spink, L. K., "Principles and Practice of Flow Meter Engineering," The Foxboro Co., Foxboro, Mass.
10. Kern, R., "Measuring Flow in Pipes with Orifices and Nozzles," *Chemical Engineering,* Febrero 3, 1975.
11. Wallace, L. M., "Sighting in on Leve1 Instruments," *Chemical Engineering,* Febrero 16, 1976.
12. "Process Control Instrumentation," Publicaciones de la Foxboro Co. 105A-15M-4/71, Foxboro, Mass.
13. Taylor Instrument Co., "Differential Pressure Transmitter Manual, IB-12B215. "
14. "Control Valve Handbook," Fisher Controls Co., Marshaltown, Iowa.
15. "Masoneilan Handbook for Control Valve Sizing," Masoneilan Intemational, Inc., Norwood, Mass.
16. "Fisher Catalog 10," Fisher Controls Co., Marshalltown, Iowa.
17. Casey, J. A., and D. Hammitt, "How to Select Liquid Flow Control Valves," *Chemical Engineering,* Abril 3, 1978.
18. Chalfin, S., "Specifying Control Valves," *Chemical Engineering,* Octubre 14, 1974.
19. Kem, R., "Control Valves in Process Plants," *Chemical Engineering,* Abril 14, 1975.
20. Hutchison, J. W., Ed., "ISA Handbook of Control Valves," Instrument Society of America.
21. Fischer, K. A., y D. J. Leigh, "Using Pumps for Flow Control" Instruments and Control Systems, Marzo, 1983.
22. Jarc, D. A., y J. D. Robechek, "Control Pump with Adjustable Speed Motors Save Energy," Instruments and Control Systems, Mayo 1981.

23. Pritchett, D. H., "Energy-Efficient Pump Drive," *Chemicul Engineering Progress*, Octubre 1981.
24. Baumann, H. D., "Control Valve vs. Variable-Speed Pump," *Chemical Engineering,* Jumo 24, 1981.
25. Utterback, V. C., ' 'Online Process Analyzers," *Chemical Engineering,* Junio 21, 1976,
26. Foster, R. "Guidelines for Selecting Outline Process Analyzers," *Chemicul Engineering,* Marzo 17, 1975.
27. Ottmers, D. M., et al., "Instruments for Environmental Monitoring," *Chemical Engineering,* Octubre 15, 1979
28. Creason, S. C., "Selection and Care of pH Electrodes," *Chemicul Engineering,* Octubre 23, 1978.

APÉNDICE D

Programa de computadora para encontrar raíces de polinomios

El programa que se lista en la figura D-l se puede utilizar directamente para encontrar todas las raíces, reales y complejas, de un polinomio. En dicho programa se utiliza la subrutina MULLER, con la cual se calculan las raíces mediante el método de Müller, con base en la interpolación cuadrática de Lagrange; para una descripción completa del método de Müller el lector debe consultar la bibliografía original de Müller[1] o el texto de Conte y de Boor[2].

Mientras que el programa principal y la subrutina POLY son específicos para encontrar raíces de polinomios, la subrutina MULLER es general; con ella se pueden encontrar las raíces reales y complejas de cualquier función no lineal, y no necesariamente de un polinomio; en ésta se utiliza la subrutina DEFLAT para reducir numéricamente el polinomio o función, como en la ecuación (2-5 1), lo cual es una operación que se conoce como *deflación y* con ella se asegura que no se obtendrá la misma raíz más de una vez, con excepción del caso de raíces repetidas.

En el programa principal se introduce el grado del polinomio y sus coeficientes, en potencias ascendentes de x, y de ahí se pasan a la subrutina POLY, mediante una declaración COMMON; también se introducen el número máximo de reiteraciones por raíz, la tolerancia relativa de error y las aproximaciones iniciales a las raíces, y se pasan a la subrutina MULLER mediante sus argumentos. Müller' recomienda fijar las aproximaciones iniciales a las raíces en cero, de manera que las raíces se encuentren en orden creciente de magnitud; aunque esto da por resultado una aproximación más precisa de las raíces, no siempre se encuentran éstas en orden creciente.

En este programa se define la tolerancia relativa de error como la diferencia máxima que se permite entre dos aproximaciones sucesivas de una raíz, dividida entre la magnitud de la misma; por ejemplo, con un valor de 10^{-6} se asegura que las dos aproximaciones sucesivas concuerdan en 6 ***dígitos significativos,*** independientemente de la magnitud de la raíz.

```
C        MAIN PROGRAM TO FIND THE ROOTS OF A POLYNOMIAL BY MULLER'S
C           METHOD
C
C        VARIABLES IN INPUT DATA
C
C        VARIABLE TYPE DIMENSION DESCRIPTION
C
C        NDEG        1                   DEGREE OF THE POLYNOMIAL
C        MAXIT       1                   MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C        RTOL        R                   RELATIVE ERROR TOLERANCE ON ROOTS
C        A           R      NDEG+1       POLYNOMIAL COEFFICIENTS ORDERED
C                                         IN ASCENDING POWERS OF X
C        XS          C       NDEG        INITIAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS
C
C        SUBPROGRAMS CALLED
C
C           MULLER  - TO COMPUTE ROQTS OF POLYNOMIAL BY MULLER'S METHOD
C
      COMPLEX XS(20)
      COMMON NDEG, A(21)
      EXTERNAL POLY
C
C        READ AND PRINT INPUT DATA
C
 10   WRITE ( 6. 100 )
 100  FORMAT(' ENTER NDEG. MAXIT, RTOL' )
      READ( 5, * )  NDEG, MAXIT, RTOL
      IF( NDEG .EQ. 0 ) STOP
      NC = NDEG + 1
C
      WRITE( 6. 110 )
 110  FORMAT(' ENTER POLYNOMIAL COEFFS.. ASCENDING POWERS OF X' )
      READ ( 5, * ) (A(I),I=1,NC)
      WRITE( 6. 120 )
 120  FORMAT(' ENTER INITIAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS' )
      READ ( 5, * ) (XS(I),I=1,NDEG)
C
      WRITE ( 6. 130 ) NDEG. RTOL. (A(I),I=1,NC)
      WRITE ( 4; 130 ) NDEG; RTOL; (A(I),I=1,NC)
      WRITE ( 6, 140 ) (XS(I),I=1,NDEG)
      WRITE ( 4. 140 ) (XS(I),I=1,NDEG)
C
 130  FORMAT('1',10X,'MULLERS METHOD TO FIND THE ROOTS OF A POLY',
     1                 'NOMIAL OF DEGREE',I3,
     2        //11X,'RELATIVE ERROR TOLERANCE',1PG10.2,5X
     3        //11X,'THE COEFFICIENTS OF THE POLYNOMIAL ARE (CONSTANT ',
     4               'TERM FIRST)'//(13X,5G13.6))
 140  FORMAT(//11X,'THE INITIAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS ARE'
     1        //18X,'REAL',8X,'IMAGINARY'/(/12X,1P2G15.6))
C
C        EVALUATE ROOTS OF POLYNOMIAL BY MULLER'S METHOD
C
      CALL MULLER( NDEG, XS. MAXIT. RTOL, POLY )
C
C        PRINT RESULTS
C
      WRITE ( 6, 150 ) (XS(I),I=1,NDEG)
      WRITE ( 4, 150 ) (XS(I),I=1,NDEG)
 150  FORMAT(//11X,'THE FINAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS ARE'
     1        //18X,'REAL',8X,'IMAGINARY'/(/12X,1P2G15.6))
      GOTO 10
      END
C*
C*----------------------------------------------------------------------
```

Figura **D-l.** Programa para calcular todas las raíces, reales y complejas, de un polinomio.

```
C*
      SUBROUTINE POLY( X, P )
C
C        PURPOSE - TO EVALUATE A POLYNOMIAL OF NTH DEGREE
C                     FOR SUBROUTINE MULLER
C
C        METHOD  - NESTED MULTIPLICATION (SYNTHETIC DIVISION)
C
C        VARIABLES IN COMMON
C
C        NDEG          DEGREE OF THE POLYNOMIAL
C        A(NDEG+1)     COEFFICIENTS OF THE POLYNOMIAL ORDERED IN
C                         ASCENDING POWERS OF X
C
C        VARIABLES IN ARGUMENT LIST
C
C        VARIABLE TYPE I/O DESCRIPTION
C
C           X       C     1   COMPLEX VALUE AT WHICH THE
C                                POLYNOMIAL IS TO BE EVALUATED
C           P       C     0   COMPLEX VALUE OF THE POLYNOMIAL
C
      COMPLEX X, P, B
      COMMON NDEG, A(21)
C
      NC = NDEG + 1
      B  = A(NC)
      DO 10 I=l.NDEG
         K = NC - I
 10      B = B * X + A(K)
      P = B
C
      RETURN
      END
C*
C*-----------------------------------------------------------------
C*
      SUBROUTINE MULLER( N, XS, MAXIT, RTOL, FUNCTN )
C
C        PURPOSE - TO COMPUTE APPROXIMATIONS OF THE ROOTS OF
C                     NONLINEAR  EQUATIONS
C
C        REF:  CONTE AND DE BOOR. "ELEMENTARY  NUMERICAL  ANALYSIS",
C              3RD ED., MCGRAW-HILL. NEW YORK, 1980, PP. 120-127.
C
C        METHOD:  MULLER'S METHOD OF QUADRATIC INTERPOLATION
C
C        VARIABLES IN ARGUMENT LIST
C
C        VARIABLE TYPE I/O DIMENSION  DESCRIPTION
C
C           N        1     1             NUMBER OF ROOTS TO BE COMPUTED
C           XS       C    I/O      N     ARRAY CONTG. THE INITL. APPRS.
C                                           AND RETG. THE FINAL VALUES
C           MAXIT   1      1             MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
C           RTOL     R     1             RELATIVE ERROR TOLERANCE ON
C                                           THE ROOTS
C           FUNCTN E       1             NAME OF SUBROUTINE USED TO
C                                           EVALUATE THE FUNCTION
C
C        SUBPROGRAMS  CALLED
C
C           FUNCTN - TO EVALUATE THE NONLINEAR FUNCTION
C           DEFLAT - TO DEFLATE THE FUNCTION
```

Figura D-l. *(Continuación)*

```
C
      COMPLEX XS(N), H, X, FX, F, DFP, FP. LAMBDA, DF, DFPL,
     C        DELTA, TOP, G, RAD.  BOT
C
C        GUARD AGAINST ZERO OR NECATIVE ERROR TOLERANCE
C
      ETOL    = AMAX1( RTOL. 1.E-6 )
C
C        START OF LOOP TO EVALUATE N ROOTS
C
      DO 100 I=1,N
         NEVAL = 0
C
C           EVALUATE AND DEFLATE FUNCTION AT FIRST APPROXIMATION
C
 10      H       = 0.5
         X       = XS(I) + H
         NEVAL  =  NEVAL + 1
         CALL FUNCTN( X, FX )
         CALL DEFLAT( 1. X, FX, F, XS, IFLG )
         IF( IFLG .NE. 0 ) GOTO 10

            EVALUATE AND DEFLATE FUNCTION AT SECOND APPROXIMATION

         DFP    = F
         X      = XS(I) - H
         NEVAL = NEVAL + 1
         CALL FUNCTN( X, FX )
         CALL DEFLAT( 1, X, FX. F, XS, IFLC )
         IF( IFLG .NE. 0 ) COTO 10

            INITIALIZATION OF ITERATIVE CALCULATION

         FP      =F
         DFP     = FP - DFP
         X       = XS(I)
         LAMBDA =  - 0.5
         NEV     = NEVAL + 1
C
C           ITERATIVE CALCULATION OF THE ROOT
C
         DO 30 NEVAL=NEV,MAXIT
C
            CALL FUNCTN( X, FX )
            CALL DEFLAT( I, X. FX, F, XS, IFLG )
            IF( IFLG .NE. 0 ) GOTO 10
C
C              COMPUTE NEXT ESTIMATE OF ROOT
C
            DF      = F - FP
            DFPL    = DFP * LAMBDA
            DELTA  =  1.  + LAMBDA
            TOP    =-2.   * F * DELTA
            G       = ( DELTA + LAMBDA ) * DF - LAMBDA * DFPL
            RAD     = CSQRT( G**2 + 2. * TOP * LAMBDA * ( DF - DFPL) )
            BOT     = G + RAD
            IF( REAL(G) . REAL(RAD) + AIMAG(G) * AIMAG(RAD) .LT. 0.)
     *         BOT = G - RAD
            LAMBDA = TOP
            IF( CABS(BOT) .NE. 0. ) LAMBDA = TOP / BOT
C
            FP  = F
            DFP = DF
```

Figura D-l. (*Continuación*)

```
            H    = H * LAMBDA
            X    = X + H
C
C              CHECK  FOR  CONVERGENCE
C
            IF( CABS(H)  .LT.  ( ETOL * CABS(X) ) ) GOTO 100
C
 30         CONTINUE
C
C              REACHED  MAXIMUM  NUMBER  OF  ITERATIONS
C
         WRITE( 6,  110 ) NEVAL. I, X,  F
         WRITE( 4,  110 ) NEVAL. I, X,  F
 110 FORMAT(//11X,'FAILED TO CONVERGE AFTER',I3,1X,'EVALUATIONS',
     *' FOR ROOT',I3//11X,'ROOT',1P2G15.6,5X,'F(ROOT)',2G15.6)
C
 100     XS(I) = x
C
      RETURN
C
      END
C*
C*------------------------------------------------------------------
C*
      SUBROUTINE DEFLAT( 1, X, FX. FDEF, XS, IFLG  )
C
C        PURPOSE - TO DEFLATE THE FUNCTION F SO THAT THE SAME
C                   ROOT  IS  NOT  ENCOUNTERED  MORE  THAN  ONCE
C
C        VARIABLES  IN  ARGUMENT  LIST
C
C        VARIABLE  TYPE  I/O  DIMENSION   DESCRIPTION
C
C           1         1     1                NUMBER  OF  ROOT  SOUGHT
C           X         C     1                CURRENT   APPROXIMATION
C           FX        C     1                FUNCTION  VALUE  AT  X
C           FDEF      C     0                DEFLATED  VALUE  AT  X
C           XS        C     1       1        PREVIOUS  ROOTS  FOUND
C           IFLG      1     0                FLAG  SET  TO  ONE  IF  CURRENT
C                                             ROOT  MATCHES  PREVIOUS  ROOT
C
      COMPLEX X,  FX,  FDEF,  XS(1),  BOT
C
      IFLG = 0
      FDEF = FX
      IF( 1  .LT.  2  ) RETURN
C
C        DEFLATION OF F(X)
C
      DO 10  K=2,I
         BOT     = X - XS(K-1)
         IF( CABS(BOT) .LT. 1E-20 ) GOTO 20
 10      FDEF = FDEF / BOT
      RETURN
C
C        CURRENT  APPROXIMATION  MATCHES  A  ROOT.   MODIFY  AND  SET  IFLAG.
C
 20   XS(I) = x + 0.001
      IFLG  =  1
      RETURN
C
      END
```

Figura D-l. (*Continuación*)

Datos *de* entrada

Primera línea

NDEG, MAXIT, RTOL

donde:

NDEG es el grado del polinomio
MAXIT es el número máximo de iteraciones que se permite por raíz.
RTOL es la tolerancia relativa de error

Segunda línea

A(Z), I = 1, NDEG + 1

donde:

A(I) son los coeficientes del polinomio, en orden ascendente de potencias de x, esto es:

$$p(x) = A(1) + A(2)x + A(3)x^2 + . . . + A(NDEG + 1)x^{NDEG}$$

Tercera línea

$XS(I)$, I = 1, NDEG

donde:

$XS(I)$ son las aproximaciones iniciales a las raíces

Después de que se resuelve cada problema, el programa se regresa al inicio para leer los datos de *otro* caso. *Para detener la* ejecución se introduce un valor *cero* en NDEG.

formato. El formato de los datos de entrada es libre, es decir, las cantidades para cada línea se introducen y separan por espacios o comas. El programa se escribe con señales de entrada (prompts) para que se pueda usar en forma interactiva desde una terminal de tiempo compartido.

Resultados. Los resultados consisten en una repetición de los datos de entrada y las aproximaciones finales a las raíces, las cuales aparecen en dos columnas, una para las partes reales y otra para las imaginarias.

Precaución. Generalmente se imprime una pequeña parte imaginaria en raíces reales, debido a inexactitudes numéricas; si en varios órdenes de magnitud la parte imaginaria

es menor que la parte real, se debe descartar. De manera similar, la parte real se debe descartar si es menor en varios órdenes de magnitud que la parte imaginaria.

funciones de la* unidad *de salida. A causa de la estructura de tiempo compartido, con el programa se escribe cada linea dos veces, una en la unidad 6, la cual se supone que es la terminal, y otra en la unidad 4 para impresión en papel. Para la utilización en lote **(batch),** se debe eliminar una de las dos instrucciones WRITE.

Ejemplo Los datos de entrada para encontrar las raíces de la siguiente ecuación polinómica:

$$s^5 + 4s^4 + 16s^3 + 25s^2 + 48s + 36 = 0$$

```
MULLERS METHOD TO FIND THE ROOTS OF A POLYNOMIAL OF DEGREE 5
RELATIVE ERROR TOLERANCE   1.0E-05
THE COEFFICIENTS OF T-HE POLYNOMIAL ARE (CONSTANT TERM FIRST)
    36.0000     48.0000     25.0000     16.0000     4.0000
    1.00000

THE INITIAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS ARE

        REAL          IMAGINARY
        .0             .0
        .0             .0
        .0             .0
        .0             .0
        .0             .0

THE FINAL APPROXIMATIONS TO THE ROOTS ARE

        REAL          IMAGINARY
    -1.00000        7.99139E-13
     8.22254E-07   -2.00000
     3.95433E-07    2.00000
    -1.50000       -2.59808
    -1.50000        2.59808
```

Figura D-2. Ejemplo de los resultados del programa de Müller.

con 50 reiteraciones por raíz, tolerancia de error relativa de 10^{-5} y cero aproximaciones iniciales son

Primera línea: 5, 50, IE-5
Segunda línea: 36, 48, 25, 16, 4, 1
Tercera línea: (O,O), (O,O), (O,O), (O,O), (0,0)

Se sabe que las raíces son

$$-1,\ i2,\ -i2,\ -\frac{3}{2}+i\,\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}-i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

En la figura D-2 aparece la salida del programa para este ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Müller, D. E., "A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer," *Mathematical Tables and Other Aids to Computation,* Vol. 10, 1956, pp. 208-215.
2. Conte, S. D. y C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, 3a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1980, pp. 120-127.

Índice

El propósito principal de este libro es mostrar la aplicación del control automático de procesos, junto con los principios fundamentales de la teoría del control. Con este fin se incluye a lo largo del mismo una buena cantidad de análisis de casos, problemas y ejemplos tomados directamente de la experiencia de los autores como profesionales y como consultores en el área del control de procesos.

Al principio del libro se definen los términos y los conceptos matemáticos que se utilizan en los sistemas de control de procesos y se explican los principios de la respuesta dinámica del proceso. Luego se analizan algunos componentes importantes del sistema de control, como sensores, transmisores y válvulas de control comunes. En la segunda parte del libro se trata el diseño y análisis de los sistemas de control por retroalimentación. Aquí se estudian las técnicas de control industrial más importantes, como control de razón, control en cascada, control por acción precalculada, control por sobreposición, control selectivo y control multivariable. Al final del libro se presenta la simulación por computadora de los procesos y sus sistemas de control.

El objetivo de este libro se centra en la industria de procesos. Está dirigido a los estudiantes de nivel superior de Ingeniería, principalmente de las áreas Química, Mecánica, Petroquímica, Metaimecánica, Metalurgia e Ingeniería Ambiental. Asimismo, se recomienda al personal técnico de la industria de procesos.



ISBN 968-18-3791-6